

# Appunti di Analisi matematica 2

Paolo Acquistapace

27 dicembre 2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>1</b>
1.1	Successioni di funzioni . . . . .	1
1.2	Proprietà della convergenza uniforme . . . . .	10
1.3	Spazi con prodotto scalare . . . . .	16
1.4	Spazi normati . . . . .	19
1.5	La nozione di spazio metrico . . . . .	25
1.6	Compattezza . . . . .	31
1.7	Completezza . . . . .	34
1.8	Contrazioni . . . . .	52
1.9	Funzioni implicite . . . . .	57
1.10	Massimi e minimi vincolati . . . . .	78
<b>2</b>	<b>Sistemi differenziali</b>	<b>86</b>
2.1	Preliminari . . . . .	86
2.2	Sistemi lineari . . . . .	89
2.3	Sistemi omogenei a coefficienti costanti . . . . .	98
2.4	Equazioni lineari di ordine $n$ . . . . .	116
2.5	Analisi qualitativa per sistemi $2 \times 2$ . . . . .	129
<b>3</b>	<b>Integrazione secondo Lebesgue</b>	<b>157</b>
3.1	Motivazioni . . . . .	157
3.2	Volume dei parallelepipedi . . . . .	158
3.3	Misura esterna di Lebesgue . . . . .	161
3.4	Insiemi misurabili secondo Lebesgue . . . . .	164
3.5	Misurabilità dei parallelepipedi . . . . .	169
3.6	Insieme di Cantor . . . . .	171
3.7	Misura di Lebesgue . . . . .	173
3.8	Un insieme non misurabile . . . . .	177
3.9	Funzioni misurabili . . . . .	179
3.10	L'integrale di Lebesgue . . . . .	186
3.11	Confronto con l'integrale di Riemann . . . . .	194
3.12	Passaggio al limite sotto il segno di integrale . . . . .	197
3.13	Calcolo degli integrali multipli . . . . .	209
3.14	Cambiamento di variabili . . . . .	222
3.15	Lo spazio $L^1$ . . . . .	244

3.16	Serie di Fourier . . . . .	261
3.17	Il metodo di separazione delle variabili . . . . .	291
<b>4</b>	<b>Varietà</b>	<b>301</b>
4.1	Curve . . . . .	301
4.2	Ascissa curvilinea . . . . .	311
4.3	Geometria delle curve piane . . . . .	319
4.4	Involuppi . . . . .	327
4.5	Curve sghembe . . . . .	333
4.6	Forme differenziali lineari . . . . .	341
4.7	Aperti con frontiera di classe $C^r$ . . . . .	353
4.8	Formule di Gauss-Green nel piano . . . . .	357
4.9	Superfici . . . . .	365
4.10	Geometria delle superfici . . . . .	395
4.11	Varietà $r$ -dimensionali . . . . .	413
4.12	Applicazioni multilineari alternanti . . . . .	417
4.13	Misura e integrazione su varietà . . . . .	440
4.14	Forme differenziali lineari di grado $r$ . . . . .	449
4.15	Integrazione di $r$ -forme su $r$ -varietà orientate . . . . .	458
	<b>Indice analitico</b>	<b>470</b>

# Capitolo 1

## Spazi metrici

### 1.1 Successioni di funzioni

Andiamo a considerare varie nozioni di convergenza per successioni o serie di funzioni: alcune di queste convergenze, in particolare la *convergenza uniforme*, costituiranno il modello a cui ci rifaremo per introdurre le nozioni astratte di spazio normato e di spazio metrico.

Sia dunque  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni a valori reali, o anche complessi, definite su un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$ , oppure di  $\mathbb{R}^m$ , oppure di  $\mathbb{C}^m$ ; sia  $f$  un'altra funzione definita in  $A$ .

**Definizione 1.1.1** Diciamo che la successione  $\{f_n\}$  converge puntualmente alla funzione  $f$  in  $A$  se per ogni  $x \in A$  la successione numerica  $\{f_n(x)\}$  converge al numero  $f(x)$ , ossia se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A;$$

in simboli, ciò significa che

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

**Definizione 1.1.2** Diciamo che la successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente alla funzione  $f$  in  $A$  se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0;$$

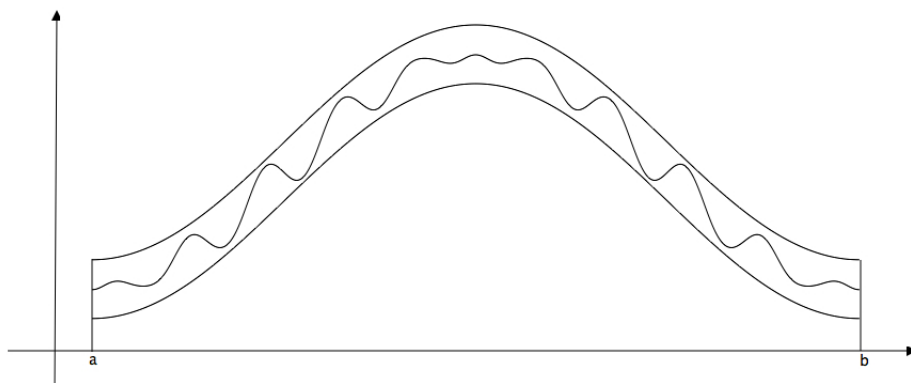
in simboli, ciò significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \quad \forall x \in A.$$

**Osservazioni 1.1.3 (1)** La differenza fra convergenza puntuale ed uniforme sta nel quantificatore “ $\forall x \in A$ ” che si sposta dall’inizio alla fine della frase. La conseguenza è che l’indice  $\nu$ , cioè la soglia oltre la quale la quantità  $|f_n(x) - f(x)|$  è piccola, va a dipendere solo da  $\varepsilon$ , e non da  $\varepsilon$  e  $x$ . La seconda definizione è dunque più restrittiva della prima: la convergenza uniforme implica la puntuale.

(2) Affinché le  $f_n$  convergano uniformemente a  $f$  in  $A$  occorre e basta che per ogni  $\varepsilon > 0$  i grafici delle  $f_n$  siano contenuti definitivamente nell' "intorno tubolare del grafico di  $f$  di raggio  $\varepsilon$ ", ossia nell'insieme

$$\{(x, y) : x \in A, |y - f(x)| < \varepsilon\}.$$



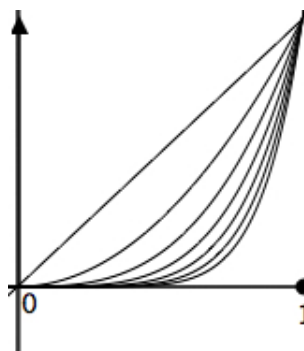
(3) La definizione 1.1.2 si applica anche a successioni di funzioni non limitate, come mostra il successivo esempio 1.1.4 (3).

**Esempi 1.1.4 (1)** Siano  $A = [0, 1]$  e  $f_n(x) = x^n$ . Si ha, fissato  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Quindi la successione  $\{f_n\}$  converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



Però la convergenza non è uniforme: fissato  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , è impossibile trovare  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che si abbia

$$x^n = |x^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \quad \forall x \in [0, 1[,$$

perché quando  $x \rightarrow 1^-$  ciò implicherebbe  $1 \leq \varepsilon$ . Si osservi, tuttavia, che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in ogni intervallo della forma  $[0, a]$  con  $a < 1$ , in quanto per un tale  $a$  risulta

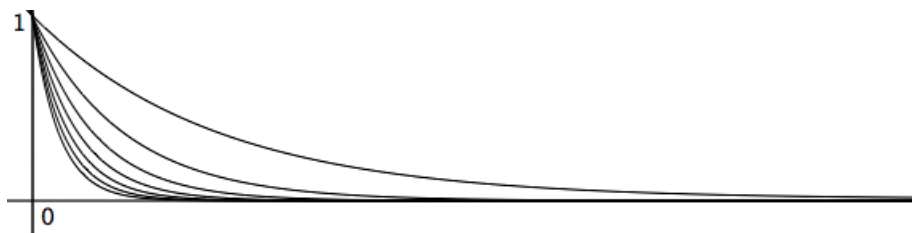
$$\sup_{x \in [0, a]} x^n = a^n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

(2) Siano  $A = [0, \infty[$  e  $f_n(x) = e^{-nx}$ . Allora le  $f_n$  convergono puntualmente in  $[0, \infty[$  alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme in  $[0, \infty[$  perché

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 0} e^{-nx} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$



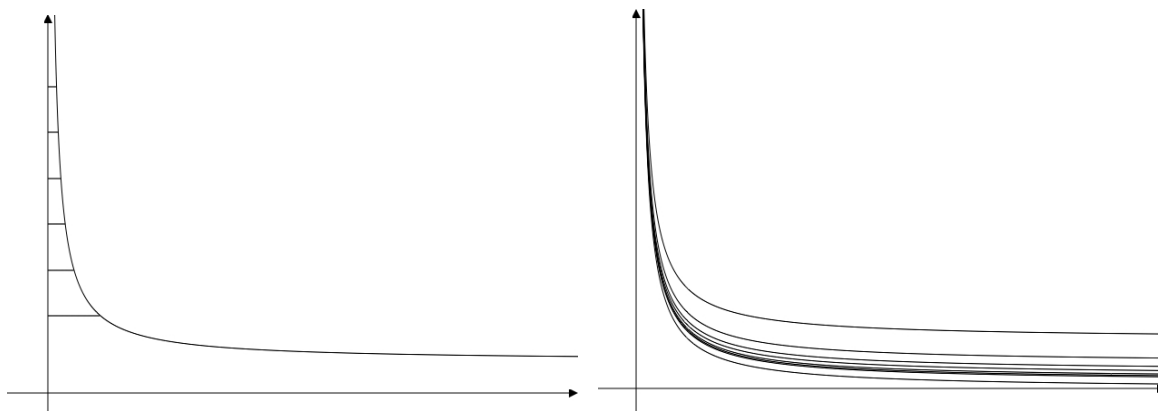
però è uniforme in ogni semiretta del tipo  $[a, \infty[$  con  $a > 0$ , essendo

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq a} e^{-nx} = e^{-na} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

(3) Sia  $A = ]0, \infty[$  e poniamo  $f_n(x) = \frac{1}{x} \wedge n = \min\{\frac{1}{x}, n\}$  e  $g_n(x) = \frac{n+x}{nx}$ . Entrambe queste successioni convergono puntualmente a  $f(x) = \frac{1}{x}$  (si noti che le  $g_n$  sono funzioni illimitate), però la convergenza è uniforme per le  $g_n$  e non lo è per le  $f_n$ . Infatti

$$\sup_{x > 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 < x < 1/n} \left( \frac{1}{x} - n \right) = +\infty,$$

$$\sup_{x > 0} |g_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 0} \left| \frac{1}{x} - \frac{n+x}{nx} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$



Gli esempi precedenti mostrano che la convergenza uniforme può realizzarsi o meno a seconda di come si sceglie l'insieme di definizione delle  $f_n$ . In genere, quindi, data una successione di funzioni definite in  $A$ , ci si chiederà *in quali* sottoinsiemi di  $A$  si ha convergenza uniforme. Il motivo di questo tipo di richieste sta nel fatto che, a differenza della convergenza puntuale, la convergenza uniforme preserva, come vedremo, diverse proprietà delle funzioni quali la continuità e l'integrabilità.

Accanto alle successioni di funzioni, è naturale considerare anche le serie di funzioni. Se  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni definite in un insieme  $A$  contenuto in  $\mathbb{R}$ , oppure in  $\mathbb{R}^m$ , oppure in  $\mathbb{C}^m$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  è la successione  $\{s_n\}$  delle *somme parziali*, ove

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x);$$

alle serie di funzioni si applicano quindi le nozioni di convergenza puntuale ed uniforme. Utilizzando le definizioni 1.1.1 e 1.1.2, avremo:

- la serie  $\sum f_n$  converge puntualmente in  $A$  se per ogni  $x \in A$  la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  è convergente, ossia

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu;$$

- la serie  $\sum f_n$  converge uniformemente in  $A$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \quad \forall x \in A.$$

Per le serie di funzioni si hanno però altri due tipi di convergenza:

- la serie  $\sum f_n$  converge assolutamente in  $A$  se per ogni  $x \in A$  la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  è assolutamente convergente, cioè se  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$  è convergente;
- la serie  $\sum f_n$  converge totalmente in  $A$  se la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$$

è convergente.

La proposizione che segue mette a confronto i quattro tipi di convergenza.

**Proposizione 1.1.5** Sia  $\sum f_n$  una serie di funzioni definite su un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$ , o di  $\mathbb{R}^m$ , o di  $\mathbb{C}^m$ . Allora:

- (i) la convergenza totale implica la convergenza uniforme e quest'ultima implica la convergenza puntuale;
- (ii) la convergenza totale implica la convergenza assoluta e quest'ultima implica la convergenza puntuale;
- (iii) non vi sono implicazioni tra convergenza uniforme e assoluta, né valgono le implicazioni contrarie a quelle sopra descritte.

**Dimostrazione** (i) Poiché  $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$  è una serie reale convergente, per il criterio di Cauchy si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=n+1}^p \sup_{x \in A} |f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall p > n \geq \nu,$$

da cui a maggior ragione

$$\sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^p f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^p \sup_{x \in A} |f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall p > n \geq \nu.$$

In particolare

$$\left| \sum_{k=n+1}^p f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall p > n \geq \nu, \quad \forall x \in A,$$

cioè la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  verifica per ogni  $x \in A$  il criterio di Cauchy in  $\mathbb{R}$  e dunque è convergente per ogni  $x \in A$ . Passando al limite per  $p \rightarrow \infty$ , si deduce che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall p > n \geq \nu, \quad \forall x \in A,$$

ossia si è provato che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

il che ci dà la convergenza uniforme. Dalla convergenza uniforme segue in modo ovvio la convergenza puntuale.

(ii) Se  $x \in A$ , l'ovvia disuguaglianza

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_k(x)| \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ci fornisce la prima implicazione. La seconda è banalmente vera per ogni serie numerica.

(iii) Tutte le false implicazioni saranno illustrate dal seguente esempio. Consideriamo la serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

la quale, come è noto, converge puntualmente in  $] - 1, 1]$  con somma  $\ln(1+x)$ . Inoltre la serie converge assolutamente in  $] - 1, 1[$ , mentre nei punti  $x = \pm 1$  la serie dei moduli si riduce alla serie armonica e quindi diverge. Vediamo in quali sottoinsiemi di  $] - 1, 1[$  c'è convergenza totale: in  $] - 1, 1[$  no, perché

$$\sup_{|x| < 1} \left| (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right| = \sup_{|x| < 1} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

cosicché la serie degli estremi superiori è divergente. Per lo stesso motivo, non vi può essere convergenza totale in nessun intervallo del tipo  $] - 1, a]$  o  $[-a, 1[$  con  $0 < a < 1$ . Invece per ogni fissato  $\delta \in ]0, 1[$  si ha

$$\sup_{|x| \leq 1-\delta} \left| (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right| = \sup_{|x| \leq 1-\delta} \frac{|x|^n}{n} = \frac{(1-\delta)^n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e dunque la serie degli estremi superiori è convergente: quindi si ha convergenza totale in ogni intervallo del tipo  $[-1 + \delta, 1 - \delta]$  con  $\delta \in ]0, 1[$ .

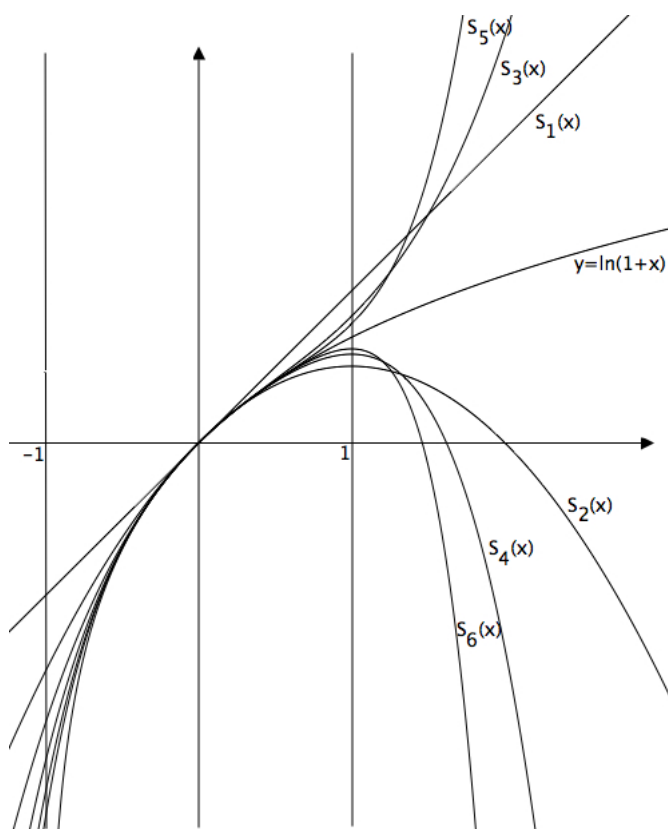


Vediamo infine dove c'è convergenza uniforme. Notiamo che per  $x \in [0, 1]$  la serie è a segni alterni, con termine generale infinitesimo e decrescente in modulo: quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge in  $[0, 1]$  e vale la stima del resto:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Quindi

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$



il che dimostra che vi è convergenza uniforme in  $[0, 1]$ . D'altra parte, siccome vi è convergenza totale in  $[-1 + \delta, 1 - \delta]$  per ogni  $\delta \in ]0, 1[$ , in tali intervalli vi è anche, a maggior ragione, convergenza uniforme. Di conseguenza (esercizio 1.1.1) vi è convergenza uniforme nell'unione, cioè in tutti gli intervalli della forma  $[-1 + \delta, 1]$  con  $0 < \delta < 1$ .

È facile riconoscere, esaminando questo esempio, che esso coinvolge tutte le false implicazioni citate nella proposizione, dato che i quattro tipi di convergenza hanno luogo in quattro insiemi a due a due distinti.  $\square$

Nel caso particolare di serie di potenze, valgono i seguenti risultati:

**Teorema 1.1.6** *Sia  $\sum a_n z^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r \in ]0, \infty]$ . Allora la serie converge totalmente ed uniformemente in ogni cerchio chiuso  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$  con  $\rho \in ]0, r[$ .*

**Dimostrazione** Per  $|z| \leq \rho$  si ha  $|a_n||z|^n \leq |a_n|\rho^n$  qualunque sia  $n \in \mathbb{N}$ , e quindi vi è convergenza totale nel cerchio  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$  in virtù della convergenza assoluta della serie nel punto  $z = \rho$ .  $\square$

**Teorema 1.1.7 (di Abel)** Sia  $\sum a_n z^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r \in ]0, \infty]$  e supponiamo che esista  $z_0 \in \mathbb{C}$ , con  $|z_0| = r$ , tale che la serie  $\sum a_n z_0^n$  sia convergente ad un numero  $A \in \mathbb{C}$ . Allora la serie  $\sum a_n z^n$  converge uniformemente nel segmento  $S_0 = \{tz_0 : t \in [0, 1]\}$ .

**Dimostrazione** Introducendo la variabile  $w = z/r$  e ponendo  $c_n = r^n a_n$ , la serie  $\sum c_n w^n$  ha raggio di convergenza 1 e, detto  $w_0 = z_0/r$ , si ha  $\sum c_n w_0^n = A$ . Dunque, sostituendo eventualmente  $c_0$  con  $c_0 - A$ , non è restrittivo supporre che  $A = 0$ . Dobbiamo mostrare che la serie  $\sum c_n w^n$  converge uniformemente nell'insieme  $S = \{tw_0 : t \in [0, 1]\}$ , e ciò implicherà la tesi.

Faremo uso di uno strumento fondamentale: l'*identità di Abel*, già dimostrata nel corso del primo anno, e che qui enunciamo:

**Proposizione 1.1.8** Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali o complessi. Fissati  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $q \leq p$  e posto  $B_N = \sum_{n=q}^N b_n$ , risulta

$$\sum_{n=p}^N a_n b_n = a_N B_N - a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \quad \forall N > p,$$

ove  $B_{p-1} = 0$  nel caso in cui  $q = p$ .  $\square$

Utilizziamo questa identità con  $p \in \mathbb{N}^+$ ,  $q = 0$ ,  $a_n = t^n$ ,  $b_n = c_n w_0^n$ : posto  $s_n = \sum_{k=0}^n c_k w_0^k$  si ottiene per ogni  $N > p$

$$\sum_{n=p}^N c_n t^n w_0^n = t^N s_N - t^p s_{p-1} + \sum_{n=p}^{N-1} (t^n - t^{n+1}) s_n = t^N s_N - t^p s_{p-1} + (1-t) \sum_{n=p}^{N-1} t^n s_n.$$

Ne segue, passando al limite per  $N \rightarrow \infty$  e tenendo conto che  $s_N \rightarrow 0$ ,

$$\sum_{n=p}^{\infty} c_n t^n w_0^n = -t^p s_{p-1} + (1-t) \sum_{n=p}^{\infty} t^n s_n \quad \forall p \in \mathbb{N}^+$$

(si noti che, essendo  $\{s_n\}$  infinitesima, la serie a secondo membro è certamente convergente, per confronto con la serie geometrica di ragione  $t$ ).

Sia ora  $\varepsilon > 0$ : scelto  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $|s_n| < \varepsilon$  per ogni  $n > \nu$ , per  $p > \nu$  si ha

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} c_n t^n w_0^n \right| \leq \varepsilon t^p + \varepsilon (1-t) \sum_{n=p}^{\infty} t^n \leq 2\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ciò prova che la serie  $t \mapsto \sum c_n t^n w_0^n$  converge uniformemente in  $[0, 1]$  e la tesi è provata.  $\square$

## Esercizi 1.1

1. Si provi che se una successione di funzioni converge uniformemente in  $A$  e in  $B$ , allora essa converge uniformemente in  $A \cup B$ .
2. Discutere il comportamento per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni di funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad f_n(x) = x \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(ii)} \quad f_n(x) = \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 \text{(iii)} \quad f_n(x) = \sqrt[n]{n + x^n}, \quad x \geq 0; & \text{(iv)} \quad f_n(x) = \frac{x + e^{(n+1)x}}{e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 \text{(v)} \quad f_n(x) = nx^2 e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(vi)} \quad f_n(x) = (x^2 - x)^n, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 \text{(vii)} \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(viii)} \quad f_n(x) = (nx)^{x/n}, \quad x > 0; \\
 \text{(ix)} \quad f_n(x) = \frac{1}{n} e^{(\cos nx - 1)/n}, \quad x \in \mathbb{R}. & \text{(x)} \quad f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{1 + e^{-nx}}, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

3. Discutere il comportamento delle seguenti serie di funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! x^n}, \quad x > 0; \\
 \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(iv)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^2 - 1)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 \text{(v)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(vi)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 \text{(vii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x \ln n}, \quad x > 0; & \text{(viii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^{n/2}}, \quad x > 0; \\
 \text{(ix)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right), \quad x > -1; & \text{(x)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n^2 + x^2}, \quad x > 0; \\
 \text{(xi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(n-x)/(n+x)}}{n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{(xii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{\sqrt{n}}, \quad x > 0.
 \end{array}$$

4. Discutere il comportamento per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni di funzioni definite per ricorrenza:

$$\begin{array}{l}
 \text{(i)} \quad \begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[1 + (f_n(x))^2], \end{cases} \quad x \in [0, 1]; \\
 \text{(ii)} \quad \begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2f_n(x)), \end{cases} \quad x \geq 0.
 \end{array}$$

5. Discutere il comportamento per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni di funzioni:

- (i)  $f_n(x) = e^{-ne^{-nx}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;      (ii)  $f_n(x) = x^{\sqrt{n}}e^{-x/n}$ ,  $x > 0$ ;  
 (iii)  $f_n(x) = n^{\sqrt{x}}e^{-n/x}$ ,  $x > 0$ ;      (iv)  $f_n(x) = x^n n^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 (v)  $f_n(x) = (n+x)^{-n-x}$ ,  $x > 0$ ;      (vi)  $f_n(x) = \int_0^{n\pi} e^{xt} \sin t \, dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 (vii)  $f_n(x) = \frac{nx e^{n^2 x}}{1+2n^3 x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;      (viii)  $f_n(x) = x^{n^2} e^{-nx}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

6. Si provi che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \cos nx}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \sin nx}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sono totalmente convergenti in  $\mathbb{R}$  e se ne calcolino le rispettive somme.

[**Traccia:** si faccia uso della relazione  $\cos t + i \sin t = e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .]

7. Si dimostri che per ogni  $x \in ]-1, 1[$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos(a + nb) = \frac{\cos a - x \cos(a - b)}{1 - 2x \cos b + x^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(a + nb) = \frac{\sin a - x \sin(a - b)}{1 - 2x \cos b + x^2}.$$

8. Sia  $\{f_n\}$  una successione convergente uniformemente ad una funzione  $f$  nell'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ . Si provi che se  $\{x_n\}$  è una successione di punti di  $A$ , convergente a un punto  $x \in A$ , e se  $f$  è continua nel punto  $x$ , allora  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$  per  $n \rightarrow \infty$ . È ancora vero questo risultato se le  $f_n$  convergono in  $A$  solo puntualmente, o se  $f$  non è continua nel punto?

9. Sia  $f$  una funzione continua nell'intervallo  $[a, b]$ ; posto  $r_n = (b - a) \wedge \frac{1}{n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ , poniamo

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{r_n} \int_x^{x+r_n} f(t) \, dt & \text{se } x \in [a, b[ \\ f(b) & \text{se } x = b. \end{cases}$$

Si provi che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$  per  $n \rightarrow \infty$ .

10. (*Teorema di Abel*) Sia  $f(z)$  la somma delle serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  nel cerchio  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ . Supponiamo che la serie converga in un punto  $z_0 = r e^{i\vartheta} \in \partial C$ , con somma  $S \in \mathbb{C}$ . Si provi che allora la serie converge uniformemente nel segmento di estremi 0 e  $z_0$ , e che risulta

$$\lim_{\rho \rightarrow r^-} f(\rho e^{i\vartheta}) = S.$$

## 1.2 Proprietà della convergenza uniforme

Come abbiamo preannunciato, la convergenza uniforme preserva diverse proprietà funzionali. La più importante di queste è certamente la continuità: questa proprietà non è stabile per la convergenza puntuale, come mostrano gli esempi 1.1.4 (1) e (2), ma lo è per la convergenza uniforme.

**Teorema 1.2.1** *Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue in un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$ , o di  $\mathbb{R}^m$ , o di  $\mathbb{C}^m$ . Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $A$ , allora  $f$  è continua in  $A$ .*

**Dimostrazione** Consideriamo un punto  $x_0 \in A$  e proviamo che  $f$  è continua in  $x_0$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ : per ipotesi, esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \quad \forall x \in A.$$

Per ogni  $x \in A$  possiamo scrivere

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f(x_0)|;$$

il primo ed il terzo addendo sono minori di  $\varepsilon$  qualunque sia  $x \in A$ , mentre il secondo, essendo  $f_\nu$  continua in  $A$ , sarà minore di  $\varepsilon$  per tutti gli  $x \in A$  che distano da  $x_0$  meno di un opportuno  $\delta$ , il quale dipende da  $\varepsilon$ , da  $\nu$  e da  $x_0$ . Ma poiché  $\nu$  è un indice fissato, dipendente solamente da  $\varepsilon$  e da  $x_0$ , anche  $\delta$  dipende soltanto da  $\varepsilon$  oltre che da  $x_0$ . Si conclude che

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon \quad \text{per } x \in A \text{ con } |x - x_0| < \delta,$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

Il teorema precedente si può enunciare in forma lievemente più generale.

**Teorema 1.2.2** *Sia  $x_0$  un punto d'accumulazione per un insieme  $A$  contenuto in  $\mathbb{R}$ , o  $\mathbb{R}^m$ , o  $\mathbb{C}^m$ , e sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni definite in  $A$ , che converge uniformemente in  $A$  ad una funzione  $f$ . Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = L_n,$$

*allora esistono anche i due limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

*e sono uguali.*

Il senso di questo enunciato è che, nelle ipotesi indicate, si può invertire l'ordine dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

**Dimostrazione** Proviamo anzitutto che  $\{L_n\}$  è convergente. Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \quad \forall x \in A.$$

Allora le successioni numeriche  $\{f_n(x)\}$ , al variare di  $x \in A$ , sono di Cauchy uniformemente rispetto a  $x$ , poiché per ogni  $n, m \geq \nu$  e per ogni  $x \in A$  si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon;$$

dunque per  $x \rightarrow x_0$  si ricava

$$|L_n - L_m| \leq 2\varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

La successione numerica  $\{L_n\}$  è dunque di Cauchy in  $\mathbb{R}$  e pertanto converge a un numero reale  $L$ . Dobbiamo provare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Fissiamo nuovamente  $\varepsilon > 0$  e scegliamo stavolta  $\nu \in \mathbb{N}$  in modo che risulti

$$|L_n - L| < \varepsilon, \quad \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Allora per ogni  $x \in A$  si ha

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - L_\nu| + |L_\nu - L| < 2\varepsilon + |f_\nu(x) - L_\nu|.$$

D'altra parte, poiché  $f_\nu(x) \rightarrow L_\nu$  per  $x \rightarrow x_0$ , esiste  $\delta > 0$  (dipendente da  $\nu, \varepsilon$  e  $x_0$ , dunque soltanto da  $\varepsilon$  e  $x_0$ ) tale che

$$x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f_\nu(x) - L_\nu| < \varepsilon;$$

ne segue

$$x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - L| < 3\varepsilon,$$

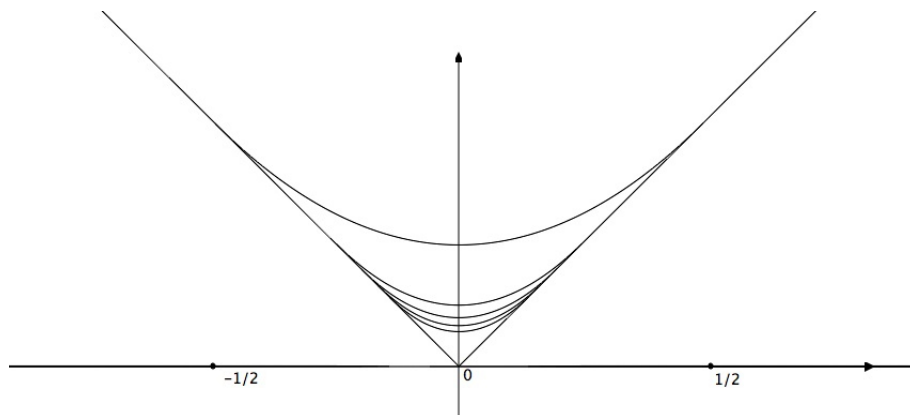
e la tesi è provata.  $\square$

La convergenza uniforme non preserva in generale la derivabilità delle funzioni, come mostra il seguente

**Esempio 1.2.3** La funzione  $f(x) = |x|$ , che non è derivabile nel punto  $x = 0$ , è il limite uniforme su  $\mathbb{R}$  delle funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

le quali sono derivabili in  $\mathbb{R}$  con derivate continue, come si verifica facilmente.



Vale tuttavia il seguente importante risultato:

**Teorema 1.2.4** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni derivabili in  $[a, b]$ , tali che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$  e  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente in  $[a, b]$ . Allora  $f$  è derivabile in  $[a, b]$  e risulta  $f' = g$ .

Ciò significa che nelle ipotesi del teorema si può scambiare la derivazione con il limite:

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $x_0 \in [a, b]$  e proviamo che  $f$  è derivabile nel punto  $x_0$ . Applicheremo il teorema 1.2.2 alle funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

entrambe definite in  $[a, b] \setminus \{x_0\}$ , insieme del quale, chiaramente,  $x_0$  è punto d'accumulazione. Verifichiamo le ipotesi del teorema 1.2.2: anzitutto si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) = f'_n(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\};$$

dobbiamo verificare che  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformemente in  $[a, b] \setminus \{x_0\}$ . In effetti, fissato  $\varepsilon > 0$  e scelto  $\nu \in \mathbb{N}$  in modo che sia

$$\sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

si ottiene

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| \leq |f'_n(x) - g(x)| + |g(x) - f'_m(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Ne segue, applicando il teorema del valor medio alla funzione  $f_n - f_m$  nell'intervallo di estremi  $x$  e  $x_0$ ,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}, \quad \forall n, m \geq \nu,$$

ove  $\xi$  è un punto fra  $x$  e  $x_0$ . Passando al limite per  $m \rightarrow \infty$  si trova

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}, \quad \forall n \geq \nu,$$

e dunque  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformemente. Notiamo che abbiamo già, per ipotesi, ciò che nel teorema 1.2.2 è parte della tesi, e cioè il fatto che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'_n(x_0) = g(x_0).$$

Dal suddetto teorema ricaviamo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = g(x_0),$$

e questo conclude la dimostrazione dato che, per definizione, tale limite è  $f'(x_0)$ .  $\square$

**Osservazione 1.2.5** Nella dimostrazione precedente abbiamo fatto uso della sola convergenza puntuale delle  $f_n$ , oltre che della convergenza uniforme delle  $f'_n$ . In effetti, il teorema vale anche sotto le seguenti ipotesi: (a) esiste  $\bar{x} \in [a, b]$  tale che  $f_n(\bar{x}) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ , (b)  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente in  $[a, b]$ . In effetti, in tali ipotesi si può provare facilmente che  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ , e che la convergenza è uniforme in  $[a, b]$ . Infatti, applicando il teorema di Lagrange a  $f_n - f_m$  e utilizzando (b) si deduce

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| + |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < 2\varepsilon \quad \forall m, n \geq \nu, \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui segue facilmente quanto affermato. Avendo stabilito questo fatto, ci si riconduce alla dimostrazione precedente. La convergenza uniforme delle  $f_n$  a  $f$  è dunque conseguenza delle altre ipotesi: supporre che essa sia verificata a priori non è dunque una restrizione, ma solo una semplificazione inessenziale.

L'integrabilità secondo Riemann su intervalli *limitati* è un'altra proprietà che viene preservata dalla convergenza uniforme.

**Teorema 1.2.6** *Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni integrabili secondo Riemann nell'intervallo  $[a, b]$ . Se le  $f_n$  convergono uniformemente in  $[a, b]$  ad una funzione  $f$ , allora  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  e si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Ciò significa che nelle ipotesi del teorema si può scambiare l'integrazione con l'operazione di limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Come vedremo, esistono teoremi di passaggio al limite ben più generali di questo, la dimostrazione dei quali richiede però la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

**Dimostrazione** Supponiamo di sapere già che  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ : allora il passaggio al limite sotto il segno di integrale si prova facilmente. Infatti, fissato  $\varepsilon > 0$  e scelto  $\nu \in \mathbb{N}$  in modo che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall n \geq \nu,$$

si ottiene

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a) \quad \forall n \geq \nu$$

e la formula è provata.

Resta dunque da verificare che  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ . Anzitutto notiamo che le  $f_n$ , essendo Riemann-integrabili, sono funzioni limitate in  $[a, b]$ ; pertanto anche  $f$  è limitata in  $[a, b]$ , in quanto

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x)| < \varepsilon + \|f_\nu\|_\infty \quad \forall x \in [a, b].$$



Per provare che  $f$  è Riemann-integrabile, proveremo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  di  $[a, b]$ , tale che la differenza fra la *somma superiore*

$$S(\pi, f) = \sum_{i=1}^k M_i(f)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{ove } M_i(f) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

e la *somma inferiore*

$$s(\pi, f) = \sum_{i=1}^k m_i(f)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{ove } m_i(f) = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

è minore di  $\varepsilon$ . Ora, fissato  $\varepsilon > 0$  e scelto  $\nu \in \mathbb{N}$  come in precedenza, dal momento che  $f_\nu$  è Riemann-integrabile esisterà una suddivisione  $\pi$  tale che

$$0 \leq S(\pi, f_\nu) - s(\pi, f_\nu) < \varepsilon.$$

Per valutare  $S(\pi, f) - s(\pi, f)$ , osserviamo che, per l'esercizio 1.2.1, risulta

$$M_i(f) - m_i(f) = \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_i(f) - m_i(f) &\leq \\ &\leq \sup\{|f(t) - f_\nu(t)| : t \in [x_{i-1}, x_i]\} + \sup\{|f_\nu(t) - f_\nu(s)| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\} + \\ &+ \sup\{|f_\nu(s) - f(s)| : s \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq 2\varepsilon + M_i(f_\nu) - m_i(f_\nu), \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} S(\pi, f) - s(\pi, f) &= \sum_{i=1}^k [M_i(f) - m_i(f)](x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq 2\varepsilon(b - a) + S(\pi, f_\nu) - s(\pi, f_\nu) < [2(b - a) + 1]\varepsilon, \end{aligned}$$

e questo prova che  $f$  è integrabile.  $\square$

**Osservazione 1.2.7** Analoghi risultati sulla continuità, derivabilità e integrabilità valgono per le somme di serie uniformemente convergenti (esercizio 1.2.2).

## Esercizi 1.2

1. Sia  $f$  una funzione reale limitata, definita sull'insieme  $A$ . Provare che

$$\sup_A f - \inf_A f = \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in A\}.$$

2. Enunciare e dimostrare i teoremi di continuità, derivabilità e integrabilità per le somme di serie uniformemente convergenti.

3. Si costruisca una successione di funzioni Riemann-integrabili che converga puntualmente in  $[a, b]$  ad una funzione  $f$  non Riemann-integrabile su  $[a, b]$ .

[**Traccia:** Sia  $\mathbb{Q} \cap [a, b] = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , e si prenda come  $f_n$  la funzione che vale 1 nei punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e vale 0 altrove.]

4. Sia  $x \in \mathbb{R}$ . Provare che la successione numerica  $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  ha limite se e solo se  $x$  è un multiplo intero di  $\pi$ , e che in tal caso il limite è 0.

[**Traccia:** utilizzare il fatto che i numeri della forma  $nx + k\pi$  sono densi in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $x/\pi$  è irrazionale.]

5. Discutere il comportamento delle seguenti serie di funzioni, calcolandone la somma nell'insieme di convergenza:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} nx e^{-nx^3}, & x \in \mathbb{R}; & \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n+1}, & x > 0; \\
 \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin^n x, & x \in \mathbb{R}; & \text{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n-i} z^{2n}, & z \in \mathbb{C}; \\
 \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n} e^{(2n-1)ix}, & x \in \mathbb{R}; & \text{(vi)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\operatorname{Re}z+1-z/2)}, & z \in \mathbb{C}; \\
 \text{(vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(x-x^2)^{n/2}}{(n-1)!}, & x \in [0, 1]; & \text{(viii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{2n+1}, & x \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

6. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\text{(i)} \int_0^1 t^n \ln(1+t^m) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(mk+n+1)} \quad \forall m, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{(ii)} \int_0^1 \ln x \ln(1+x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)^2};$$

$$\text{(iii)} \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2};$$

$$\text{(iv)} \int_0^1 \sin x \ln x dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k \cdot (2k)!}.$$

7. Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni Riemann-integrabili in  $[a, x]$  per ogni  $x \in [a, b]$  ed integrabili in senso improprio su  $[a, b]$ . Si provi che se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$ , allora  $f$  è integrabile in senso improprio su  $[a, b]$  e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

[**Traccia:** si applichi il teorema 1.2.2 alle funzioni  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ .]

### 1.3 Spazi con prodotto scalare

A partire da questo paragrafo introdurremo alcune nozioni astratte che generalizzano le situazioni e i concetti che abbiamo fin qui analizzato, come la struttura metrica e topologica di  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , la nozione di convergenza di una successione, ed altro ancora. Ricordiamo anzitutto la definizione di spazio vettoriale.

**Definizione 1.3.1** *Uno spazio vettoriale reale (o complesso) è un insieme  $X$  dotato della seguente struttura:*

(i) *è definita su  $X \times X$ , a valori in  $X$ , l'operazione di somma, per la quale:*

- *vale la proprietà associativa,*
- *vale la proprietà commutativa,*
- *esiste un (unico) elemento neutro  $\mathbf{0}$ , che verifica  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$  per ogni  $\mathbf{u} \in X$ ,*
- *ogni elemento  $\mathbf{u} \in X$  ha un (unico) opposto  $-\mathbf{u}$ , che verifica  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ;*

(ii) *è definita su  $\mathbb{R} \times X$  (o su  $\mathbb{C} \times X$ ), a valori in  $X$ , l'operazione di prodotto per scalari, per la quale valgono, per ogni  $\lambda, \mu$  reali (o complessi) e per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ , le relazioni:*

- $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$ ,
- $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,
- $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$ ,
- $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ .

Si verifica subito che dalle proprietà elencate nella definizione seguono queste altre:

$$0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in X.$$

Esempi banali di spazi vettoriali sono, oltre a  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , l'insieme di tutte le funzioni reali o complesse definite su un fissato insieme  $A$ , la famiglia delle funzioni limitate definite su un insieme  $A$ , l'insieme delle funzioni continue su un intervallo  $[a, b]$ , la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann su un certo intervallo  $I$ , eccetera.

Nel seguito considereremo spazi vettoriali dotati di ulteriori strutture; la prima, che costituisce la più diretta generalizzazione degli spazi euclidei, è la nozione di prodotto scalare.

**Definizione 1.3.2** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale reale o complesso. Un prodotto scalare su  $X$  è un'applicazione da  $X \times X$  in  $\mathbb{R}$  (oppure da  $X \times X$  in  $\mathbb{C}$ ), che denotiamo con*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X,$$

*dotata delle seguenti proprietà:*

(i)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_X \geq 0$  per ogni  $\mathbf{u} \in X$ , e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_X = 0$  se e solo se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;

(ii)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_X$  (oppure  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_X}$ ) per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ;

(iii)  $\langle \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle_X = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_X + \mu \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle_X$  per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \in X$  e per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (oppure per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ).

La coppia  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  si chiama spazio con prodotto scalare.

**Esempi 1.3.3 (1)** In  $\mathbb{R}^N$  è definito il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_N = \sum_{i=1}^N x^i y^i,$$

mentre in  $\mathbb{C}^N$  è definito il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_N = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}.$$

(2) Nello spazio vettoriale  $C[a, b]$ , costituito dalle funzioni continue definite su  $[a, b]$  a valori reali, è definito il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{C[a,b]} = \int_a^b f(t)g(t) dt;$$

se le funzioni sono a valori complessi, il prodotto scalare è

$$\langle f, g \rangle_{C[a,b]} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt.$$

(3) Consideriamo lo spazio vettoriale  $\ell^2$ , i cui elementi sono le successioni reali  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tali che la serie  $\sum |x_n|^2$  è convergente. In tale spazio è definito il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \quad \text{ove } \mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } \mathbf{y} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}};$$

tale serie è assolutamente convergente (e dunque il prodotto scalare è ben definito) in virtù della disuguaglianza

$$|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2).$$

Se le successioni sono complesse, il prodotto scalare è

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Negli spazi con prodotto scalare vale una importante disuguaglianza:

**Teorema 1.3.4 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)** *Se  $X$  è uno spazio con prodotto scalare, allora si ha*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_X| \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X^{1/2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_X^{1/2} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

**Dimostrazione** Supponiamo che  $X$  sia uno spazio vettoriale complesso: il caso reale seguirà a maggior ragione. Fissati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ , per  $\lambda \in \mathbb{C}$  consideriamo la quantità reale non negativa  $\langle (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}), (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) \rangle_X$ : utilizzando la definizione di prodotto scalare, si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}), (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) \rangle_X = \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X + \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X + \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_X + \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_X = \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X + \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X + \overline{\langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X} + |\lambda|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_X = \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X + 2\operatorname{Re} \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X + |\lambda|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_X. \end{aligned}$$

Ora, se  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X = 0$  la tesi del teorema è ovvia; se invece  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X \neq 0$ , cosicché  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , scegliendo  $\lambda = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X^{-1}$  si ottiene

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X^2}{|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_X|^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_X,$$

che con facili conti porta alla tesi.  $\square$

**Esempio 1.3.5** Nel caso di  $C[a, b]$ , la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz diventa

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

### Esercizi 1.3

1. Si provi che la famiglia  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , ove  $\mathbf{e}^n$  è la successione che vale 0 per ogni indice  $k \neq n$  e vale 1 per  $k = n$ , è costituita da successioni mutuamente *ortogonali* rispetto al prodotto scalare di  $\ell^2$ , ossia risulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{e}^n)_k (\mathbf{e}^m)_k = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m \neq n.$$

2. Si provi che la famiglia  $\mathcal{T} = \{\cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  è costituita da funzioni mutuamente ortogonali rispetto al prodotto scalare (reale) di  $C[-\pi, \pi]$ , ossia risulta

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{T} \text{ con } f \neq g.$$

3. Si provi che la famiglia  $\mathcal{E} = \{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è costituita da funzioni mutuamente ortogonali rispetto al prodotto scalare (complesso) di  $C[-\pi, \pi]$ , ossia risulta

$$\int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{E} \text{ con } f \neq g.$$

4. Si provi che l'applicazione  $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$  non è un prodotto scalare nello spazio vettoriale  $\mathcal{R}(a, b)$  delle funzioni reali che sono integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$ .

## 1.4 Spazi normati

Negli spazi con prodotto scalare si può parlare di vettori e di ortogonalità esattamente come nel caso di  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ . E, come nel caso di  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , si può introdurre la *norma* di un elemento  $\mathbf{x}$ , che ne misura la distanza dall'origine: essa si denota con  $\|\mathbf{x}\|$  ed è data da:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle},$$

definizione che ha senso in quanto  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  è un numero reale non negativo. Dalle proprietà del prodotto scalare segue subito che

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall \mathbf{x} \in X,$$

mentre la *subadditività* della norma

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$$

segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: infatti

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{x} + \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + \|\mathbf{x}'\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle| + \|\mathbf{x}'\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|)^2. \end{aligned}$$

Le proprietà della norma sopra scritte, identiche a quelle di cui godono il modulo in  $\mathbb{R}$  e in  $\mathbb{C}$  e la norma euclidea in  $\mathbb{R}^m$  e in  $\mathbb{C}^m$ , non sono legate alla struttura indotta dai prodotti scalari: in altre parole, vi sono esempi di funzioni  $\|\cdot\|$  da uno spazio vettoriale  $X$  a valori in  $[0, \infty[$  che sono dotate di tali proprietà, senza però essere indotte da alcun prodotto scalare (esercizio 1.4.7). Un esempio è la funzione

$$f \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad f \in C[a, b],$$

che è non negativa, nulla se e solo se  $f \equiv 0$ , e subadditiva. Questo ci suggerisce di introdurre astrattamente la nozione di norma, nel modo che segue.

**Definizione 1.4.1** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Una norma su  $X$  è una funzione  $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty[$ , tale che:*

- (i)  $\|\mathbf{x}\|_X \geq 0$ , e  $\|\mathbf{x}\|_X = 0$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- (ii)  $\|\lambda \mathbf{x}\|_X = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_X$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  e per ogni  $\mathbf{x} \in X$ ;
- (iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|_X \leq \|\mathbf{x}\|_X + \|\mathbf{x}'\|_X$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ .

Se su  $X$  è definita una norma, la coppia  $(X, \|\cdot\|_X)$  è detta spazio normato.

**Esempi 1.4.2 (1)** Tutti gli spazi con prodotto scalare, e in particolare  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , sono spazi normati con la norma  $\|\mathbf{x}\|_X = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ .

(2) Lo spazio vettoriale

$$\ell^1 = \left\{ \mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

è uno spazio normato con la norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

(3) Lo spazio vettoriale

$$\ell^\infty = \left\{ \mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

è uno spazio normato con la norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

(4) Per ogni  $p \in ]1, \infty[$  consideriamo l'insieme

$$\ell^p = \left\{ \mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} :$$

esso è uno spazio vettoriale in virtù della disuguaglianza (che deriva dalla convessità di  $t \mapsto t^p$ ,  $t \geq 0$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^{p-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right).$$

La quantità

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

verifica ovviamente le prime due proprietà della definizione 1.4.1; è possibile verificarne anche la subadditività, ma la cosa non è banale (esercizi 1.4.4 e 1.4.5). Quindi si tratta di una norma, che per  $p = 2$  è quella indotta dal prodotto scalare dell'esempio 1.3.3 (2).

(5) Sia  $K$  un sottoinsieme limitato e chiuso di  $\mathbb{R}^m$  o di  $\mathbb{C}^m$ . Lo spazio  $C(K)$  delle funzioni continue definite su  $A$  è, in virtù del teorema di Weierstrass, uno spazio normato con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)|;$$

tale quantità è una norma anche sullo spazio  $\mathcal{B}(K)$  delle funzioni limitate su  $K$  (ma in questo caso non serve affatto che  $K$  sia chiuso e limitato). Si noti che una successione  $\{f_n\}$  contenuta in  $C(K)$ , oppure in  $\mathcal{B}(K)$ , soddisfa  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  se e solo se essa

converge uniformemente a  $f$  in  $K$ .

Se  $A = [a, b]$ , altre norme sullo spazio  $C[a, b]$  sono

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

e quest'ultima è *hilbertiana*, ossia indotta dal prodotto scalare dell'esempio 1.3.3 (2).

Se  $p \in ]1, \infty[$ , la quantità

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

verifica ovviamente le prime due proprietà della definizione 1.4.1; la subadditività è anch'essa vera, ma la dimostrazione non è banale (esercizio 1.4.6). Ritroveremo queste norme, dette *norme  $L^p$* , nel capitolo 3.

(6) Se  $k \in \mathbb{N}$ , lo spazio  $C^k[a, b]$  è lo spazio delle funzioni che sono derivabili  $k$  volte in  $[a, b]$ , con  $f^{(k)}$  continua. Una norma su tale spazio è

$$\|f\|_{(k)} = \sum_{h=0}^k \|f^{(h)}\|_{\infty};$$

le verifiche sono facili. Naturalmente anche  $\|f\|_{\infty}$  è una norma su  $C^k[a, b]$ , ma è di minore utilità.

(7) Nello spazio  $\mathcal{R}(a, b)$  delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$  la quantità  $\|f\|_1$  precedentemente definita ha ancora ovviamente senso, ma non è una norma: infatti la seconda e la terza proprietà sono vere, ma se  $\|f\|_1 = 0$  non è detto che  $f$  sia identicamente nulla. Tuttavia, introducendo la più generale *misura di Lebesgue*, che allarga di molto la classe delle funzioni integrabili, ed identificando fra loro le funzioni che coincidono “quasi ovunque” (ossia al di fuori di un insieme di misura di Lebesgue nulla), è possibile costruire uno spazio di (classi di equivalenza di) funzioni, denominato  $L^1(a, b)$ , sul quale  $\|f\|_1$  è una norma. Infatti da  $\|f\|_1 = 0$  segue che  $f$  è quasi ovunque nulla, e quindi  $f$  appartiene alla classe di equivalenza di 0, ovvero  $f = 0$  come elemento di  $L^1(a, b)$ . Tutta questa problematica verrà ampiamente ripresa nel capitolo 3.

Concludiamo il paragrafo con una caratterizzazione delle norme che sono indotte da un prodotto scalare.

**Proposizione 1.4.3** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato. La norma di  $X$  è indotta da un prodotto scalare se e solo se essa verifica l'identità del parallelogrammo seguente:*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

In tal caso il prodotto scalare è dato da

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$$



se  $X$  è reale, e da

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} \left( (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) + i(\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2) \right)$$

se  $X$  è complesso.

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Se la norma è indotta da un prodotto scalare, allora per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \\ &= 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Supponiamo che valga l'identità del parallelogrammo e consideriamo il caso reale. Dobbiamo verificare che la quantità

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$$

verifica le proprietà delle definizione 1.3.2, e quindi è un prodotto scalare; una volta stabilito ciò, il fatto che esso induca la norma  $\|\cdot\|$  è evidente.

È chiaro che  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$  è non negativo ed è nullo se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Inoltre la simmetria è evidente. Resta da verificare la linearità rispetto alla prima variabile.

Anzitutto, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y} \in X$  risulta

$$\langle 2\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle 2\mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = 2\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle;$$

infatti possiamo scrivere, utilizzando l'identità del parallelogrammo,

$$\begin{aligned} \langle 2\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle 2\mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle &= \\ &= \frac{1}{4} (\|2\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|2\mathbf{x}' + \mathbf{y}\|^2 - \|2\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|2\mathbf{x}' - \mathbf{y}\|^2) = \\ &= \frac{1}{8} (\|2\mathbf{x} + 2\mathbf{x}' + 2\mathbf{y}\|^2 + \|2\mathbf{x} - 2\mathbf{x}'\|^2) - \frac{1}{8} (\|2\mathbf{x} + 2\mathbf{x}' - 2\mathbf{y}\|^2 + \|2\mathbf{x} - 2\mathbf{x}'\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\|\mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} + \mathbf{x}' - \mathbf{y}\|^2) = 2 \cdot \langle \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Scelto allora  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ , si ottiene

$$\langle 2\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Di qui, osservando che

$$2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = \langle 2\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle 2\mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = \langle 2(\mathbf{x} + \mathbf{x}'), \mathbf{y} \rangle = 2\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle,$$

si deduce immediatamente l'additività.

Adesso, utilizzando l'additività, un facile ragionamento per induzione mostra che

$$\langle n\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = n\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poi, tenuto conto che, per diretta conseguenza della definizione,

$$\langle -\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$$

possiamo scrivere più generalmente

$$\langle k\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

infine, notando che

$$\left\langle \frac{\mathbf{x}}{n}, \mathbf{y} \right\rangle = \frac{n}{n} \left\langle \frac{\mathbf{x}}{n}, \mathbf{y} \right\rangle = \frac{1}{n} \left\langle n \frac{\mathbf{x}}{n}, \mathbf{y} \right\rangle = \frac{1}{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

ricaviamo

$$\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}.$$

A questo punto non resta che utilizzare la continuità della norma (esercizio 1.4.1) per ottenere

$$\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

il che prova la linearità e conclude la dimostrazione nel caso reale.

Il caso complesso segue in modo facile da quello reale e quindi il calcolo viene omissso.  $\square$

## Esercizi 1.4

1. Sia  $X$  uno spazio normato. Una funzione  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *continua* in un punto  $x_0 \in X$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Si provi che vale la disuguaglianza

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$$

cosicché la norma è una funzione continua in ogni punto di  $X$ .

2. Dimostrare la *disuguaglianza di Young*: se  $p, q > 1$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , allora

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \geq 0.$$

[**Traccia:** si disegni nel rettangolo  $[0, a] \times [0, b]$  il grafico della funzione  $y = x^{p-1}$  e si osservi che tale relazione equivale a  $x = y^{q-1} \dots$ ]

3. Siano  $p, q \in ]1, \infty[$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Provare che se  $\mathbf{x} \in \ell^p$  e  $\mathbf{y} \in \ell^q$  allora la serie  $\sum x_n y_n$  è assolutamente convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^q.$$

4. Siano  $p, q \in ]1, \infty[$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Provare che se  $\mathbf{x} \in \ell^p$  e  $\mathbf{y} \in \ell^q$  allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^p} \|\mathbf{y}\|_{\ell^q}.$$

[**Traccia:** applicare l'esercizio precedente agli elementi  $\mathbf{u} \in \ell^p$ ,  $\mathbf{v} \in \ell^q$  definiti da  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\ell^p}}$  e  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_{\ell^q}}$ .]

5. Sia  $p \in ]1, \infty[$ . Provare che

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\ell^p} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{y}\|_{\ell^p} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^p,$$

cosicché  $\|\cdot\|_{\ell^p}$  è una norma nello spazio  $\ell^p$ .

[**Traccia:** poiché  $\{|x_n + y_n|^{p-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un elemento di  $\ell^q$ , ove  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , si può scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1};$$

si applichi ora ai due termini a secondo membro la disuguaglianza dell'esercizio precedente.]

6. Siano  $p, q > 1$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dimostrare la *disuguaglianza di Hölder*:

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall f, g \in C[a, b],$$

e dedurne, per  $p \in ]1, \infty[$ , la *disuguaglianza di Minkowski*:

$$\left( \int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

da cui segue che per ogni  $p \in [1, \infty[$  la quantità  $\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$  è una norma su  $C[a, b]$ .

[**Traccia:** scimmiettare gli esercizi 1.4.4 e 1.4.5, rimpiazzando nei ragionamenti la sommatoria con l'integrale.]

7. Si provi che la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  non è indotta da alcun prodotto scalare.

[**Traccia:** esibire due funzioni continue per la quali non vale l'identità del parallelogrammo.]

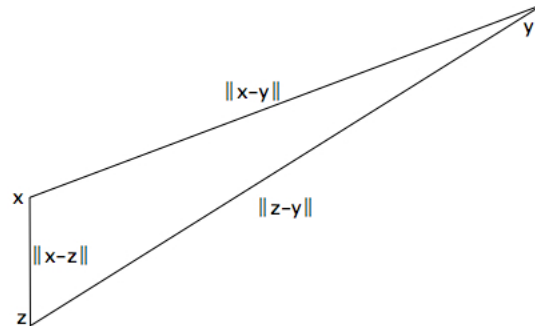
8. Si provi che la norma uniforme non è indotta da alcun prodotto scalare.

9. Sia  $p \in [1, \infty[$ . Si provi che la norma di  $\ell^p$  è indotta da un prodotto scalare se e solo se  $p = 2$ .

## 1.5 La nozione di spazio metrico

Gli spazi metrici sono gli ambienti più generali in cui si possa parlare di distanza fra due arbitrari punti  $x$  e  $y$ . Osserviamo che in uno spazio normato  $X$ , tale distanza è misurata dalla quantità  $\|x - y\|$ , lunghezza del segmento di estremi  $x$  e  $y$ , esattamente come accade in  $\mathbb{R}^m$  e in  $\mathbb{C}^m$ . Questa asserzione è suffragata dalle seguenti proprietà, conseguenza immediata della definizione di norma:

- $\|x - y\| \geq 0$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- $\|x - y\| = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- $\|x - y\| = \|y - x\|$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$  per ogni  $x, y, z \in X$ .



La terza proprietà si chiama *disuguaglianza triangolare* ed ha un'evidente interpretazione geometrica.

Queste proprietà sono il punto di partenza della nostra definizione astratta di distanza.

**Definizione 1.5.1** Sia  $X$  un insieme non vuoto. Una distanza, o metrica, su  $X$  è una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- (ii)  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z \in X$ .

Se su  $X$  è definita una distanza  $d$ , la coppia  $(X, d)$  si dice spazio metrico.

**Esempi 1.5.2 (1)** Tutti gli spazi normati sono spazi metrici con la distanza

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(2) Se  $X$  è un insieme qualunque (non vuoto), la funzione

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una distanza su  $X$ , che si chiama *metrica discreta*.

(3) Le funzioni

$$d_1(x, y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad d_2(x, y) = \left| \int_x^y e^{-t^2} dt \right|$$

sono distanze su  $\mathbb{R}$  e, a patto di porre  $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ , anche su  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

(4) Lo spazio vettoriale  $C^\infty[a, b]$  diventa uno spazio metrico con la distanza

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}.$$

L'unica verifica non banale riguarda la disuguaglianza triangolare: ma osservando preliminarmente che la funzione reale  $t \mapsto \frac{t}{1+t}$  è crescente e subadditiva in  $[0, \infty[$  (esercizio 1.5.3), la tesi segue dal fatto che  $\|\cdot\|_\infty$ , essendo essa stessa una norma su  $C^\infty[a, b]$ , verifica tale disuguaglianza.

Gli spazi metrici sono l'ambiente astratto giusto per generalizzare le nozioni, fin qui adoperate solamente in  $\mathbb{R}^m$  o  $\mathbb{C}^m$ , di palla, insieme aperto, convergenza di successioni, punto d'accumulazione, insieme chiuso, insieme limitato, insieme compatto, continuità. Negli esercizi 1.5.2, 1.5.5 e 1.6.1 si propone al lettore di "interpretare", in alcuni degli esempi concreti precedenti, la sfilza di definizioni astratte che segue.

**Definizione 1.5.3** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Se  $x_0 \in X$  e  $r > 0$ , la palla di centro  $x_0$  e raggio  $r$  è l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Quando  $X$  è uno spazio normato si ha  $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$  e inoltre  $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r)$ , ossia  $B(x_0, r)$  è il traslato di  $B(0, r)$  mediante la traslazione  $y \mapsto x_0 + y$ .

**Definizione 1.5.4** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Se  $x_0 \in X$ , un intorno di  $x_0$  è un insieme  $U \subseteq X$  contenente  $x_0$  e tale che esista  $r > 0$  per cui  $B(x_0, r) \subseteq U$ .

In particolare, ogni palla è intorno del suo centro ed anche di ciascun suo punto.

**Definizione 1.5.5** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  si dice aperto se per ogni  $x_0 \in A$  esiste  $r > 0$  tale che  $B(x_0, r) \subseteq A$ .

Dunque un insieme è aperto se e solo se esso è intorno di ogni suo punto; le palle  $B(x_0, r)$  sono quindi aperte.

**Definizione 1.5.6** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $\{x_n\}$  una successione contenuta in  $X$ . Diciamo che  $x_n$  converge ad un punto  $x \in X$ , o ha limite  $x$  (e scriviamo  $x_n \rightarrow x$ ) se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Se  $X$  è uno spazio normato, si ha  $x_n \rightarrow x$  se e solo se  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**Definizione 1.5.7** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Se  $x_0 \in X$  e  $A \subseteq X$ , diciamo che  $x_0$  è punto d'accumulazione per  $A$  se ogni intorno di  $x_0$  contiene almeno un punto di  $A$  diverso da  $x_0$ . In altre parole,  $x_0$  è punto d'accumulazione per  $A$  se e solo se esiste una successione  $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  che converge a  $x_0$ .

**Definizione 1.5.8** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un sottoinsieme  $B \subseteq X$  si dice chiuso se esso contiene tutti i suoi punti d'accumulazione. In altre parole,  $B$  è chiuso se e solo se, per ogni successione  $\{x_n\} \subseteq B$  che converge ad un limite  $x \in X$ , risulta  $x \in B$ .

Non è difficile provare (esercizio 1.5.6) la seguente

**Proposizione 1.5.9** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$ . Allora  $A$  è aperto se e solo se il suo complementare  $A^c$  è chiuso.  $\square$

Dato un sottoinsieme  $E$  di uno spazio metrico, esso non sarà in generale né aperto, né chiuso. Esistono però il *più piccolo* insieme chiuso contenente  $E$  ed il *più grande* insieme aperto contenuto in  $E$ , come risulta dalla seguente definizione.

**Definizione 1.5.10** Sia  $E$  un sottoinsieme di uno spazio metrico  $(X, d)$ . La chiusura di  $E$  è l'insieme  $\overline{E}$  costituito dall'intersezione di tutti i chiusi contenenti  $E$ ; la parte interna di  $E$  è l'insieme  $\overset{\circ}{E}$  costituito dall'unione di tutti gli aperti contenuti in  $E$ . La frontiera di  $E$  è l'insieme  $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$ .

Non è difficile verificare che  $\overset{\circ}{E}$  è l'insieme dei punti *interni* ad  $E$ , cioè quegli  $x \in E$  per i quali esiste una palla  $B(x, \delta) \subseteq E$ ; invece  $\overline{E}$  è l'insieme dei punti *aderenti* ad  $E$ , ossia quegli  $x \in X$  tali che ogni palla  $B(x, \delta)$  interseca  $E$ . Infine  $\partial E$  è l'insieme dei punti che sono aderenti sia ad  $E$ , sia al suo complementare  $E^c$ . Si noti che  $\overline{E}$  e  $\partial E$  sono chiusi, mentre  $\overset{\circ}{E}$  è aperto.

**Definizione 1.5.11** Un sottoinsieme  $A$  di uno spazio metrico  $X$  si dice limitato se esiste una palla  $B(x_0, R)$ , con  $x_0 \in X$ , che contiene  $A$ .

**Definizione 1.5.12** Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice continua nel punto  $x_0 \in X$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\eta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \eta \implies \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La funzione  $f$  si dice continua se è continua in ogni punto.

Osserviamo che la nozione di continuità fornita nell'esercizio 1.4.1 è un caso speciale della definizione 1.5.12.

Dimostriamo adesso due importanti teoremi di estensione di funzioni continue definite in spazi metrici.

**Teorema 1.5.13 (lemma di Urysohn)** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico; siano  $E, F$  due chiusi disgiunti contenuti in  $X$ . Allora esiste una funzione  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua, tale che

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in X, \quad \varphi|_E \equiv 0, \quad \varphi|_F \equiv 1.$$

**Dimostrazione** Osserviamo, preliminarmente, che in ogni spazio metrico due chiusi disgiunti hanno interni aperti le cui chiusure sono disgiunte (esercizio 1.5.9); ovvero, equivalentemente, dati un chiuso  $G$  ed un aperto  $H \supset G$ , esiste un aperto  $U$  tale che  $G \subset U \subset \overline{U} \subset H$ .

Ciò premesso, denotiamo con  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  l'insieme numerabile  $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  e supponiamo che  $r_0 = 0, r_1 = 1$ . Andiamo a costruire una famiglia di aperti  $\{V_r\}_{r \in S}$  contenuti in  $X$ , tali che

$$E \subset V_0, \quad V_1 = F^c, \quad \overline{V_r} \subset V_s \quad \forall r, s \in S \text{ con } r < s.$$

Proveremo queste relazioni mostrando per induzione che vale la proprietà  $P_n$  così definita:

$$P_n : \begin{cases} E \subset V_0, & V_1 = F^c, \\ \overline{V_{r_i}} \subset V_{r_j} & \forall r_i, r_j \in S_n = \{r_0, r_1, \dots, r_n\} \text{ con } r_i < r_j. \end{cases}$$

Sia  $n = 1$ : se scegliamo un aperto  $V_0 = V_{r_0}$  tale che  $E \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset F^c$ , e poniamo  $V_1 = V_{r_1} = F^c$ , la proprietà  $P_1$  è vera.

Supponiamo ora che  $P_n$  sia vera: consideriamo l'insieme  $S_{n+1} = S_n \cup \{r_{n+1}\}$ . Selezioniamo due indici  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  tali che

$$r_i = \max\{r_h \in S_n : r_h < r_{n+1}\}, \quad r_j = \min\{r_k \in S_n : r_k > r_{n+1}\} :$$

tali indici sono univocamente determinati. Scegliamo allora come  $V_{r_{n+1}}$  un aperto tale che

$$\overline{V_{r_i}} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V_{r_{n+1}}} \subset V_{r_j};$$

in questo modo  $P_{n+1}$  è vera. Per induzione, la  $P_n$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  e quindi la famiglia  $\{V_r\}_{r \in S}$  verifica la proprietà richiesta.

A questo punto definiamo la funzione  $\varphi$  nel modo seguente:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ \inf\{r \in S : x \in V_r\} & \text{se } x \notin F. \end{cases}$$

È facile verificare allora che  $\varphi|_E \equiv 0, \varphi|_F \equiv 1$  e che  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$  per ogni  $x \in X$ . Mostriamo che  $\varphi$  è continua.

Anzitutto osserviamo che

$$x \in \overline{V_r} \implies \varphi(x) \leq r;$$

infatti dall'ipotesi segue che  $x \in V_a$  per ogni  $a > r$ , da cui  $\varphi(x) \leq a$  per ogni  $a < r$  e di conseguenza  $\varphi(x) \leq r$ ; analogamente, risulta

$$x \notin \overline{V_r} \implies \varphi(x) \geq r;$$

infatti dall'ipotesi ricaviamo  $x \notin V_s$  per ogni  $s < r$ , da cui  $\varphi(x) \geq s$  per ogni  $s < r$  e dunque  $\varphi(x) \geq r$ .

Sia adesso  $x_0 \in X$  e proviamo che  $\varphi$  è continua in  $x_0$ . Supponiamo per cominciare  $\varphi(x_0) \in ]0, 1[$ , fissiamo un intorno  $]c, d[ \subset ]0, 1[$  di  $\varphi(x_0)$  e cerchiamo un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $\varphi(U) \subset ]c, d[$ . Scegliamo  $a, b \in S$  tali che  $c < a < \varphi(x_0) < b < d$ ; definito

$U = V_b \setminus \overline{V_a}$ , dalla relazione  $\varphi(x_0) < b$  segue  $x_0 \in V_b$ , mentre dalla relazione  $\varphi(x_0) > a$  segue  $x_0 \notin \overline{V_a}$ ; pertanto  $x_0 \in U$ . Ora, per  $x \in U$  si ha  $\varphi(x) \leq b$  in quanto  $x \in V_b \subset \overline{V_b}$ , e  $\varphi(x) \geq a$  in quanto  $x \notin V_a$ : ciò significa che  $\varphi(x) \in [a, b] \subset ]c, d[$ .

Se  $\varphi(x_0) = 0$  oppure  $\varphi(x_0) = 1$  si ripete quanto sopra detto utilizzando l'intervallo  $[0, d[$ , oppure  $]c, 1]$ , in luogo di  $]c, d[$ : nel primo caso si troverà l'intorno  $U$  della forma  $V_b$ , con  $0 < b < d$ ; nel secondo caso avremo  $U = X \setminus \overline{V_a}$ , con  $c < a < 1$ .  $\square$

**Teorema 1.5.14 (di Tietze)** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $E$  un chiuso di  $X$ . Se  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora esiste una funzione continua  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F|_E \equiv f$ .*

**Dimostrazione** Cominciamo con un lemma.

**Lemma 1.5.15** *Se  $E$  è un chiuso di  $(X, d)$  e  $g : E \rightarrow [-1, 1]$  è continua, allora esiste  $G : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  continua, tale che*

$$|g(x) - G(x)| \leq \frac{2}{3} \quad \forall x \in E.$$

**Dimostrazione** Gli insiemi  $g^{-1}([-1, -1/3])$  e  $g^{-1}([1/3, 1])$  sono chiusi disgiunti di  $X$ : dunque, per il lemma di Urysohn, esiste una funzione continua  $G_0 : X \rightarrow [0, 1]$  tale che  $G_0|_{g^{-1}([-1, -1/3])} \equiv 0$ ,  $G_0|_{g^{-1}([1/3, 1])} \equiv 1$ . Dunque la funzione  $G = \frac{2}{3}G_0 - \frac{1}{3}$  verifica  $G|_{g^{-1}([-1, -1/3])} \equiv -\frac{1}{3}$ ,  $G|_{g^{-1}([1/3, 1])} \equiv \frac{1}{3}$ . Ne segue che  $G : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ . Proviamo che vale la disuguaglianza cercata:

- se  $-1 \leq g(x) \leq -\frac{1}{3}$ , allora  $G_0(x) = 0$  e dunque  $|g(x) - G(x)| = |-g(x) - \frac{1}{3}| \leq \frac{2}{3}$ ;
- se  $-\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{3}$ , allora  $|g(x) - G(x)| \leq |g(x)| + |G(x)| \leq \frac{2}{3}$ ;
- se  $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$ , allora  $G_0(x) = 1$  e dunque  $|g(x) - G(x)| = -g(x) + 1 \leq \frac{2}{3}$ .

Ciò prova la tesi del lemma.  $\square$

Per provare il teorema di Tietze dividiamo l'argomentazione in tre passi.

**Passo 1:** mostriamo che ogni  $f : E \rightarrow [0, 1]$  continua ha una estensione  $F : E \rightarrow [-1, 1]$  continua.

Sia dunque  $f : E \rightarrow [0, 1]$  continua. Per il lemma 1.5.15 esiste  $g_0 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  continua, tale che  $|f - g_0| \leq \frac{2}{3}$  in  $E$ . Applicando nuovamente il lemma alla funzione  $\frac{3}{2}(f - g_0)$ , che è a valori in  $[-1, 1]$ , troviamo  $g_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  continua, tale che  $|\frac{3}{2}(f - g_0) - g_1| \leq \frac{2}{3}$  in  $E$ , ossia  $|f - g_0 - \frac{2}{3}g_1| \leq (\frac{2}{3})^2$ . Iterando questo procedimento, per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  esiste  $g_n : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  continua, tale che

$$\left| f - \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k g_k \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Posto allora

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k g_k,$$



la serie converge totalmente, essendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \|g_k\|_{\infty} \leq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1;$$

inoltre  $|F| \leq 1$ . Dunque  $F : X \rightarrow [-1, 1]$  è continua e se  $x \in E$  si ha

$$|f(x) - F(x)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \left(\frac{2}{3}\right)^k g_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} = 0.$$

**Passo 2:** mostriamo che ogni  $f : E \rightarrow ]-1, 1[$  continua ha una estensione  $F : E \rightarrow ]-1, 1[$  continua.

Sia  $f : E \rightarrow ]-1, 1[$  continua. Per il Passo 1, esiste  $F_0 : X \rightarrow [-1, 1]$  continua, tale che  $F_0|_E = f$ . Osserviamo che  $F_0^{-1}(\{-1, 1\})$  è un chiuso disgiunto da  $E$ , poiché  $|f| < 1$  in  $E$ . Per il lemma di Urysohn, esiste allora  $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ , continua, tale che  $\varphi|_{F_0^{-1}(\{-1, 1\})} \equiv 0$  e  $\varphi|_E \equiv 1$ . Ne segue che la funzione  $F = F_0 \cdot \varphi$  estende  $f$  a tutto  $X$  e verifica  $|F| < 1$  in  $X$ .

**Passo 3:** proviamo il caso generale.

Sia dunque  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Posto  $g(t) = \frac{2}{\pi} \arctan t$ , si ha  $g \circ f : E \rightarrow ]-1, 1[$ ; quindi per il Passo 2 esiste  $G : X \rightarrow ]-1, 1[$  tale che  $G|_E = g \circ f$ . Pertanto, definendo  $F(x) = g^{-1} \circ G(x)$ , si ha  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F|_E = f$ . Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Tietze.  $\square$

## Esercizi 1.5

1. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Si provi che

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z) \quad \forall x, y, z \in X.$$

2. Disegnare le palle  $B(0, r)$  negli spazi normati  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  e  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$ , ove

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_{\infty} = \max\{|x|, |y|\}.$$

3. Si consideri la funzione  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definita per  $t \geq 0$ . Si provi che  $f$  è strettamente crescente e strettamente subadditiva, ossia

$$f(t+s) < f(t) + f(s) \quad \forall t > s \geq 0.$$

4. Si provi che nello spazio  $C^{\infty}[a, b]$  la funzione

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\infty}}$$

è una distanza. Analogamente, detto  $S$  lo spazio vettoriale delle successioni  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a valori reali o complessi, si provi che la funzione

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \quad x, y \in S,$$

è una distanza su  $S$ .

5. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico con la metrica discreta (esempio 1.5.2(2)).
- (i) Provare che  $X$  è privo di punti d'accumulazione.
  - (ii) Descrivere le palle, gli aperti e i chiusi rispetto a questa distanza.
  - (iii) Provare che ogni funzione  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ , ove  $(Y, \delta)$  è un altro spazio metrico, è continua.
6. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Si provi che un sottoinsieme  $A$  di  $X$  è aperto se e solo se il suo complementare  $A^c$  è chiuso.
7. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Se  $E \subseteq X$ , si provi che

$$(\overline{E})^c = (\overset{\circ}{E}^c), \quad \left(\overset{\circ}{E}\right)^c = \overline{E^c}.$$

8. (*Distanza da un insieme*) Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $E \subseteq X$ . La *distanza da  $E$*  di un punto  $x \in X$  è il numero

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

Si verifichi che:

- (i)  $|d(x, E) - d(z, E)| \leq d(x, z)$  per ogni  $x, z \in X$ ;
  - (ii)  $d(x, E) = 0$  se e solo se  $x \in \overline{E}$ ;
  - (iii)  $d(x, E) = d(x, \overline{E})$ ;
  - (iv)  $d(x, E) > 0$  se e solo se  $x \in (\overline{E})^c$ .
9. Si provi che in uno spazio metrico due chiusi disgiunti hanno intorni aperti le cui chiusure sono disgiunte.
- [**Traccia:** Dati  $E$  e  $F$  chiusi disgiunti di  $X$ , si utilizzino le funzioni continue  $d(x, E)$  e  $d(x, F)$ ...]

## 1.6 Compattezza

Una nozione di fondamentale importanza nelle applicazioni è quella di insieme compatto, peraltro già incontrata nel corso di Analisi I. Per introdurla in maggiore generalità, ricordiamo alcuni fatti. Se  $X$  è uno spazio normato, un sottoinsieme  $A$  di  $X$  è *limitato* se esiste  $M > 0$  tale che  $\|x\| \leq M$  per ogni  $x \in A$ . Ricordiamo poi che, data una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenuta in un insieme arbitrario, una *sottosuccessione* di  $\{x_n\}$  si ottiene selezionando in  $\mathbb{N}$  una sottofamiglia infinita di indici  $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$  e considerando il corrispondente sottoinsieme  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definizione 1.6.1** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un sottoinsieme  $B \subseteq X$  si dice compatto per successioni, o sequenzialmente compatto, se da ogni successione contenuta in  $B$  è possibile estrarre una sottosuccessione che converge a un punto di  $B$ ; si dice invece che  $B$  è compatto se ogni ricoprimento aperto di  $B$  (vale a dire, ogni famiglia di aperti  $\{A_i\}_{i \in I}$  tale che  $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq B$ ) possiede un sottoricoprimento finito, cioè esiste una sottofamiglia finita  $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_N}\}$  la cui unione ricopre ancora  $B$ .*

A prima vista le nozioni di insieme compatto per successioni e di insieme compatto sembrano avere poco in comune; tuttavia, come vedremo, nel contesto degli spazi metrici esse sono equivalenti fra loro.

Osserviamo per cominciare che un insieme compatto, oppure compatto per successioni, è necessariamente limitato e chiuso (esercizio 1.6.2). Il viceversa è vero in  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , ma è falso in generale; per un esempio si rimanda agli esercizi 1.6.3 e 1.6.4.

Dimostriamo questo fondamentale risultato:

**Teorema 1.6.2** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $K \subseteq X$ . Allora  $K$  è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Sia  $K$  un compatto contenuto in  $X$ . Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione contenuta in  $K$ , e sia  $S$  l'insieme dei suoi valori: se  $S$  è finito, allora certamente esiste una sottosuccessione di  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che è costante, e dunque convergente. Quindi possiamo supporre che  $S$  sia infinito. Verifichiamo che esiste  $x \in K$  tale che ogni intorno di  $x$  contiene infiniti elementi di  $S$ : se infatti ciò non accadesse, per ogni  $y \in K$  esisterebbe un intorno aperto  $U_y$  di  $y$ , con  $U_y \cap S$  insieme finito. La famiglia  $\{U_y\}_{y \in K}$  sarebbe un ricoprimento aperto di  $K$ : per ipotesi, esisterebbe un sottoricoprimento finito  $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_m}\}$  di  $K$ . Ma la relazione  $S \subseteq \bigcup_{j=1}^m (S \cap U_{y_j})$  porterebbe all'assurdo, perché il primo membro sarebbe un insieme infinito e il secondo no.

Verifichiamo adesso che esiste una sottosuccessione di  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge al punto  $x \in K$  sopra costruito. Sia  $U_k = B(x, \frac{1}{k})$ : in ogni  $U_k$  cadono infiniti elementi di  $S$ . Scegliamo allora  $x_{n_1} \in S \cap U_1$ ,  $x_{n_2} \in S \cap U_2$  (con  $n_2 > n_1$ ), e iterando,  $x_{n_{k+1}} \in S \cap U_{k+1}$  (con  $n_{k+1} > n_k$ ). La successione  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una sottosuccessione di  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge a  $x$ . Ciò prova che  $K$  è compatto per successioni.

( $\impliedby$ ) Sia  $K \subseteq X$  un insieme compatto per successioni. Per provare la compattezza di  $K$  faremo uso di una definizione e di un lemma.

**Definizione 1.6.3** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, sia  $K$  un sottoinsieme di  $X$  e sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $K$ . Chiamiamo numero di Lebesgue del ricoprimento la quantità  $\varepsilon(\mathcal{U})$  definita da*

$$\varepsilon(\mathcal{U}) = \sup\{\delta \geq 0 : \forall x \in K \exists i \in I : \overline{B(x, \delta)} \subseteq U_i\}.$$

Osserviamo che si ha  $\varepsilon(\mathcal{U}) > 0$  se esiste  $\delta > 0$  tale che ogni palla  $B(x, \delta)$  con  $x \in K$  è contenuta in qualche  $U_i$ . Si noti che  $\varepsilon(\mathcal{U}) \geq 0$  per ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{U}$  di  $K$  e per ogni  $K \subseteq X$ ; sarà importante, naturalmente, sapere quali sottoinsiemi  $K$  hanno ricoprimenti aperti con  $\varepsilon(\mathcal{U}) > 0$ .

**Lemma 1.6.4** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $K$  un sottoinsieme di  $X$ . Se  $K$  è compatto per successioni, allora ogni ricoprimento aperto di  $K$  ha numero di Lebesgue strettamente positivo.*

**Dimostrazione** Sia  $\{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $K$ . Poniamo, per ogni  $x \in K$ ,

$$\varepsilon(x) = \sup\{\delta > 0 : \exists i \in I : \overline{B(x, \delta)} \subseteq U_i\},$$

ed osserviamo che si ha  $\varepsilon(x) > 0$  per ogni  $x \in K$ . Sia ora  $\varepsilon = \inf_{x \in K} \varepsilon(x)$ : per provare la tesi è sufficiente dimostrare che  $\varepsilon > 0$ .

Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(x_n) = \varepsilon$ . Dato che  $K$  è compatto per successioni, possiamo estrarre una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow x^* \in K$  per  $k \rightarrow \infty$ . Dunque, esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$d(x_{n_k}, x^*) < \frac{1}{4}\varepsilon(x^*) \quad \forall k \geq N,$$

cosicché risulta  $B(x_{n_k}, \frac{1}{4}\varepsilon(x^*)) \subseteq B(x^*, \frac{1}{2}\varepsilon(x^*))$  per ogni  $k \geq N$ . Ma, valendo l'inclusione  $B(x^*, \frac{1}{2}\varepsilon(x^*)) \subseteq U_i$  per qualche  $i \in I$ , si ha  $B(x_{n_k}, \frac{1}{4}\varepsilon(x^*)) \subseteq U_i$  per ogni  $k \geq N$  e dunque  $\frac{1}{4}\varepsilon(x^*) \leq \varepsilon(x_{n_k})$  per ogni  $k \geq N$ . Quando  $k \rightarrow \infty$  si ottiene allora  $0 < \frac{1}{4}\varepsilon(x^*) \leq \varepsilon$ , che è la tesi.  $\square$

Torniamo alla seconda parte delle dimostrazione del teorema 1.6.2. Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $K$ : per il lemma 1.6.4, il numero di Lebesgue di  $\mathcal{U}$  è positivo. Supponiamo per assurdo che  $\mathcal{U}$  non abbia sottoricoprimenti finiti. Allora, se  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\mathcal{U})$ , anche il ricoprimento aperto  $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in K}$  non ha alcun sottoricoprimento finito. Dunque, fissato  $x_1 \in K$ , esisterà  $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon)$ . Iterando, per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  esisterà  $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$ . In questo modo si costruisce una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  tale che  $d(x_n, x_m) > \varepsilon$  per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $n > m$ . Ma allora  $\{x_n\}$  non può ammettere alcuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi che  $K$  sia compatto per successioni.  $\square$

## Esercizi 1.6

1. Si provi che  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , con una qualunque delle distanze  $d_1$  e  $d_2$  dell'esempio 1.5.2 (3), è uno spazio metrico compatto.
2. Si provi che tutti i sottoinsiemi compatti, oppure compatti per successioni, di uno spazio metrico sono limitati e chiusi.
3. Si consideri la successione  $\{\mathbf{e}^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell^\infty$ , ove l'elemento  $\mathbf{e}^k \in \ell^\infty$  è la successione

$$(\mathbf{e}^k)_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ 1 & \text{se } n = k. \end{cases}$$

Provare che risulta

$$\|\mathbf{e}^k\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{e}^k - \mathbf{e}^h\|_\infty = 1 \quad \forall h, k \in \mathbb{N} \text{ con } h \neq k,$$

e che quindi l'insieme  $A = \{\mathbf{e}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è limitato e privo di punti d'accumulazione, dunque chiuso. Si provi poi che  $A$  non è compatto per successioni.

4. Si provi che la successione  $\{\mathbf{e}^k\}$  definita nell'esercizio precedente forma un sottoinsieme limitato e chiuso in  $\ell^1$ , ma non compatto per successioni in  $\ell^1$ .
5. (*Teorema di Weierstrass*) Sia  $K$  un sottoinsieme compatto dello spazio metrico  $(X, d)$ . Si provi che se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora  $f$  ha massimo e minimo su  $K$ .

6. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto. Si provi che  $X$  è *separabile*, ossia esiste un sottoinsieme numerabile  $B$  che è *denso* in  $X$ : ciò significa che  $\overline{B} = X$ , o, in altre parole, per ogni  $x \in X$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $z \in B$  tale che  $d(z, x) < \varepsilon$ .  
 [Traccia: per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ , esiste un ricoprimento finito di  $X$  costituito da palle di raggio  $1/k$ ; sia  $C_k$  l'insieme finito costituito dai centri di tali palle. Si verifichi che l'insieme  $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$  è numerabile e denso in  $X$ .]
7. Si provi che in uno spazio metrico separabile esiste una *base* di aperti numerabile: ciò significa che esiste una famiglia numerabile  $\mathcal{B}$  di aperti tale che ogni aperto di  $X$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .
8. (*Teorema di Lindelöff*) Si provi che se uno spazio metrico  $X$  ha una base numerabile di aperti, allora per ogni famiglia  $\{A_i\}_{i \in I}$  di aperti di  $X$  esiste una sottofamiglia numerabile  $\{A_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i_n}.$$

[Traccia: sia  $\mathcal{B}$  una base numerabile di aperti e sia  $\mathcal{B}^0 = \{B_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sottofamiglia degli elementi di  $\mathcal{B}$  che sono contenuti in qualcuno degli  $A_i$ . Per ogni  $B_n^0 \in \mathcal{B}^0$  sia  $i_n \in I$  un indice tale che  $A_{i_n}$  contenga  $B_n^0$ . Se ne deduca che  $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i_n} \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^0$ . Si verifichi d'altra parte che per ogni  $i \in I$  e per ogni  $x \in A_i$  esiste  $B_n^0 \in \mathcal{B}^0$  tale che  $x \in B_n^0$ , e che di conseguenza  $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^0$ . Si concluda che  $\{A_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è la sottofamiglia cercata.]

9. Un sottoinsieme  $K$  di uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice *totalmente limitato* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme finito  $\{y_1, \dots, y_{m_\varepsilon}\} \subseteq K$  tale che  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)$ . Si provi che ogni insieme totalmente limitato è limitato, e che il viceversa è falso in generale, ma vero in  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ .  
 [Traccia: la prima implicazione è facile; per la seconda si consideri la palla unitaria chiusa di  $\ell^2$  e si osservi che le successioni  $\mathbf{e}^n = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots\}$ , ove 1 compare al posto  $n$ -simo, sono elementi di tale palla con  $\|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^m\|_{\ell^2} = \sqrt{2}$  per  $n \neq m$ .]
10. Si provi che ogni sottoinsieme compatto di uno spazio metrico è totalmente limitato. È vero il viceversa?

## 1.7 Completezza

La completezza è una fondamentale proprietà di cui godono gli spazi metrici più importanti. Prima di introdurla, conviene fornire un'altra definizione.

**Definizione 1.7.1** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $\{x_n\}$  una successione contenuta in  $X$ . Diciamo che  $\{x_n\}$  è una successione di Cauchy se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Si vede facilmente che in uno spazio metrico ogni successione convergente è necessariamente una successione di Cauchy. Sia infatti  $\{x_n\} \subseteq X$  tale che  $x_n \rightarrow x \in X$  per  $n \rightarrow \infty$ : allora, fissato  $\varepsilon > 0$ , per definizione di limite esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $d(x_n, x) < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ . Dunque dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Non è vero però, in generale, il viceversa, cioè il fatto che le successioni di Cauchy siano convergenti: se consideriamo ad esempio lo spazio normato  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ , la successione  $\{(1 + 1/n)^n\}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{Q}$ , ma non è convergente in tale spazio, visto che il suo limite in  $\mathbb{R}$  è il numero irrazionale  $e$ .

La proprietà che le successioni di Cauchy siano convergenti, non sempre verificata ma valida in  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$ , è talmente ricca di conseguenze utili e importanti da meritare una definizione astratta a sé stante.

**Definizione 1.7.2** *Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice completo se ogni successione di Cauchy in  $X$  è convergente ad un elemento di  $X$ . Uno spazio normato completo si dice spazio di Banach; se, in più, la norma è indotta da un prodotto scalare, esso si dice spazio di Hilbert.*

**Esempi 1.7.3 (1)** Gli spazi euclidei  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{C}^m$  sono spazi metrici completi e dunque spazi di Hilbert, il primo reale e il secondo complesso.

**(2)** Nell'esercizio 1.7.5 si prova la completezza di tutti gli spazi normati  $\ell^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , che dunque sono spazi di Banach con le rispettive norme;  $\ell^2$  è anche uno spazio di Hilbert (esercizio 1.4.9).

L'importante famiglia degli spazi metrici compatti costituisce una particolare classe di spazi metrici completi. Vale infatti la seguente

**Proposizione 1.7.4** *Uno spazio metrico  $(X, d)$  è compatto se e solo se esso è completo e totalmente limitato.*

Ricordiamo che la nozione di insieme totalmente limitato è stata introdotta nell'esercizio 1.6.9.

**Dimostrazione** Supponiamo che  $X$  sia compatto. Proviamo che  $X$  è totalmente limitato: fissato  $\varepsilon > 0$ , consideriamo il ricoprimento aperto  $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ . Dato che  $X$  è compatto, tale ricoprimento deve avere un sottoricoprimento finito; ciò prova che  $X$  è totalmente limitato. Proviamo che  $X$  è completo: se  $\{x_n\} \subseteq X$  è una successione di Cauchy, ricordando il teorema 1.6.2 si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento  $x \in X$ ; la condizione di Cauchy implica allora che l'intera successione converge a  $x$ , e dunque  $X$  è completo.

Sia, viceversa,  $X$  completo e totalmente limitato e proviamo che  $X$  è compatto per successioni: dal teorema 1.6.2 seguirà la tesi. Fissiamo una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ : dobbiamo provare che essa ha una sottosuccessione convergente. Possiamo supporre che essa assuma un insieme infinito di valori distinti, altrimenti la tesi è ovvia. Per totale limitatezza, per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$  possiamo ricoprire  $X$  con l'unione di un certo numero  $m_k$  di palle

$B(y_1^{(k)}, 1/k), \dots, B(y_{m_k}^{(k)}, 1/k)$ . Scelto  $k = 1$ , fra le palle  $B(y_j^{(1)}, 1)$  ce n'è almeno una, che denoteremo con  $B(y_{j_1}^{(1)}, 1)$ , la quale conterrà infiniti punti della successione  $\{x_n\}$ : in altre parole, esiste un sottoinsieme infinito  $S_1 \subseteq \mathbb{N}$  tale che  $\{x_n\}_{n \in S_1} \subseteq B(y_{j_1}^{(1)}, 1)$ . Scelto  $k = 2$ , fra le palle  $B(y_j^{(2)}, 1/2)$  almeno una, che denoteremo con  $B(y_{j_2}^{(2)}, 1/2)$ , conterrà una intera sottosuccessione  $\{x_n\}_{n \in S_2}$  con  $S_2 \subseteq S_1$ . Iterando questo ragionamento, si costruisce una sequenza infinita di sottosuccessioni  $\{x_n\}_{n \in S_k} \subseteq \{x_n\}_{n \in S_{k-1}}$ , in modo che, per ciascun  $k \in \mathbb{N}^+$ , risulti  $\{x_n\}_{n \in S_k} \subseteq B(y_{j_k}^{(k)}, 1/k)$ .

Adesso indichiamo con  $r_k$  il  $k$ -simo elemento dell'insieme  $S_k$  (che è ordinato secondo l'ordinamento naturale di  $\mathbb{N}$ ); ponendo  $S = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots\}$ , si ha  $S \subseteq \mathbb{N}$  ed inoltre, per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ , al più i primi  $k - 1$  termini di  $S$ , da  $r_1$  a  $r_{k-1}$ , non appartengono a  $S_k$ . Di conseguenza, la sottosuccessione "diagonale"  $\{x_n\}_{n \in S}$  è una sottosuccessione della successione iniziale  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e soddisfa, per ogni  $m, n \in S$  con  $m > n$ ,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, y_{j_n}^{(n)}) + d(y_{j_n}^{(n)}, x_n) < \frac{2}{n},$$

da cui segue che  $\{x_n\}_{n \in S}$  è una successione di Cauchy in  $X$ . Per completezza, essa converge ad un elemento  $x \in X$ , e ciò prova che  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ha una sottosuccessione convergente. Pertanto  $X$  è compatto.  $\square$

Alcuni fra i più importanti spazi normati sono completi, cioè sono spazi di Banach. Andiamo a verificare la completezza degli spazi funzionali  $C[a, b]$ ,  $\mathcal{R}(a, b)$ ,  $C^k[a, b]$ .

**Teorema 1.7.5** *Lo spazio normato  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  è completo, cioè è uno spazio di Banach.*

**Dimostrazione** Utilizzeremo il fatto che la convergenza rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$  non è altro che la convergenza uniforme in  $[a, b]$ .

Sia  $\{f_n\}$  una successione di Cauchy rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ : ciò significa che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$\sup_{[a, b]} |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

In particolare, per ogni  $x \in [a, b]$  la successione numerica  $\{f_n(x)\}$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ , e pertanto, essendo  $\mathbb{R}$  uno spazio normato completo, converge ad un numero reale che chiamiamo  $f(x)$ , visto che dipende dal punto  $x$  che abbiamo scelto in  $[a, b]$ . Resta così definita una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ : dalla relazione

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu$$

segue, passando al limite per  $m \rightarrow \infty$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \forall n \geq \nu,$$

e quindi

$$\sup_{[a, b]} |f_n - f| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Ciò prova che  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , ossia  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$ . Dal fatto che  $\{f_n\} \subset C[a, b]$  e dal teorema 1.2.1 si conclude che  $f \in C[a, b]$  e pertanto abbiamo mostrato che la successione  $\{f_n\}$  converge in  $C[a, b]$ .  $\square$

Osserviamo che lo spazio  $C[a, b]$ , munito di altre norme come ad esempio  $\|\cdot\|_1$  oppure  $\|\cdot\|_2$ , non è completo (esercizio 1.7.4).

**Teorema 1.7.6** *Lo spazio normato  $(\mathcal{R}(a, b), \|\cdot\|_\infty)$  è completo, cioè è uno spazio di Banach.*

**Dimostrazione** Sia  $\{f_n\}$  una successione di Cauchy in  $\mathcal{R}(a, b)$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ : esattamente come nella dimostrazione del teorema 1.7.5, si ottiene l'esistenza di una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a, b]$ . Dal teorema 1.2.6 segue che  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ ; pertanto la successione  $\{f_n\}$  converge in  $\mathcal{R}(a, b)$ .  $\square$

Proviamo infine la completezza degli spazi  $C^k[a, b]$ , con norma  $\|f\|_{(k)} = \sum_{h=0}^k \|f^{(h)}\|_\infty$ , cominciando dal caso  $k = 1$ .

**Teorema 1.7.7** *Lo spazio normato  $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{(1)})$  è completo, cioè è uno spazio di Banach.*

**Dimostrazione** Sia  $\{f_n\}$  una successione di Cauchy rispetto alla norma  $\|\cdot\|_{(1)}$ : ciò significa che le successioni  $\{f_n\}$  e  $\{f'_n\}$  sono entrambe di Cauchy in  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ . Per la completezza di tale spazio (teorema 1.7.5), esse convergono uniformemente in  $[a, b]$  a due funzioni  $f, g \in C[a, b]$ . Per il teorema 1.2.4, si deduce che  $f$  è derivabile e che  $f' = g$ ; dato che  $g$  è continua, si ottiene che  $f \in C^1[a, b]$  e che  $f_n \rightarrow f$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_{(1)}$ . La tesi è provata.  $\square$

Osserviamo che lo spazio  $C^1[a, b]$  è normato anche rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ , però con questa norma tale spazio non è completo: infatti la successione  $\{f_n\}$  descritta nell'esempio 1.2.3 è di Cauchy in  $(C^1[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ , ma non converge ad un elemento di  $C^1[-1, 1]$  (in effetti, essa converge uniformemente ad una funzione che sta fuori dallo spazio  $C^1[-1, 1]$ ).

Ragionando per induzione su  $k$ , è facile adesso dedurre il caso generale:

**Teorema 1.7.8** *Lo spazio normato  $(C^k[a, b], \|\cdot\|_{(k)})$  è completo, cioè è uno spazio di Banach.*

**Dimostrazione** Se  $k = 1$ , la tesi segue dal teorema 1.7.7. Supponiamo che lo spazio  $(C^{k-1}[a, b], \|\cdot\|_{(k-1)})$  sia completo, e dimostriamo che anche  $(C^k[a, b], \|\cdot\|_{(k)})$  lo è. Sia  $\{f_n\} \subset C^k[a, b]$  una successione di Cauchy: ciò significa che  $\{f_n\}$  è di Cauchy in  $(C^{k-1}[a, b], \|\cdot\|_{(k-1)})$  e che  $\{f_n^{(k)}\}$  è di Cauchy in  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ . Per ipotesi induttiva e per il teorema 1.7.5, si ha per  $n \rightarrow \infty$

$$f_n \rightarrow f \text{ in } C^{k-1}[a, b], \quad f_n^{(k)} \rightarrow g \text{ in } C[a, b].$$

In particolare,  $f$  è di classe  $C^{k-1}$  in  $[a, b]$ . Posto  $g_n = f_n^{(k-1)}$ , si ha allora  $\{g_n\} \subset C^1[a, b]$ , e

$$g_n \rightarrow f^{(k-1)} \text{ in } C[a, b], \quad g'_n \rightarrow g \text{ in } C[a, b];$$



per la completezza di  $C^1[a, b]$ , deduciamo  $f^{(k)} = (f^{(k-1)})' = g \in C[a, b]$ . Dunque  $f \in C^k[a, b]$  e  $f_n \rightarrow f$  in  $C^k[a, b]$ .  $\square$

È spesso molto importante poter approssimare funzioni di una certa classe con funzioni più regolari: è utile dunque avere teoremi che assicurino la densità di certi spazi in altri. Un esempio fondamentale di questa problematica è fornito dal seguente

**Teorema 1.7.9** *Lo spazio vettoriale  $\mathcal{P}$  dei polinomi è denso nello spazio di Banach  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ .*

**Dimostrazione** Dobbiamo provare che, data  $f \in C[a, b]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $P(x)$  tale che

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Non è restrittivo supporre che  $[a, b] = [0, 1]$ : infatti, supponendo di aver provato la tesi in questo caso, se  $f \in C[a, b]$  la funzione

$$F(t) = f(a + t(b - a)), \quad t \in [0, 1]$$

appartiene a  $C[0, 1]$ ; quindi, detto  $Q(t)$  un polinomio tale che  $\max_{t \in [0, 1]} |F(t) - Q(t)| < \varepsilon$ , il polinomio

$$P(x) = Q\left(\frac{x - a}{b - a}\right), \quad x \in [a, b]$$

verifica  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$ .

Sia dunque  $f \in C[0, 1]$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  definiamo l' $n$ -esimo *polinomio di Bernstein* di  $f$ :

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad t \in [0, 1].$$

Si noti che  $B_n$  ha grado non superiore a  $n$ , che  $B_n(0) = f(0)$  e  $B_n(1) = f(1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ , e che

$$B_1(t) = (1-t)f(0) + tf(1), \quad B_2(t) = (1-t)^2f(0) + 2t(1-t)f\left(\frac{1}{2}\right) + t^2f(1), \quad \dots$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , essendo  $f$  uniformemente continua esiste  $\delta > 0$  tale che

$$t, s \in [0, 1], \quad |t - s| < \delta \quad \implies \quad |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciò premesso, valutiamo la differenza  $|B_n(t) - f(t)|$  in  $[0, 1]$ . Ricordando che, per la formula del binomio,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1$ , si ha

$$\begin{aligned} |B_n(t) - f(t)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right| < \delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| + \\ &+ \left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right| \geq \delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

La prima sommatoria  $S_1$ , utilizzando l'uniforme continuità, si maggiora così:

$$S_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right| < \delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

La seconda sommatoria  $S_2$  invece si stima come segue:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right| \geq \delta} \frac{(k-nt)^2}{\delta^2 n^2} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{k=0}^n \frac{k^2 - 2knt + n^2 t^2}{\delta^2 n^2} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \end{aligned}$$

Adesso osserviamo che se  $n \geq 2$ , derivando rispetto a  $t$  l'identità

$$(t+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k y^{n-k}, \quad t, y \in \mathbb{R},$$

si trova

$$n(t+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} t^{k-1} y^{n-k}, \quad t, y \in \mathbb{R},$$

$$n(n-1)(t+y)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} t^{k-2} y^{n-k}, \quad t, y \in \mathbb{R};$$

ne segue, posto  $y = 1-t$  e moltiplicando rispettivamente per  $t$  e per  $t^2$ ,

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ed anche, per somma,

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nella stima per  $S_2$  si ottiene, se  $n \geq 2$ ,

$$S_2 \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2} [n(n-1)t^2 + nt - 2nt(nt) + n^2 t^2] = \frac{2nt(1-t)\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2}.$$

In definitiva

$$|B_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2t(1-t)\|f\|_\infty}{\delta^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall n \geq 2.$$

Dunque esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $\|B_n - f\|_\infty < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ . Ciò prova la tesi.  $\square$

Come ovvia conseguenza del teorema precedente si ha:

**Corollario 1.7.10** *Lo spazio vettoriale  $C^\infty[a, b]$  è denso nello spazio di Banach  $C[a, b]$ , dotato della norma uniforme.  $\square$*

Passiamo adesso ad un importante risultato di compattezza, relativo allo spazio  $C(X)$ , costituito dalle funzioni continue, definite su di uno spazio metrico compatto  $X$ . Tale spazio è normato con la norma

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C(X),$$

la quale è finita in virtù della compattezza di  $X$ ; inoltre  $C(X)$  è uno spazio di Banach, con dimostrazione del tutto analoga a quella del teorema 1.7.5.

**Teorema 1.7.11 (di Ascoli-Arzelà)** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni reali definite su  $X$ . Se:*

(i)  $\mathcal{F}$  è equicontinua, cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

(ii)  $\mathcal{F}$  è equilimitata, ossia esiste  $M \geq 0$  tale che

$$|f(x)| \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

allora da ogni successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  si può estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Dimostrazione** Ripeteremo l'argomento utilizzato nella dimostrazione della proposizione 1.7.4. Poiché  $X$  è separabile (esercizio 1.6.6), esiste un insieme numerabile  $E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denso in  $X$ . Poniamo  $S_0 = \mathbb{N}$ ; poiché, per (ii), l'insieme  $\{f_n(x_0)\}_{n \in S_0}$  è limitato in  $\mathbb{R}$ , esiste  $S_1 \subseteq S_0$  tale che la sottosuccessione  $\{f_n(x_0)\}_{n \in S_1}$  è convergente. Per induzione, costruito  $S_k \subseteq S_{k-1}$  tale che  $\{f_n(x_j)\}_{n \in S_k}$  è convergente per ogni

$j = 0, 1, \dots, k-1$ , poiché l'insieme  $\{f_n(x_k)\}_{n \in S_k}$  è limitato in  $\mathbb{R}$  esiste  $S_{k+1} \subseteq S_k$  tale che la sottosuccessione  $\{f_n(x_k)\}_{n \in S_{k+1}}$  è convergente (al pari delle sottosuccessioni  $\{f_n(x_j)\}_{n \in S_{k+1}}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ ). Resta così definita un'infinita sequenza di sottosuccessioni, ognuna inclusa nella precedente, delle quali la  $k+1$ -sima è tale che  $\{f_n(x_j)\}_{n \in S_{k+1}}$  converge in  $\mathbb{R}$  per ogni  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Adesso, posto  $S = \{r_0, r_1, \dots, r_k, \dots\}$ , ove  $r_k$  è il  $k$ -simo elemento dell'insieme  $S_k$ , si ha  $S \subseteq \mathbb{N}$  ed inoltre, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , al più i primi  $k$  termini di  $S$ , da  $r_0$  a  $r_{k-1}$ , non appartengono a  $S_k$ . Di conseguenza, la sottosuccessione “diagonale”  $\{f_n\}_{n \in S}$  è tale che  $\{f_n(x_k)\}_{n \in S}$  converge in  $\mathbb{R}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , ovvero

$$\exists \lim_{n \in S, n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

Adesso proveremo che  $\{f_n(x)\}_{n \in S}$  converge uniformemente in  $X$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , e consideriamo il numero  $\delta > 0$  per cui vale (i). Per la compattezza di  $X$ , il ricoprimento costituito dalle palle  $B(x, \delta)$ ,  $x \in X$ , ha un sottoricoprimento finito  $B(y_1, \delta), \dots, B(y_N, \delta)$ ; dato che  $E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è denso in  $X$ , in ciascuna palla  $B(y_i, \delta)$  cadrà un punto  $x_{k_i} \in E$ . Quindi, in virtù di (i) avremo, per  $i = 1, \dots, N$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|f_n(x_{k_i}) - f_n(x)| \leq |f_n(x_{k_i}) - f_n(y_i)| + |f_n(y_i) - f_n(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in B(y_i, \delta),$$

e di conseguenza, ricordando che  $\{f_n(x_{k_i})\}_{n \in S}$  è convergente, esiste  $\nu_i \in \mathbb{N}$  tale che per  $n, m \geq \nu_i$  e per  $x \in B(y_i, \delta)$  risulti

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_{k_i})| + |f_n(x_{k_i}) - f_m(x_{k_i})| + |f_m(x_{k_i}) - f_m(x)| < 5\varepsilon.$$

Per qualunque  $x \in X$ , scelto  $i$  in modo che  $x \in B(y_i, \delta)$ , otteniamo allora

$$|f_n(x) - f_m(x)| < 5\varepsilon \quad \forall n, m \in S \text{ con } n, m \geq \max\{\nu_1, \dots, \nu_N\}.$$

Ciò prova che  $\{f_n\}_{n \in S}$  è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme in  $X$ . Poiché  $C(X)$  è completo, la tesi è provata.  $\square$

**Osservazione 1.7.12** Se lo spazio  $X$  non è compatto, ma è unione numerabile di sottoinsiemi compatti, a parità delle altre ipotesi si può concludere, con dimostrazione analoga, che ogni successione contenuta in  $\mathcal{F}$  ha una sottosuccessione che converge uniformemente in ogni compatto  $K \subset X$ .

Vediamo adesso alcune proprietà delle funzioni continue definite su spazi metrici, che sono legate alla compattezza.

**Proposizione 1.7.13** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e poniamo*

$$\rho(x) = d(x, X \setminus \{x\}) \quad \forall x \in X.$$

*Allora valgono i seguenti fatti:*

(i)  $X$  è compatto se e solo se ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata;

- (ii) ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua se e solo se ogni successione  $\{x_n\} \subseteq X$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n) = 0$  ha una sottosuccessione convergente in  $X$ ;
- (iii)  $X$  è compatto se e solo se ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua ed inoltre gli insiemi  $\{x \in X : \rho(x) > \varepsilon\}$  hanno cardinalità finita per ogni  $\varepsilon > 0$ ;
- (iv) esiste  $X$  non compatto, tale che ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua.

Osserviamo esplicitamente che la quantità  $\rho(x)$  sopra definita è identicamente nulla quando lo spazio  $X$  è privo di punti isolati: in caso contrario, essa è strettamente positiva in tali punti.

**Dimostrazione (i)** ( $\implies$ ) Sia  $X$  compatto. Fissiamo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua ed  $\varepsilon > 0$ . Per continuità, per ogni  $x \in X$  esiste  $\delta_x > 0$  tale che  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  per  $|x - y| < \delta_x$ . Estraiamo dal ricoprimento  $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in X}$  un sottoricoprimento finito  $\{B(x_i, \delta_{x_i})\}_{1 \leq i \leq N}$ ; allora per ogni  $x \in X$ , scelto  $i$  tale che  $x \in B(x_i, \delta_{x_i})$ , si ha

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leq \varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i)|.$$

(i) ( $\impliedby$ ) Se  $X$  non fosse compatto, esisterebbe una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenuta propriamente in  $X$ , priva di sottosuccessioni convergenti. Quindi  $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  sarebbe un insieme chiuso, essendo costituito di punti isolati. Ponendo  $f(x_n) = n$  per ogni  $n$ ,  $f$  sarebbe continua e non limitata su  $E$ ; mediante il teorema di Tietze (teorema 1.5.14) potremmo estendere  $f$  ad una funzione continua  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ , la quale non sarebbe limitata, contro l'ipotesi.

(ii) ( $\implies$ ) Supponiamo che tutte le funzioni  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue siano uniformemente continue, e sia  $\{x_n\} \subseteq X$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n) = 0$ . Allora per ogni  $n$  possiamo scegliere  $y_n \neq x_n$  tale che  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ . Se, per assurdo,  $\{x_n\}$  non avesse sottosuccessioni convergenti, neanche la successione  $\{y_n\}$  potrebbe averne. Quindi, gli insiemi  $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $F = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  sarebbero chiusi disgiunti di  $X$ . Per il lemma di Urysohn (teorema 1.5.13) potremmo trovare una funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x_n) = 1$  e  $f(y_n) = 0$  per ogni  $n$ : dunque  $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$  mentre  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ , e questo è assurdo, in quanto per ipotesi  $f$  deve essere uniformemente continua.

(ii) ( $\impliedby$ ) Sia  $A$  l'insieme dei punti che sono d'accumulazione per  $X$ : per definizione di  $\rho$ , si ha  $A = \{x \in X : \rho(x) = 0\}$ . L'insieme  $A$  è compatto: infatti se  $\{x_n\} \subseteq A$ , allora  $\rho(x_n) = 0$  e quindi, per ipotesi, esiste una sottosuccessione convergente ad un punto  $\bar{x} \in X$ , il quale necessariamente appartiene ad  $A$ . Ora, se  $X = A$  allora  $X$  è compatto e la tesi segue seguendo esattamente la dimostrazione del teorema di Heine-Cantor. Se invece  $X \supset A$ , esiste  $x_0 \in X \setminus A$ : fissiamo allora  $0 < \delta_1 < d(x_0, A)$  e poniamo

$$\delta_2 = \inf\{\rho(x) : d(x, A) \geq \delta_1\} :$$

ovviamente  $\delta_2 \leq \rho(x_0) < \infty$ ; proviamo che  $\delta_2 > 0$ . Se fosse  $\delta_2 = 0$ , esisterebbe  $\{x_n\} \subseteq X$  tale che  $\rho(x_n) \rightarrow 0$  e  $d(x_n, A) \geq \delta_1$ ; ma questa successione non potrebbe avere alcuna

sottosuccessione convergente (perché il suo limite, per definizione, dovrebbe stare in  $A$ ), contro l'ipotesi.

Ciò premesso, sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $\varepsilon > 0$ . Per continuità, per ogni  $x \in A$  esiste  $\delta_x > 0$  tale che  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  per  $|x - y| < \delta_x$ . Poiché  $A$  è compatto, esistono  $x_1, \dots, x_N \in A$  tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta_{x_i}/3).$$

Scelto  $\delta_1 = \frac{1}{3} \min_{1 \leq i \leq N} \delta_{x_i}$ , e fissato  $\delta_2$  come sopra, se  $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  si ottiene per  $d(x, y) < \delta$ :

- se  $d(x, A) \geq \delta_1$ , allora  $\rho(x) \geq \delta_2$ , ed essendo  $d(x, y) < \delta < \delta_2$  si deduce  $y = x$  e pertanto  $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ ;
- se  $d(x, A) < \delta_1$ , allora esiste  $a \in A$  con  $d(x, a) < \delta_1$ : quindi esiste  $x_k$  per il quale  $d(x, x_k) < \frac{1}{3}\delta_{x_k}$ , da cui

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ciò prova che  $f$  è uniformemente continua.

**(iii)** ( $\implies$ ) Per la prima proprietà basta ripetere la dimostrazione del teorema di Heine-Cantor. Per la seconda proprietà, osserviamo anzitutto che se  $X$  è un insieme finito, allora ovviamente tale proprietà è vera; se invece  $X$  è infinito, per compattezza, fissato  $\varepsilon > 0$ , possiamo estrarre dalla famiglia di palle  $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$  un sottoricoprimento finito  $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{1 \leq i \leq N}$ : poiché, fra queste palle, almeno una,  $B(x_j, \varepsilon)$ , contiene infiniti elementi di  $X$ , deduciamo che per ogni  $x \in X$ , salvo al più un numero finito di punti isolati, risulterà  $\rho(x) \leq d(x, x_j) < \varepsilon$ , e quindi l'insieme  $\{x \in X : \rho(x) > \varepsilon\}$  ha al più  $N - 1$  elementi.

**(iii)** ( $\impliedby$ ) Supponiamo che ogni funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sia uniformemente continua ed inoltre che gli insiemi  $\{x \in X : \rho(x) > \varepsilon\}$  abbiano cardinalità finita per ogni  $\varepsilon > 0$ . Sia  $\{x_n\}$  una successione contenuta in  $X$ . Per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$ , l'insieme  $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n) > \frac{1}{m}\}$  è finito; quindi induttivamente, per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  esiste  $\nu_m \in \mathbb{N}^+$ , con  $\nu_m > \nu_{m-1}$ , tale che  $\rho(x_{\nu_m}) \leq \frac{1}{m}$ . Quindi per la sottosuccessione  $\{x_{\nu_m}\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  si ha  $\rho(x_{\nu_m}) \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow \infty$ . Dall'ipotesi e da (ii) segue allora che  $\{x_{\nu_m}\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  è convergente in  $X$ . Quindi  $X$  è compatto.

**(iv)** Consideriamo  $X = [0, 1] \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2\}$ , munito della metrica indotta dal valore assoluto di  $\mathbb{R}$ : lo spazio  $X$  non è compatto, essendo illimitato; però se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, essa è anche uniformemente continua (dato  $\varepsilon > 0$ , il  $\delta$  dell'uniforme continuità di  $f|_{[0,1]}$  va bene su tutto  $X$ ).  $\square$

## Serie di vettori

Negli spazi normati è possibile considerare *serie* di vettori: data una successione  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  di elementi di uno spazio normato  $X$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k$  è la successione  $\{\sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k\}_{n \in \mathbb{N}}$

delle sue somme parziali. Una serie è *convergente* in  $X$  al vettore  $\mathbf{x}$  se e solo se la successione  $\{\sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{x}$  nelle norma di  $X$ . Una serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k$  *converge totalmente* in  $X$  se la serie numerica  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\|$  è convergente.

Tramite le serie di vettori è possibile enunciare un criterio generale di completezza per gli spazi normati; una versione più generale di questo criterio, valida negli spazi metrici, è esposta nell'esercizio 1.7.6.

**Teorema 1.7.14** *Sia  $X$  uno spazio normato. Allora  $X$  è uno spazio di Banach se e solo se per ogni successione  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ , per la quale risulti  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ , esiste  $\mathbf{y} \in X$  tale che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_n$  converge a  $\mathbf{y}$  in  $X$ , nel senso che*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^N \mathbf{x}_n - \mathbf{y} \right\| = 0.$$

In tal caso, si ha

$$\|\mathbf{y}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\|.$$

Da questo teorema segue, in particolare, che negli spazi di Banach le serie totalmente convergenti sono convergenti; naturalmente il viceversa è falso già nel caso di  $\mathbb{R}$ .

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ . Allora la successione delle somme parziali  $\left\{ \sum_{n=0}^N \mathbf{x}_n \right\}_{N \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy in  $X$ , dato che, per la disuguaglianza triangolare,

$$\left\| \sum_{n=M+1}^N \mathbf{x}_n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|\mathbf{x}_n\| \quad \forall N, M \in \mathbb{N} \text{ con } N > M;$$

poiché  $X$  è completo, la successione  $\left\{ \sum_{n=0}^N \mathbf{x}_n \right\}_{N \in \mathbb{N}}$  convergerà ad un opportuno  $\mathbf{y} \in X$ , e ciò prova la tesi.

( $\impliedby$ ) Sia  $\{\mathbf{y}_n\}$  una successione di Cauchy in  $X$ : allora per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $n_k \in \mathbb{N}$  (e non è restrittivo supporre  $n_{k+1} > n_k$ ) tale che

$$\|\mathbf{y}_m - \mathbf{y}_{n_k}\| < 2^{-k} \quad \forall m \geq n_k.$$

Poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_{n_0} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{y}_{n_{k+1}} - \mathbf{y}_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

allora  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ , e per ogni  $m \in \mathbb{N}$  si ha  $\sum_{k=0}^m \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_{n_m}$  e

$$\sum_{k=0}^m \|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{y}_{n_0}\| + \sum_{k=1}^m \|\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_{k-1}}\| \leq \|\mathbf{y}_{n_0}\| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+1} < \infty.$$

Quindi, per ipotesi, esiste  $\mathbf{y} \in X$  tale che

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_{n_m} \rightarrow \mathbf{y} \quad \text{in } X;$$

ma dato che  $\{\mathbf{y}_n\}$  è di Cauchy, l'intera successione  $\{\mathbf{y}_n\}$  converge a  $\mathbf{y}$ . Dunque  $X$  è completo. Inoltre, per la continuità della norma,

$$\|\mathbf{y}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^m \mathbf{x}_k \right\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \|\mathbf{x}_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\|. \quad \square$$

**Esempio 1.7.15** Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathcal{M}_{m,n}$  delle matrici  $m \times n$  a coefficienti complessi. Una norma su questo spazio è ad esempio la seguente:

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_{m,n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Questa norma è hilbertiana, visto che proviene dal prodotto scalare

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\mathcal{M}_{m,n}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}},$$

e con essa lo spazio  $\mathcal{M}_{m,n}$  è evidentemente isomorfo a  $\mathbb{C}^{mn}$  ed è quindi uno spazio di Hilbert. Si noti che, in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  vale la relazione

$$|\mathbf{Ax}|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x^j \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \sum_{j=1}^m |x^j|^2} = \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_{m,n}} |\mathbf{x}|_n,$$

dalla quale discende la continuità dell'applicazione lineare  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ .

Nel caso speciale in cui  $m = n$ , lo spazio delle matrici quadrate  $n \times n$ , che denoteremo con  $\mathcal{M}_n$ , è un'algebra rispetto al prodotto riga per colonna, cioè (ovviamente) si ha  $\mathbf{AB} \in \mathcal{M}_n$  per ogni  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ ; in questo caso la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{m,n}}$  sopra definita è anche "submoltiplicativa" rispetto a tale prodotto: infatti

$$\begin{aligned} \|\mathbf{AB}\|_{\mathcal{M}_n} &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{h=1}^n |b_{hj}|^2 \right)} = \\ &= \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2} \sqrt{\sum_{h,j=1}^n |b_{hj}|^2} = \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathcal{M}_n}. \end{aligned}$$

In particolare, è possibile considerare in  $\mathcal{M}_n$  *polinomi di matrici*, ossia matrici della forma

$$\mathbf{p}(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^N a_k \mathbf{A}^k,$$

le quali si ottengono sostituendo nel polinomio  $p(\lambda) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k$  la matrice  $\mathbf{A}$  al posto della variabile complessa  $\lambda$ . Naturalmente,  $\mathbf{A}^k$  è il prodotto riga per colonna di  $\mathbf{A}$  per



se stessa  $k$  volte, e in particolare  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ , ove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità. È chiaro che ogni polinomio  $p$  induce un'applicazione, che indichiamo con la stessa lettera in grassetto, da  $\mathcal{M}_n$  in sé, data appunto da  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{A})$ . Si verifica facilmente che se  $p$  e  $q$  sono polinomi, e se  $S = p + q$ ,  $P = p \cdot q$ , allora risulta

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}) = \mathbf{p}(\mathbf{A}) + \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{q}(\mathbf{A}) + \mathbf{p}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{p}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{q}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{A}).$$

Più in generale, possiamo considerare in  $\mathcal{M}_n$  *serie di potenze di matrici*, cioè matrici della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k,$$

ove  $\{a_k\}$  è una successione di numeri complessi; tali serie potranno convergere o no, e ad esse è applicabile il criterio fornito dal teorema 1.7.14: se risulta  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|\mathbf{A}^k\|_{\mathcal{M}_n} < \infty$ , allora la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k$  definisce una matrice appartenente a  $\mathcal{M}_n$ .

Consideriamo in particolare la serie “esponenziale”  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ : essa è convergente in  $\mathcal{M}_n$ , dato che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} = e^{\|\mathbf{A}\|} < \infty.$$

**Definizione 1.7.16** *La matrice somma della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$  si chiama matrice esponenziale, e si indica col simbolo  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ . Dunque*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

La matrice esponenziale è di grande importanza, come vedremo, nello studio dei sistemi differenziali lineari. Le sue proprietà hanno svariate analogie con la funzione esponenziale  $e^t$ ; in particolare risulta, come abbiamo visto,  $\|\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\| \leq e^{\|\mathbf{A}\|}$ . Inoltre vale il seguente risultato:

**Proposizione 1.7.17** *Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . Allora il limite*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{p} \right)^p$$

*esiste in  $\mathcal{M}_n$  e coincide con  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ .*

**Dimostrazione** Si ha

$$\sum_{k=0}^m \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1) \mathbf{A}^k}{p^k} \frac{1}{k!} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte per  $p > m$  risulta

$$\sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} - \sum_{k=m+1}^p \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} = \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{p} \right)^p - \sum_{k=m+1}^p \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k},$$

ovvero, sempre per  $p > m$ ,

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} + \sum_{k=m+1}^p \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k}.$$

Come sappiamo, il primo addendo a secondo membro ha limite per  $p \rightarrow \infty$ ; vediamo come si comporta il secondo. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^p \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} &= \sum_{k=m+1}^p \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1) \mathbf{A}^k}{p^k k!} = \\ &= \sum_{k=m+1}^p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{p}\right) \frac{\mathbf{A}^k}{k!}. \end{aligned}$$

Affermiamo che risulta

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{p}\right) \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Infatti, la differenza, in norma, si stima nel modo seguente:

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right] \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\|_{\mathcal{M}_n} \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right] \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n}^k}{k!} \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)^{k-1}\right] \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n}^k}{k!}; \end{aligned}$$

se ora applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione  $g(t) = -(1-t)^{k-1}$  nell'intervallo  $[0, \frac{k-1}{p}] \subset [0, 1]$ , otteniamo, per un opportuno  $\xi \in [0, 1]$ ,

$$1 - \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)^{k-1} = g\left(\frac{k-1}{p}\right) - g(0) = g'(\xi) \frac{k-1}{p} = (1-\xi)^{k-2} \frac{(k-1)^2}{p} \leq \frac{(k-1)^2}{p}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m+1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right] \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n}^k}{k!} \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(k-1)^2}{p} \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n}^k}{k!} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n}^k}{(k-2)!}, \end{aligned}$$

il che prova la nostra affermazione.

In conclusione,

$$\begin{aligned} \exists \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{p}\right)^p &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^p \binom{p}{k} \frac{\mathbf{A}^k}{p^k} = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}}. \quad \square \end{aligned}$$

## Completamento di uno spazio metrico

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico non completo, è sempre possibile immergerlo densamente in uno spazio metrico completo  $(\hat{X}, \hat{d})$  mediante un'isometria. Vale infatti il seguente risultato astratto:

**Teorema 1.7.18** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Allora esistono uno spazio metrico completo  $(\hat{X}, \hat{d})$  ed una isometria  $i : X \rightarrow \hat{X}$  tali che  $i(X)$  è denso in  $\hat{X}$ . Inoltre tale isometria è un isomorfismo se e solo se  $(X, d)$  è completo. Lo spazio  $(\hat{X}, \hat{d})$  si dice completamento di  $(X, d)$ .*

Si osservi che il completamento di uno spazio metrico è unico a meno di isomorfismi isometrici.

**Dimostrazione** Denotiamo una generica successione di Cauchy  $\{x_n\}$  di elementi di  $X$  con il simbolo  $\underline{x}$ . Introduciamo nell'insieme di tutte le successioni di Cauchy in  $X$  la relazione seguente:

$$\underline{x} \sim \underline{y} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

È immediato verificare che la relazione  $\sim$  è riflessiva e simmetrica; in virtù della disuguaglianza triangolare della distanza, essa è anche transitiva, cosicché è una relazione di equivalenza. Denotiamo con  $\hat{X}$  l'insieme delle classi di equivalenza per tale relazione, che verranno indicate con  $[\underline{x}]$ : pertanto

$$\hat{X} = \{[\underline{x}] : \underline{x} \text{ è una successione di Cauchy in } X\}.$$

Definiamo una distanza su  $\hat{X}$  ponendo

$$\hat{d}([\underline{x}], [\underline{y}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Si osservi che tale limite esiste: infatti dalla disuguaglianza triangolare della distanza segue che

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow \infty;$$

dunque la successione reale  $\{d(x_n, y_n)\}$ , essendo di Cauchy in  $\mathbb{R}$ , converge in  $\mathbb{R}$ . Inoltre il limite sopra scritto dipende solo dalle classi  $[\underline{x}]$  e  $[\underline{y}]$ , e non dalla scelta dei rappresentanti: infatti se  $\underline{x}' \sim \underline{x}$  e  $\underline{y}' \sim \underline{y}$ , allora

$$|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(x'_n, x_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Verifichiamo che  $\hat{d}$  è una distanza su  $\hat{X}$ . Le proprietà (i) e (iii) della definizione 1.5.1 sono evidenti. Per la (ii) basta notare che

$$\hat{d}([\underline{x}], [\underline{y}]) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \iff \underline{x} \sim \underline{y} \iff [\underline{x}] = [\underline{y}].$$

Infine per la (iv) si ha

$$\hat{d}([\underline{x}], [\underline{z}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, z_n) = \hat{d}([\underline{x}], [\underline{y}]) + \hat{d}([\underline{y}], [\underline{z}]).$$

Adesso definiamo l'immersione  $X \rightarrow \hat{X}$ . Se  $x \in X$ , la successione costante  $\hat{x} = \{x, x, x, \dots\}$  è certamente di Cauchy in  $X$ : poniamo allora

$$i(x) = [\hat{x}].$$

L'applicazione  $i$  è un'isometria, poiché

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = \hat{d}([\hat{x}], [\hat{y}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Proviamo che  $i(X)$  è denso in  $\hat{X}$ . Fissata  $[\underline{x}] \in \hat{X}$ , e scelto un rappresentante  $\underline{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in tale classe, consideriamo per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la successione costante  $\hat{x}_k = \{x_k, x_k, x_k, \dots\} \subseteq X$ , e la sua classe di equivalenza  $[\hat{x}_k] \in i(X)$ : si ha allora

$$\hat{d}([\hat{x}_k], [\hat{x}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n)$$

(questo limite esiste poiché  $\{d(x_k, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$ ); quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}([\hat{x}_k], [\hat{x}]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n) = 0$$

in quanto  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy in  $X$ . Ciò prova la densità di  $i(X)$  in  $\hat{X}$ .

Infine mostriamo che  $(\hat{X}, \hat{d})$  è completo. Sia  $\{[\underline{x}_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $\hat{X}$ . Dunque, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$\hat{d}([\underline{x}_k], [\underline{x}_h]) < \varepsilon \quad \forall h, k \geq \nu_\varepsilon.$$

Per la densità già dimostrata di  $i(X)$  in  $\hat{X}$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  possiamo trovare un elemento  $y_k \in X$  tale che per la successione costante  $\hat{y}_k = \{y_k, y_k, y_k, \dots\}$  si abbia  $\hat{d}([\hat{y}_k], [\underline{x}_k]) < \frac{1}{k}$ . Osserviamo ora che  $\underline{y} = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $X$ , in quanto

$$\begin{aligned} d(y_k, y_h) = \hat{d}([\hat{y}_k], [\hat{y}_h]) &\leq \hat{d}([\hat{y}_k], [\underline{x}_k]) + \hat{d}([\underline{x}_k], [\underline{x}_h]) + \hat{d}([\underline{x}_h], [\hat{y}_h]) \leq \\ &\leq \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{h} < 3\varepsilon \quad \forall k, h \geq \nu_\varepsilon \vee \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Proviamo allora che  $\hat{d}([\underline{x}_k], [\underline{y}]) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ . Per ogni  $k \geq \nu_\varepsilon \vee \frac{1}{\varepsilon}$  si ha

$$\hat{d}([\underline{x}_k], [\underline{y}]) \leq \hat{d}([\underline{x}_k], [\hat{y}_k]) + \hat{d}([\hat{y}_k], [\underline{y}]) \leq \frac{1}{k} + \lim_{h \rightarrow \infty} d(y_k, y_h) \leq 4\varepsilon,$$

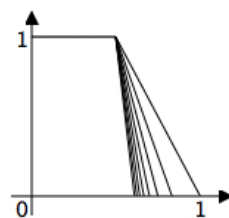
da cui  $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}([\underline{x}_k], [\underline{y}]) = 0$ .

Rimane da verificare che quando  $X$  è uno spazio metrico completo l'isometria  $i$  è un isomorfismo, ossia è surgettiva oltre che iniettiva. Sia allora  $X$  completo; se  $[\underline{x}] \in \hat{X}$ , sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un rappresentante della classe  $[\underline{x}]$ . Tale  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , essendo una successione di Cauchy in  $X$ , converge ad un elemento  $z \in X$ . Consideriamo la successione costante  $\hat{z} = \{z, z, z, \dots\}$ : essa soddisfa  $[\hat{z}] = [\underline{x}]$ , poiché  $\hat{d}([\hat{z}], [\underline{x}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z, x_n) = 0$ . Pertanto  $i(z) = [\underline{x}]$ .  $\square$

## Esercizi 1.7

1. Si provi che se  $(X, d)$  è uno spazio metrico completo e  $M$  è un sottoinsieme chiuso non vuoto di  $X$ , allora  $(M, d)$  è uno spazio metrico completo.
2. Si provi che  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , con una qualunque delle distanze  $d_1$  e  $d_2$  dell'esempio 1.5.2(3), è uno spazio metrico completo.
3. Si provi che lo spazio vettoriale  $\mathcal{B}(K)$  delle funzioni limitate su un qualsiasi insieme non vuoto  $K$ , dotato della norma  $\|\cdot\|_\infty$ , è uno spazio di Banach.
4. Poniamo per ogni  $n \geq 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + n(\frac{1}{2} - x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Si provi che  $\{f_n\}$  è una successione di Cauchy in entrambi gli spazi normati  $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$  e  $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ , ove  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  sono le norme definite nell'esempio 1.4.2 (5). Si provi anche che le  $f_n$  convergono rispetto a tali norme ad una funzione discontinua, e che pertanto i due spazi normati non sono di Banach.

5. Dimostrare che gli spazi normati  $\ell^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , sono spazi di Banach.  
**[Traccia:** se  $1 \leq p < \infty$ , data una successione di Cauchy  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^p$ , si provi che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  le successioni numeriche  $\{\mathbf{x}^k\}_n\}_{k \in \mathbb{N}}$  sono di Cauchy e quindi convergono ad un numero  $x_n$ ; si osservi che la successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un elemento  $\mathbf{x}$  di  $\ell^p$ , dato che risulta per ogni  $N \in \mathbb{N}$

$$\left( \sum_{n=0}^N |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=0}^N |x_n - (x^k)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=0}^N |(x^k)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon + M$$

con  $\varepsilon > 0$  e  $M > 0$  opportuni, pur di scegliere  $k$ , in dipendenza da  $N$ , sufficientemente grande. Si deduca infine che  $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}$  in  $\ell^p$  per  $k \rightarrow \infty$ . Nel caso  $p = \infty$  la procedura è analoga: occorre soltanto modificare in maniera opportuna la maggiorazione precedente.]

6. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Si provi che esso è completo se e solo se per ogni successione  $\{x_n\} \subseteq X$ , tale che la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n)$  sia convergente, esiste  $x \in X$  per cui  $\{x_n\}$  converge a  $x$ .
7. Siano  $\mathbf{f}_n$  funzioni definite su  $[a, b]$ , a valori in  $\mathbb{R}^m$  (oppure in  $\mathbb{C}^m$ ). Supponiamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in [a, b]$  esista la derivata  $\mathbf{f}'_n(t) \in \mathbb{R}^m$ , e che la funzione  $\mathbf{f}'_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sia continua. Si provi che se le serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(t)$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}'_k(t)$  sono entrambe convergenti in  $\mathbb{R}^m$ , uniformemente rispetto a  $t \in [a, b]$ , con somme  $\mathbf{f}(t)$  e  $\mathbf{g}(t)$ , allora  $\mathbf{f}$  ha la derivata  $\mathbf{f}' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  e risulta  $\mathbf{f}' = \mathbf{g}$ .

8. (*Lemma del Dini*) Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione monotona di funzioni continue su  $[a, b]$ . Posto  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , si provi che se  $f \in C[a, b]$  allora la convergenza delle  $f_n$  verso  $f$  è uniforme.

[**Traccia:** Sostituendo  $f_n$  con  $|f_n - f|$  possiamo supporre che la successione  $f_n$  converga puntalmente a 0 in modo decrescente. Fissato  $\varepsilon > 0$ , poniamo  $A_n = \{x \in [a, b] : f_n(x) < \varepsilon\}$ : gli  $A_n$  sono aperti crescenti rispetto all'inclusione, la cui unione è tutto  $[a, b]$ . Per compattezza, esistono  $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$  tali che  $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^p A_{n_i}$ ; se ne deduca la tesi.]

9. Si provi che per ogni matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  esiste il limite (finito o infinito)

$$r(\mathbf{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}^k\|_{\mathcal{M}_n}^{1/k}.$$

Tale quantità si chiama *raggio spettrale* di  $\mathbf{A}$ .

[**Traccia:** detto  $r(\mathbf{A}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}^k\|_{\mathcal{M}_n}^{1/k}$  e fissato  $\varepsilon > 0$ , si fissi un intero positivo  $m$  tale che  $r(\mathbf{A}) - \varepsilon < \|\mathbf{A}^m\|_{\mathcal{M}_n}^{1/m} < r(\mathbf{A}) + \varepsilon$ ; poi, se  $k \in [mh, m(h+1)]$  ( $h \in \mathbb{N}^+$ ), scrivendo  $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{mh} \mathbf{A}^{k-mh}$  si verifichi che

$$\|\mathbf{A}^k\|_{\mathcal{M}_n}^{\frac{1}{k}} \leq (r(\mathbf{A}) + \varepsilon)^{\frac{mh}{k}} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{M}_n}^{\frac{k-mh}{k}},$$

e infine, osservato che  $\frac{mh}{k} \geq 1 - \frac{m}{k}$  e  $\frac{k-mh}{k} \leq \frac{1}{k}$ , si deduca

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}^k\|_{\mathcal{M}_n}^{1/k} \leq r(\mathbf{A}) + \varepsilon.]$$

10. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $\mathcal{F}$  un sottoinsieme compatto dello spazio di Banach  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ . Si provi che gli elementi di  $\mathcal{F}$  formano una famiglia equicontinua ed equilimitata.
11. Sia  $\{a_k\}$  una successione complessa e sia  $\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ . Supposto  $\rho \in ]0, \infty[$ , si provi che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k$  è convergente in  $\mathcal{M}_n$  se  $r(\mathbf{A}) < \frac{1}{\rho}$  e non è convergente se  $r(\mathbf{A}) > \frac{1}{\rho}$ , mentre nulla si può dire quando  $r(\mathbf{A}) = \frac{1}{\rho}$  (ricordiamo che  $r(\mathbf{A})$  è il raggio spettrale di  $\mathbf{A}$ ). Si provi inoltre che per ogni  $\delta \in ]0, \frac{1}{\rho}[$  la convergenza della serie è totale e uniforme sull'insieme  $\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n : r(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{\rho} - \delta\}$ . Si formuli infine un analogo enunciato nel caso in cui  $\rho = 0$  oppure  $\rho = +\infty$ .
12. Si provi che se le matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$  commutano, ossia  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , allora vale la formula del binomio

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \mathbf{A}^h \mathbf{B}^{k-h} \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

se ne deducano le relazioni

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{e}^{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{e}^{\mathbf{A}})^{-1} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}}.$$

13. Posto  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ , si verifichi che  $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$  e si provi l'identità

$$e^{\vartheta \mathbf{J}} = (\cos \vartheta) \mathbf{I} + (\sin \vartheta) \mathbf{J} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

14. Si verifichi che lo spazio metrico  $(\mathbb{R}, d)$ , ove

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

(si veda l'esempio 1.5.2(3)) non è completo; se ne determini il completamento.

15. Indichiamo con  $c_{00}$  lo spazio vettoriale delle successioni definitivamente nulle. Si verifichi che tale spazio non è completo rispetto alla norma di  $\ell^1$  e si provi che il suo completamento è isomorfo e isometrico a  $\ell^1$ .

16. Sia  $X$  uno spazio con prodotto scalare. Provare che il completamento di  $X$  è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle [x], [x'] \rangle_{\hat{X}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X.$$

## 1.8 Contrazioni

Uno dei motivi che rendono importanti gli spazi metrici completi è il fatto che in tali spazi è valido il “teorema delle contrazioni”, strumento fondamentale nelle applicazioni per la sua generalità e versatilità.

**Definizione 1.8.1** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una contrazione su  $X$  è un'applicazione  $F : X \rightarrow X$  per la quale esiste un numero  $\lambda \in [0, 1[$  tale che*

$$d(F(x), F(x')) \leq \lambda d(x, x') \quad \forall x, x' \in X.$$

Naturalmente, ogni contrazione è una funzione uniformemente continua. Tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , con derivata limitata in valore assoluto da una costante minore di 1, sono contrazioni (in virtù del teorema di Lagrange); per esempio, le funzioni  $\frac{1}{2} \cos x$ ,  $\frac{3}{4} \arctan x$ ,  $\ln(2 + x^2)$  sono contrazioni su  $\mathbb{R}$ . Un altro esempio è il seguente: sia  $X = C[a, b]$  con la distanza  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ ; allora l'applicazione  $g \mapsto F(g)$ , definita da

$$[F(g)](x) = \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

è una contrazione su  $X$  se  $b - a < 1$ . Infatti se  $f, g \in C[a, b]$  si ha

$$|[F(f)](x) - [F(g)](x)| = \left| \int_a^x (f(t) - g(t)) dt \right| \leq (x - a) \|f - g\|_\infty \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui

$$\|F(f) - F(g)\|_\infty \leq (b - a) \|f - g\|_\infty \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

**Teorema 1.8.2 (delle contrazioni)** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $F : X \rightarrow X$  una contrazione. Allora  $F$  ha un unico punto fisso, ossia esiste un unico punto  $\bar{x} \in X$  tale che  $F(\bar{x}) = \bar{x}$ .

**Dimostrazione** Per ipotesi, esiste  $\lambda \in [0, 1[$  tale che

$$d(F(x), F(x')) \leq \lambda d(x, x') \quad \forall x, x' \in X.$$

Sia  $x^*$  un arbitrario punto di  $X$ . Definiamo per ricorrenza la seguente successione:

$$\begin{cases} x_0 = x^* \\ x_{n+1} = F(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, applicando ripetutamente la disuguaglianza triangolare, se  $m > n$  si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{h=n}^{m-1} d(x_{h+1}, x_h) \leq \sum_{h=n}^{m-1} \lambda^h d(x_1, x_0).$$

Poiché la serie  $\sum \lambda^h$  è convergente, la successione  $\{x_n\}$  è di Cauchy in  $X$ . Dato che  $X$  è completo, essa converge ad un elemento  $\bar{x} \in X$ . Proviamo che  $\bar{x}$  è un punto fisso per  $F$ :

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, F(\bar{x})) &\leq d(\bar{x}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(\bar{x})) = \\ &= d(\bar{x}, x_{n+1}) + d(F(x_n), F(\bar{x})) \leq d(\bar{x}, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, \bar{x}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

da cui, per  $n \rightarrow \infty$ , otteniamo  $d(\bar{x}, F(\bar{x})) = 0$ , cioè  $F(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Proviamo che  $\bar{x}$  è l'unico punto fisso di  $F$ : se  $\underline{x} \in X$  è un altro punto fisso, si ha

$$d(\bar{x}, \underline{x}) = d(F(\bar{x}), F(\underline{x})) \leq \lambda d(\bar{x}, \underline{x}),$$

il che, essendo  $\lambda < 1$ , è impossibile se  $\bar{x} \neq \underline{x}$ . Dunque  $\underline{x} = \bar{x}$ .  $\square$

Una variante importante del teorema delle contrazioni, che ne aumenta notevolmente la versatilità, si ha nel caso di una famiglia di contrazioni dipendenti da un parametro (il quale può essere una variabile reale o anche di tipo più generale, ad esempio vettoriale). Il succo del risultato che segue è che se le contrazioni hanno tutte la stessa costante, allora i rispettivi punti fissi dipendono con continuità dal parametro.

**Teorema 1.8.3 (delle contrazioni dipendenti da parametro)** Sia  $(B, \delta)$  uno spazio metrico, sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $T : B \times X \rightarrow X$  un'applicazione continua. Supponiamo inoltre che esista  $\lambda \in [0, 1[$  tale che

$$d(T(b, x), T(b, x')) \leq \lambda d(x, x') \quad \forall x, x' \in X, \quad \forall b \in B.$$

Allora per ogni  $b \in B$  esiste un unico  $x_b \in X$  tale che  $T(b, x_b) = x_b$ , e la funzione  $b \mapsto x_b$ , da  $B$  in  $X$ , è continua.



**Dimostrazione** Per ciascun  $b \in B$  il punto fisso  $x_b$  esiste unico per il teorema 1.8.2. Inoltre possiamo scrivere per ogni  $a, b \in B$

$$\begin{aligned} d(x_a, x_b) = d(T(a, x_a), T(b, x_b)) &\leq d(T(a, x_a), T(b, x_a)) + d(T(b, x_a), T(b, x_b)) \leq \\ &\leq d(T(a, x_a), T(b, x_a)) + \lambda d(x_a, x_b). \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$d(x_a, x_b) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(T(a, x_a), T(b, x_a)) \quad \forall a, b \in B.$$

Ora, tenendo fisso  $a \in B$ , fissiamo  $\varepsilon > 0$ : la continuità di  $T$  nel punto  $(a, x_a)$  implica che esiste  $\eta > 0$  per cui

$$d(T(a, x_a), T(b, x_a)) < (1-\lambda)\varepsilon \quad \text{se } \delta(a, b) < \eta,$$

e dunque  $d(x_a, x_b) < \varepsilon$  se  $\delta(a, b) < \eta$ . Ciò prova la tesi.  $\square$

I teoremi 1.8.2 e 1.8.3 garantiscono l'esistenza di un'unica soluzione per l'equazione  $F(x) - x = 0$  e la sua continuità rispetto ai parametri presenti. Poiché vi è un'innumerabile varietà di problemi che si possono ricondurre ad una equazione di questo tipo, è chiara l'importanza applicativa di questi risultati. Negli esercizi 1.8.6 e 1.8.7 si mostra come applicare il teorema delle contrazioni per dimostrare il teorema di esistenza e unicità per la soluzione del problema di Cauchy relativo a sistemi differenziali del primo ordine in forma normale, nonché la continuità della soluzione rispetto al dato iniziale.

## Esercizi 1.8

1. Sia  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  una matrice reale  $n \times n$ . Si consideri l'applicazione lineare  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Si provino le affermazioni seguenti:
  - (i) se esiste  $\alpha \in ]0, 1[$  tale che  $\max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : 1 \leq i \leq n \right\} < \alpha$ , allora  $\varphi$  è una contrazione su  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ , ove  $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ;
  - (ii) se esiste  $\alpha \in ]0, 1[$  tale che  $\max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : 1 \leq j \leq n \right\} < \alpha$ , allora  $\varphi$  è una contrazione su  $(\mathbb{R}^n, d_1)$ , ove  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ ;
  - (iii) se esiste  $\alpha \in ]0, 1[$  tale che  $\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} < \alpha$ , allora  $\varphi$  è una contrazione su  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ , ove  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |x_i - y_i|^2}$ .
2. Sia  $K : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una funzione continua. Provare che la funzione  $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , definita da

$$[F(g)](x) = \int_a^b K(x, y)g(y) dy, \quad x \in [a, b],$$

è una contrazione su  $C[a, b]$  purché

$$\max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, y)| dy < 1.$$

3. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $F : X \rightarrow X$  una funzione continua. Supponiamo che esista  $k \in \mathbb{N}^+$  tale che la  $k$ -sima iterata  $F^k = F \circ F \circ \dots \circ F$  sia una contrazione. Si provi che allora  $F$  ha un unico punto fisso in  $X$ .
4. Sia  $K : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una funzione continua. Provare che la funzione  $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , definita da

$$[F(g)](x) = \int_a^x K(x, y)g(y) dy, \quad x \in [a, b],$$

ha un'opportuna iterata  $F^k$  che è una contrazione su  $C[a, b]$ .

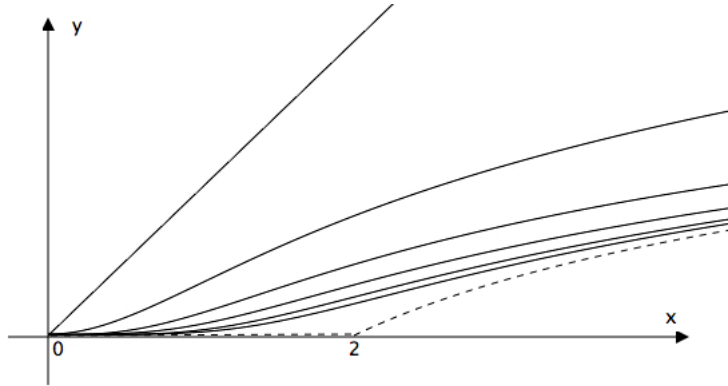
[**Traccia:** si verifichi che  $\|F^k(g - f)\|_\infty \leq \frac{M^k(b-a)^k}{k!} \|g - f\|_\infty$  per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ , ove  $M = \max_{[a,b] \times [a,b]} |K|$ .]

5. Si provi che la successione  $\{f_n\}$  definita da

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x f_n(x)), \end{cases} \quad x \geq 0$$

converge uniformemente su  $[0, \infty[$  e se ne determini il limite.

[**Traccia:** Si verifica facilmente che le  $f_n$  sono tutte funzioni crescenti, con  $0 < f_{n+1} \leq f_n$  in  $]0, +\infty[$ . Si provi, direttamente o utilizzando il teorema delle contrazioni, che la funzione limite  $L(x)$  è nulla su  $[0, 2]$  mentre è positiva, crescente e concava su  $[2, \infty[$ ; si verifichi che per  $x > 2$  risulta  $x = \frac{e^{2L(x)} - 1}{L(x)}$ , e che quindi, per  $x > 2$ ,  $L(x)$  è l'inversa della funzione  $g(y) = \frac{e^{2y} - 1}{y}$ ,  $y > 0$ . Si mostri che il lemma del Dini è applicabile e se ne deduca la convergenza uniforme in  $[0, a]$ , con  $a$  sufficientemente grande. Per quanto riguarda  $[a, \infty[$ , scrivendo  $f_n$  in funzione di  $f_{n-2}$  si mostri che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $a_\varepsilon > 0$  tale che  $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{f_n(x)}{\ln x} < \frac{1}{2} + \varepsilon$  per ogni  $x \geq a_\varepsilon$  e per ogni  $n \geq 2$ , e che di conseguenza lo stesso vale per  $L(x)$ . Infine si ricavi che  $f_n - L$  converge a 0 uniformemente in  $[a_\varepsilon, +\infty[$ .]



6. Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo non vuoto e sia  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione continua, definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ , tale che per ogni compatto  $K \subset A$  esista una costante  $H_K \geq 0$  per cui

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq H_K |\mathbf{y} - \mathbf{u}|_m \quad \forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{u}) \in K.$$

Fissato un punto  $(x_0, \mathbf{u}_0) \in A$ , siano  $a, b > 0$  tali che, posto

$$R = \{(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |x - x_0| \leq a, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_m \leq b\},$$

risulti  $R \subset A$ ; siano inoltre  $M, H \geq 0$  tale che

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq M \quad \forall (x, \mathbf{u}) \in R,$$

$$|\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{u})|_m \leq H|\mathbf{y} - \mathbf{u}|_m \quad \forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{u}) \in R.$$

Si provi che esistono un intervallo  $J = [x_0 - h, x_0 + h]$ , con  $0 < h \leq a$ , e un'unica funzione  $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^1$ , tali che

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \forall x \in J, \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0;$$

si mostri anche che il grafico di  $\mathbf{u}$  è tutto contenuto in  $R$ , cioè si ha

$$|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_0|_m \leq b \quad \forall x \in J.$$

[**Traccia:** anzitutto si trasformi il problema di Cauchy

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}(x)), \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0$$

nella forma integrale equivalente

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{g}(\xi, \mathbf{u}(\xi)) d\xi;$$

a questo proposito si ricordi che l'integrale  $\int_a^b \mathbf{F}(t) dt$  di una funzione continua  $\mathbf{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  è il vettore  $\left( \int_a^b F^1(t) dt, \dots, \int_a^b F^m(t) dt \right)$ , e che vale la fondamentale disuguaglianza  $\left| \int_a^b \mathbf{F}(t) dt \right|_m \leq \int_a^b |\mathbf{F}(t)|_m dt$ . Poi si provi che l'applicazione  $\mathbf{v} \mapsto F(\mathbf{v})$ , definita da

$$[F(\mathbf{v})](x) = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{g}(\xi, \mathbf{v}(\xi)) d\xi, \quad x \in J,$$

per  $h$  sufficientemente piccolo è una contrazione che manda lo spazio metrico completo  $(V, d)$  in sé, ove  $V = \{\mathbf{v} \in C(J, \mathbb{R}^m) : \sup_J |\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{u}_0| \leq b\}$  e  $d$  è la distanza associata alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

7. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, si provi che la soluzione  $u$  del problema di Cauchy

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \forall x \in J, \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0;$$

dipende con continuità da  $\mathbf{u}_0$ .

[**Traccia:** Con riferimento alla traccia dell'esercizio precedente, poniamo  $B = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_m \leq b/2\}$  e  $[T(\mathbf{y}, \mathbf{u})](x) = \mathbf{y} + \int_{x_0}^x \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) dt$  per ogni  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ . Si verifichi che  $T : B \times V \rightarrow V$  è continua e che per  $h$  sufficientemente piccolo  $T(\mathbf{y}, \cdot)$  è una contrazione di costante  $1/2$  per ogni  $\mathbf{y} \in B$ . Poi si applichi il teorema 1.8.3.]

## 1.9 Funzioni implicite

Un'importante applicazione del teorema delle contrazioni riguarda lo studio dei luoghi di punti dello spazio  $\mathbb{R}^N$  che sono insiemi di livello di funzioni regolari  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $N > k$ , ove  $A$  è un aperto:

$$Z_{\mathbf{c}} = \{\mathbf{x} \in A : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^k.$$

Sono insiemi di questo tipo, con  $k = 1$ : le coniche in  $\mathbb{R}^2$  (ad esempio le ellissi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ) così come molte altre “curve” importanti; le quadriche in  $\mathbb{R}^3$  (ad esempio gli ellissoidi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ); le sfere  $|\mathbf{x}|_N^2 = r^2$  in qualunque dimensione  $N \geq 2$ , eccetera.

Ci proponiamo di vedere sotto quali ipotesi un'equazione del tipo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  è tale da permetterci di esplicitare  $k$  variabili in funzione delle altre  $N - k$ : ciò significa che, almeno localmente, l'insieme  $Z_{\mathbf{c}}$  sopra introdotto è il grafico di una certa funzione di  $N - k$  variabili, a valori in  $\mathbb{R}^k$ , funzione che è *definita implicitamente* dall'equazione  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ . Come vedremo, non sempre ciò è possibile, anche se  $\mathbf{F}$  è di classe  $C^\infty(A)$ .

**Esempi 1.9.1 (1)** Siano  $N = 2$  e  $k = 1$ . Se  $F(x, y) = x^2 + y^2$ , allora  $Z_c$  è vuoto per  $c < 0$ ,  $Z_c = \{(0, 0)\}$  per  $c = 0$ , e  $Z_c$  è la circonferenza di raggio  $\sqrt{c}$  centrata nell'origine per  $c > 0$ .

**(2)** Se  $N = 2$ ,  $k = 1$  e  $F(x, y) = x^2 - y^2$ , allora  $Z_c$  è un'iperbole equilatera per  $c \neq 0$  (con asintoti le rette  $y = \pm x$ ), mentre  $Z_0$  è costituito dalle due rette  $y = \pm x$  per  $c = 0$ .

Poiché  $Z_{\mathbf{c}}$  è l'insieme di livello  $\mathbf{0}$  per la funzione  $\mathbf{F} - \mathbf{c}$ , non è restrittivo supporre  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  (e scrivere  $Z$  in luogo di  $Z_{\mathbf{0}}$ ). Osserviamo che se  $Z$  è la circonferenza  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , essa è il grafico di una funzione di classe  $C^1$  soltanto *localmente* e non *globalmente*: precisamente, per ogni  $(x_0, y_0) \in Z$  si può trovare un intorno  $U$  tale che  $U \cap Z$  è grafico della funzione  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ , oppure  $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ , ma nessuna di queste quattro rappresentazioni è valida simultaneamente in tutti i punti di  $Z$ .

La questione è chiarita da un fondamentale risultato: il *teorema delle funzioni implicite*, familiarmente noto come teorema del Dini. Lo enunciamo dapprima nel caso  $N = 2$ , perché di natura più elementare e di più facile dimostrazione; successivamente, per mezzo del teorema delle contrazioni, tratteremo il caso generale.

**Teorema 1.9.2 (del Dini, caso  $N = 2$ )** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , sia  $F \in C^1(A)$  e poniamo  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$ . Se  $(x_0, y_0) \in Z$  e  $\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ , allora esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$ , con  $\bar{U} \subset A$ , tale che  $Z \cap U$  è grafico di una funzione di classe  $C^1$ . Più precisamente: se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , allora esistono un intorno  $V$  di  $x_0$ , un intorno  $W$  di  $y_0$  (con  $\bar{V} \times \bar{W} \subset A$ ), ed una funzione  $f : V \rightarrow W$  tale che

$$Z \cap (V \times W) = \{(x, f(x)) : x \in V\};$$

inoltre la funzione implicita  $f$  è di classe  $C^1$  e

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in V.$$

Analogamente, se  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , allora esistono un intorno  $V$  di  $x_0$ , un intorno  $W$  di  $y_0$  (con  $\overline{V \times W} \subset A$ ), ed una funzione  $g : W \rightarrow V$  tale che

$$Z \cap (V \times W) = \{(g(y), y) : y \in W\}, \quad g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \quad \forall y \in W.$$

Prima di dimostrare il teorema, facciamo alcune considerazioni.

**Osservazioni 1.9.3 (1)** Qualora valgano entrambe le disequaglianze  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  e  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , l'insieme  $Z \cap (V \times W)$  può essere descritto sia dall'equazione  $y = f(x)$ , sia da  $x = g(y)$ ; in questo caso  $f : V \rightarrow W$  è invertibile e  $g = f^{-1}$ .

(2) L'espressione delle derivate  $f'(x)$  e  $g'(y)$  si può ricavare derivando rispetto a  $x$  l'identità  $F(x, f(x)) = 0$  e rispetto a  $y$  l'identità  $F(g(y), y) = 0$ , naturalmente dopo aver accertato che le funzioni implicite  $f$  e  $g$  siano derivabili.

(3) Se  $F$  è di classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , allora le funzioni implicite  $f$  e  $g$ , se definite, sono di classe  $C^k$  e le loro derivate si ottengono derivando via via le espressioni di  $f'(x)$  e  $g'(y)$ . Ad esempio, se  $F$  è di classe  $C^2$  e  $f$  è ben definita, si ha, omettendo per semplicità la dipendenza da  $(x, f(x))$ ,

$$f''(x) = -\frac{d}{dx} \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}f')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}f')}{F_y^2},$$

e riutilizzando l'espressione di  $f'(x)$  si trova

$$f''(x) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}.$$

(4) La retta tangente al grafico della funzione implicita, cioè all'insieme  $Z$ , nel punto  $(x_0, y_0)$  è data da

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 :$$

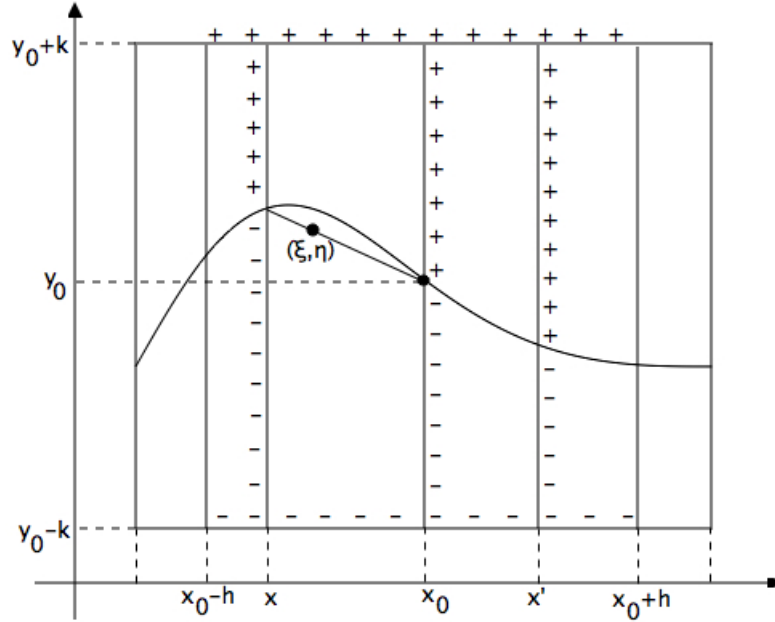
infatti l'equazione di tale retta è

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{oppure} \quad x = x_0 + g'(y_0)(y - y_0),$$

e dalle espressioni di  $f'(x_0)$  e  $g'(y_0)$  si ricava in entrambi i casi l'equazione sopra scritta. Essa era del resto prevedibile, poiché sappiamo che il gradiente di  $F$ , se non nullo, è ortogonale alle curve di livello di  $F$ .

**Dimostrazione del teorema 1.9.2** Sia  $(x_0, y_0) \in Z$  e supponiamo che  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ : allora, per continuità, esiste un intorno  $V_0 \times W$  di  $(x_0, y_0)$ , con  $\overline{V_0 \times W} \subset A$ , nel quale si ha  $F_y \neq 0$ ; si può supporre, cambiando eventualmente  $F$  con  $-F$ , che sia  $F_y > 0$  in  $\overline{V_0 \times W}$ . Non è restrittivo supporre che l'intorno sia del tipo  $W = ]y_0 - k, y_0 + k[$ . Consideriamo la restrizione di  $F$  lungo la retta  $x = x_0$ , cioè  $y \mapsto F(x_0, y)$ : essa è una funzione strettamente crescente (perché  $F_y(x_0, y) > 0$ ) e nulla per  $y = y_0$ , dato che  $(x_0, y_0) \in Z$ . Dunque

$$F(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in ]y_0, y_0 + k], \quad F(x_0, y) < 0 \quad \forall y \in [y_0 - k, y_0[.$$



Il teorema di permanenza del segno, applicato alle funzioni  $x \mapsto F(x, y_0 + k)$  e  $x \mapsto F(x, y_0 - k)$ , ci dice che esiste un intorno  $V = ]x_0 - h, x_0 + h[ \subseteq V_0$ , tale che

$$F(x, y_0 + k) > 0 \quad \forall x \in V, \quad F(x, y_0 - k) < 0 \quad \forall x \in V.$$

Consideriamo adesso la funzione  $y \mapsto F(x, y)$ , ove  $x$  è un generico punto di  $V$ : dato che  $F(x, y_0 - k) < 0 < F(x, y_0 + k)$ , e ricordando che  $F_y(x, y) > 0$  per ogni  $y \in W$ , in corrispondenza di  $x$  esiste un *unico* punto  $y \in W$  tale che  $F(x, y) = 0$ ; tale punto  $y$ , che dipende dall' $x$  prescelto, possiamo ribattezzarlo  $f(x)$ . Resta così definita una funzione  $f : V \rightarrow W$  tale che, per costruzione, risulta  $F(x, f(x)) = 0$  per ogni  $x \in V$ ; più precisamente si ha

$$x \in V, y \in W, F(x, y) = 0 \quad \iff \quad y = f(x).$$

La funzione  $f$  sopra introdotta è la *funzione implicita* definita dall'equazione  $F(x, y) = 0$  nell'intorno di  $(x_0, y_0)$ , ed in generale non è possibile ricavarla esplicitamente.

Dimostriamo ora che  $f$  è continua in ogni punto di  $V$ . Consideriamo due punti distinti  $x, x' \in V$ : per definizione di  $f$  si ha  $F(x, f(x)) = F(x', f(x')) = 0$ . Poniamo

$$G(t) = F(x + t(x' - x), f(x) + t(f(x') - f(x))), \quad t \in [0, 1] :$$

dato che  $G(0) = G(1) = 0$ , per il teorema di Rolle esiste  $s \in ]0, 1[$  tale che

$$\begin{aligned} 0 &= F(x', f(x')) - F(x, f(x)) = G(1) - G(0) = \\ &= G'(s) = F_x(\xi, \eta)(x' - x) + F_y(\xi, \eta)(f(x') - f(x)), \end{aligned}$$

ove  $(\xi, \eta) = (x + s(x' - x), f(x) + s(f(x') - f(x)))$  è un punto opportuno del segmento di estremi  $(x, f(x))$  e  $(x', f(x'))$ . Dato che  $V \times W$  è un rettangolo, si ha  $(\xi, \eta) \in V \times W \subseteq V_0 \times W$ , e quindi  $F_y(\xi, \eta) > 0$ . Se ne deduce

$$f(x') - f(x) = -\frac{F_x(\xi, \eta)}{F_y(\xi, \eta)}(x' - x),$$

da cui, posto  $M = \max_{V \times W} |F_x|$ ,  $m = \min_{V \times W} F_y$ , si ricava

$$|f(x') - f(x)| \leq \frac{M}{m} |x' - x| \quad \forall x', x \in V.$$

Ciò prova che  $f$  è continua, anzi lipschitziana, in  $V$ .

Adesso facciamo tendere  $x'$  a  $x$ : per la continuità appena dimostrata, si ha  $f(x') \rightarrow f(x)$ ; di conseguenza, essendo  $F_x$  e  $F_y$  continue, otteniamo

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = - \lim_{x' \rightarrow x} \frac{F_x(\xi, \eta)}{F_y(\xi, \eta)} = - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in V,$$

il che mostra che  $f$  è anche derivabile in  $V$ , con

$$f'(x) = - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in V.$$

Infine, poiché l'espressione a secondo membro è continua, si conclude che  $f \in C^1(V)$ . La tesi è così provata nel caso  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ; l'altro caso, in cui  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , è perfettamente analogo.  $\square$

**Esempio 1.9.4** Sia  $F(x, y) = y \ln x - x \cos y$ ;  $F$  è definita sul semipiano  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  e

$$\nabla F(x, y) = \left( \frac{y}{x} - \cos y, \ln x + x \sin y \right) \quad \forall (x, y) \in A.$$

Nel punto  $(1, \pi/2)$  si ha

$$F\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \nabla F\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

Esistono dunque un intorno  $U = V \times W$  di  $(1, \pi/2)$  ed una funzione  $f : V \rightarrow W$ , invertibile, con  $f$  e  $f^{-1}$  di classe  $C^1$ , tale che

$$f(x) \ln x - x \cos f(x) = 0 \quad \forall x \in V, \quad y \ln f^{-1}(y) - f^{-1}(y) \cos y = 0 \quad \forall y \in W.$$

Scriviamo l'equazione della retta tangente a  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$  nel punto  $(1, \pi/2)$ : si ha

$$f'(1) = - \frac{F_x(1, \pi/2)}{F_y(1, \pi/2)} = - \frac{\pi}{2}$$

e la retta cercata è data da

$$\frac{\pi}{2}(x - 1) + \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Poiché  $F \in C^\infty(A)$ , si ha  $f \in C^\infty(V)$ . Volendo scrivere il polinomio di Taylor di  $f$  di centro 1 e grado 2, occorre anzitutto calcolare le derivate seconde di  $F$ :

$$F_{xx}(x, y) = -\frac{y}{x^2}, \quad F_{xy}(x, y) = \frac{1}{x} + \sin y, \quad F_{yy}(x, y) = x \cos y.$$

Derivando l'identità  $F(x, f(x)) = 0$  si trova successivamente

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0,$$

$$F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x))[f'(x)]^2 + F_y(x, f(x))f''(x) = 0,$$

da cui, sostituendo i valori  $x = 1$  e  $f(1) = \pi/2$  si ricava facilmente  $f''(1) = 5\pi/2$ . Dunque il polinomio cercato è

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{5\pi}{4}(x-1)^2.$$

In modo perfettamente analogo si può verificare che il polinomio di Taylor di  $g$ , di centro  $\pi/2$  e grado 2, è dato da

$$Q_2(y) = 1 - \frac{2}{\pi} \left( y - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{12}{\pi^2} \left( y - \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Quando le ipotesi del teorema 1.9.2 non sono verificate, l'insieme  $Z$  dove si annulla la funzione  $F(x, y)$  può avere le forme più diverse. Vediamo un caso tipico: sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  e supponiamo che nel punto  $(x_0, y_0) \in A$  risulti

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \nabla F(x_0, y_0) = \mathbf{0}.$$

Denotiamo con  $\mathbf{H}$  la matrice Hessiana di  $F$ : se  $\det \mathbf{H}(x_0, y_0) > 0$ , allora  $F$  ha in  $(x_0, y_0)$  un massimo relativo o un minimo relativo e, in particolare,  $(x_0, y_0)$  è un punto isolato dell'insieme  $Z$ . Se invece  $\det \mathbf{H}(x_0, y_0) < 0$ ,  $F$  ha in  $(x_0, y_0)$  un punto di sella; in questo caso vale il seguente

**Teorema 1.9.5** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto, sia  $(x_0, y_0)$  un punto di  $A$  e sia  $F \in C^2(A)$  una funzione tale che*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \nabla F(x_0, y_0) = \mathbf{0}, \quad \det \mathbf{H}(x_0, y_0) < 0.$$

*Allora, posto  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$ , esiste un intorno  $U \subseteq A$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $Z \cap U$  è formato da due grafici di opportune funzioni di classe  $C^1$ , i quali si incontrano trasversalmente in  $(x_0, y_0)$ , ossia le rette tangenti ai due grafici in  $(x_0, y_0)$  sono diverse. In particolare,  $Z \cap U$  non è grafico di alcuna funzione di una variabile.*

**Dimostrazione** Indichiamo con  $Q$  la forma quadratica associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \mathbf{H}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} F_{xx}(x_0, y_0) & F_{xy}(x_0, y_0) \\ F_{yx}(x_0, y_0) & F_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

vale a dire

$$Q(u, v) = au^2 + 2buv + cv^2 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

ed osserviamo subito che il gradiente

$$\nabla Q(u, v) = 2 \begin{pmatrix} au + bv \\ bu + cv \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$



è nullo solo nell'origine, essendo  $b^2 - ac > 0$ . In particolare, esiste  $m > 0$  tale che

$$(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)^2 + (b \cos \vartheta + c \sin \vartheta)^2 \geq m^2 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

In virtù della formula di Taylor, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $r_\varepsilon \in ]0, 1[$  tale che, detto  $B_r$  il disco di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r$ , per ogni  $(x, y) \in B_{r_\varepsilon}$  valgono le relazioni, per noi fondamentali,

$$\left| F(x, y) - \frac{1}{2} Q(x - x_0, y - y_0) \right| \leq \varepsilon [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2],$$

$$\left| \nabla F(x, y) - \frac{1}{2} \nabla Q(x - x_0, y - y_0) \right|_2 \leq \varepsilon \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Da questi fatti, per cominciare, si deduce che  $\nabla F(x, y) \neq \mathbf{0}$  in  $B_{r_\varepsilon} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ : infatti, se in un punto  $(x, y) \in B_{r_\varepsilon}$ , diverso da  $(x_0, y_0)$ , si avesse  $\nabla F(x, y) = \mathbf{0}$ , dedurremmo

$$|\nabla Q(x - x_0, y - y_0)|_2 \leq 2\varepsilon \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$

quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \left| \mathbf{H}(x_0, y_0)^{-1} \mathbf{H}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|_2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{H}(x_0, y_0)^{-1}\|_{\mathcal{M}_2} \left| \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|_2 = \\ &= \|\mathbf{H}(x_0, y_0)^{-1}\|_{\mathcal{M}_2} \left| \frac{1}{2} \nabla Q(x - x_0, y - y_0) \right|_2 \leq \\ &\leq \varepsilon \|\mathbf{H}(x_0, y_0)^{-1}\|_{\mathcal{M}_2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

e ciò è assurdo se si sceglie  $\varepsilon$  in modo che sia  $\varepsilon \|\mathbf{H}(x_0, y_0)^{-1}\|_{\mathcal{M}_2} < 1$ . Dunque, il gradiente di  $F$  non si annulla in  $B_{r_\varepsilon} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ .

Adesso osserviamo che, posto

$$\bar{Q}(u, v) = Q\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

l'insieme

$$Z' = \{(x, y) \in B_{r_\varepsilon} : Q(x - x_0, y - y_0) = 0\},$$

coincide, per omogeneità, con l'insieme

$$\{(x_0, y_0)\} \cup \{(x, y) \in B_{r_\varepsilon} \setminus \{(x_0, y_0)\} : \bar{Q}(x - x_0, y - y_0) = 0\},$$

ed è costituito dalle soluzioni  $(x, y) \in B_{r_\varepsilon}$  dell'equazione

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 = 0.$$

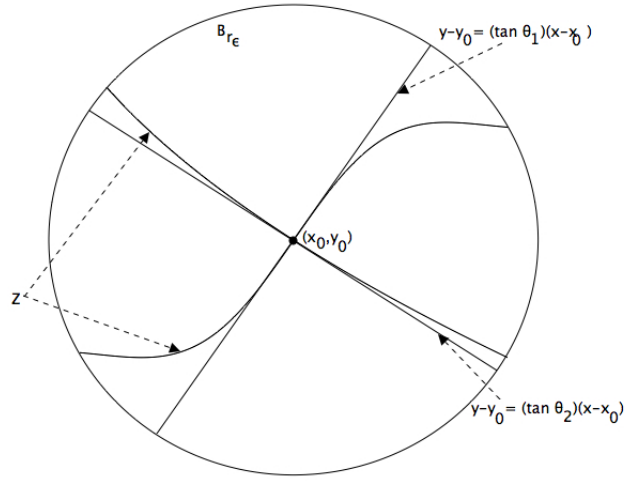
Dunque  $Z'$  è formato dall'unione di quattro segmenti uscenti da  $(x_0, y_0)$ , vale a dire quelli appartenenti alle rette

$$\begin{aligned} x - x_0 &= 0, & y - y_0 &= -\frac{a}{2b}(x - x_0) & \text{se } c &= 0, \\ y - y_0 &= (\tan \vartheta_1)(x - x_0), & y - y_0 &= (\tan \vartheta_2)(x - x_0) & \text{se } c &\neq 0, \end{aligned}$$

ove

$$\tan \vartheta_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}, \quad \tan \vartheta_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{c}.$$

Per fissare le idee, nel seguito supporremo  $c \neq 0$ : ciò implica che le due rette non sono verticali. Notiamo che uno qualunque di questi segmenti uscenti da  $(x_0, y_0)$ , nei quali  $Q(x - x_0, y - y_0) = 0$ , taglia un semidisco in due parti, nelle quali i segni di  $Q$  sono opposti: altrimenti, uno di questi segmenti sarebbe costituito da punti di massimo locale o di minimo locale per  $Q$ , contro il fatto che  $\nabla Q$  si annulla solo in  $(0, 0)$ .



L'idea è che intorno al punto  $(x_0, y_0)$  l'insieme  $Z$  degli zeri di  $F$  deve somigliare molto all'insieme  $Z'$  sopra descritto. Per verificarlo, notiamo che, analogamente al caso di  $Z'$ , se  $\epsilon$  è piccolo l'insieme

$$Z'_\epsilon = \{(x_0, y_0)\} \cup \{(x, y) \in B_{r_\epsilon} \setminus \{(x_0, y_0)\} : |\overline{Q}(x - x_0, y - y_0)| < 3\epsilon\}$$

è l'unione di due doppi settori circolari  $S_\epsilon, \Sigma_\epsilon$  che si toccano solo in  $(x_0, y_0)$  (e non intersecano la retta  $x = x_0$  salvo che in tale punto), della forma

$$S_\epsilon = \{(x, y) \in B_{r_\epsilon} : y - y_0 = (\tan \vartheta)(x - x_0), \vartheta \in [\vartheta_1 - d_\epsilon, \vartheta_1 + d'_\epsilon]\},$$

$$\Sigma_\epsilon = \{(x, y) \in B_{r_\epsilon} : y - y_0 = (\tan \vartheta)(x - x_0), \vartheta \in [\vartheta_2 - \delta_\epsilon, \vartheta_2 + \delta'_\epsilon]\},$$

ove le quantità positive  $d_\epsilon, d'_\epsilon, \delta_\epsilon, \delta'_\epsilon$  tendono a 0 per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Utilizzando la prima delle due stime fondamentali, si vede subito che i punti di  $Z \cap B_{r_\epsilon}$  giacciono nei due doppi settori circolari sopra descritti: infatti se  $(x, y) \in B_{r_\epsilon}$  e  $F(x, y) = 0$  si ha

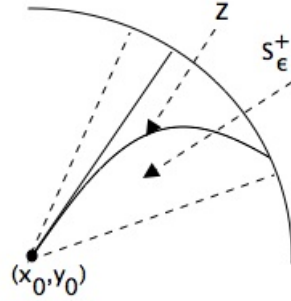
$$|Q(x - x_0, y - y_0)| \leq 2\epsilon[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2],$$

da cui  $|\overline{Q}(x - x_0, y - y_0)| \leq 2\epsilon < 3\epsilon$ .

Affermiamo che dentro ciascuna delle quattro parti di questi doppi settori, ad esempio in

$$S_\varepsilon^+ = \{(x, y) \in S_\varepsilon : x > x_0\},$$

per ogni  $r \in ]0, r_\varepsilon[$  vi è esattamente un punto  $(x_r, y_r)$  che ha distanza  $r$  da  $(x_0, y_0)$  e che sta in  $Z$ . Supponiamo, ad esempio, che sulla frontiera di  $S_\varepsilon^+$  risulti



$$\bar{Q}(x, y) = \begin{cases} 3\varepsilon & \text{sulla retta } y - y_0 = [\tan(\vartheta_1 + d'_\varepsilon)](x - x_0) \\ -3\varepsilon & \text{sulla retta } y - y_0 = [\tan(\vartheta_1 - d_\varepsilon)](x - x_0) \end{cases}$$

(il segno di  $\bar{Q}$  potrebbe essere l'opposto, a seconda dei segni di  $a, b, c$ ). Da qui deduciamo che  $F(x, y) > 0$  sulla prima retta e  $F(x, y) < 0$  sulla seconda retta: infatti, dalla prima stima fondamentale si ha, quando  $(x, y)$  appartiene alla prima retta,

$$F(x, y) \geq \frac{1}{2}Q(x - x_0, y - y_0) - \varepsilon[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = \frac{\varepsilon}{2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2],$$

mentre quando  $(x, y)$  appartiene alla seconda retta si ha, analogamente,

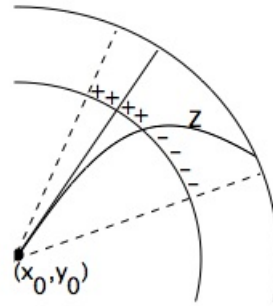
$$F(x, y) \leq \frac{1}{2}Q(x - x_0, y - y_0) + \varepsilon[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = -\frac{\varepsilon}{2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2].$$

Proveremo adesso quanto affermato, ossia che per ogni  $r \in ]0, r_\varepsilon[$  esiste un unico punto  $(x_r, y_r) \in S_\varepsilon^+$ , a distanza  $r$  da  $(x_0, y_0)$ , tale che  $F(x_r, y_r) = 0$ .

Consideriamo la restrizione di  $f$  all'arco di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r$  contenuto in  $S_\varepsilon^+$ :

$$g(\vartheta) = F(x_0 + r \cos \vartheta, y_0 + r \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [\vartheta_1 - d_\varepsilon, \vartheta_1 + d'_\varepsilon].$$

Essendo  $g(\vartheta_1 - d_\varepsilon) < -\frac{\varepsilon}{2}r^2$  e  $g(\vartheta_1 + d'_\varepsilon) > \frac{\varepsilon}{2}r^2$ , per il teorema degli zeri esiste almeno un punto  $\vartheta_r \in ]\vartheta_1 - d_\varepsilon, \vartheta_1 + d'_\varepsilon[$  tale che  $g(\vartheta_r) = 0$ . Tale punto è unico: se infatti vi fosse un altro punto  $\vartheta'_r \in ]\vartheta_1 - d_\varepsilon, \vartheta_1 + d'_\varepsilon[$  tale che  $g(\vartheta'_r) = 0$ , per il teorema di Rolle troveremmo un terzo punto  $\vartheta_0 \in ]\vartheta_1 - d_\varepsilon, \vartheta_1 + d'_\varepsilon[$  in cui  $g'(\vartheta_0) = 0$ , ossia



$$r \left\langle \nabla F(x_0 + r \cos \vartheta, y_0 + r \sin \vartheta), \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} \right\rangle_2 = 0.$$

Notiamo però che per definizione di  $\vartheta_1$  si ha

$$0 = Q(\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1) = \left\langle \frac{1}{2} \nabla Q(\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1), \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} \right\rangle_2$$

e dunque

$$\frac{1}{2}\nabla Q(\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1) = \pm \left| \frac{1}{2}\nabla Q(\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1) \right|_2 \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}.$$

Ne seguirebbe, utilizzando la seconda stima fondamentale,

$$\begin{aligned} 2mr &\leq 2\sqrt{(ar \cos \vartheta_1 + br \sin \vartheta_1)^2 + (br \cos \vartheta_1 + cr \sin \vartheta_1)^2} = \\ &= |\nabla Q(r \cos \vartheta_1, r \sin \vartheta_1)|_2 = \left| \left\langle \nabla Q(r \cos \vartheta_1, r \sin \vartheta_1), \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \right\rangle \right|_2 \leq \\ &\leq \left| \left\langle \nabla Q(r \cos \vartheta_1, r \sin \vartheta_1), \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \right\rangle_2 - \left\langle \nabla Q(r \cos \vartheta_0, r \sin \vartheta_0), \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} \right\rangle_2 \right| + \\ &\quad + \left| \left\langle \nabla Q(r \cos \vartheta_0, r \sin \vartheta_0), \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} \right\rangle_2 \right| \leq \\ &\leq Kr|\vartheta_1 - \vartheta_0| + \left| \left\langle \nabla Q(r \cos \vartheta_0, r \sin \vartheta_0), \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} \right\rangle_2 - \frac{1}{r} g'(\vartheta_0) \right| \leq \\ &\leq Kr(d_\varepsilon \vee d'_\varepsilon) + |\nabla Q(r \cos \vartheta_0, r \sin \vartheta_0) - \nabla F(x_0 + r \cos \vartheta_0, y_0 + r \sin \vartheta_0)|_2 \leq \\ &\leq Kr(d_\varepsilon \vee d'_\varepsilon) + \varepsilon r, \end{aligned}$$

con  $K$  costante opportuna; dopo aver semplificato  $r$ , per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo si avrebbe l'assurdo.

Abbiamo così mostrato che per ogni  $r \in ]0, r_\varepsilon[$  l'insieme  $Z \cap S_\varepsilon^+$  contiene esattamente un punto  $(x_r, y_r)$  a distanza  $r$  da  $(x_0, y_0)$ . Proviamo che l'insieme di questi punti  $(x_r, y_r)$  è il grafico della funzione che stiamo cercando. In ciascun punto  $(x_{r_0}, y_{r_0})$  il teorema 1.9.2 è applicabile, essendo  $F(x_{r_0}, y_{r_0}) = 0$  e  $\nabla F(x_{r_0}, y_{r_0}) \neq \mathbf{0}$ : quindi, ciascuno di tali punti è il centro di un intorno  $U_{r_0}$  tale che  $Z \cap U_{r_0}$  è il grafico di una funzione implicita  $f_{r_0}$ , di classe  $C^2$  (essendo  $F$  di classe  $C^2$ ), della variabile  $x$ , visto che abbiamo supposto  $c \neq 0$ . I punti  $(x_r, y_r)$  che sono dentro  $U_{r_0}$  sono dunque punti della forma  $(x, f_{r_0}(x))$ .

È anche chiaro, a questo punto, che se  $U_{r_0} \cap U_{r_1} \neq \emptyset$  le funzioni implicite  $f_{r_0}$  e  $f_{r_1}$  coincidono su  $U_{r_0} \cap U_{r_1}$ . Si ha dunque un'unica funzione  $f(x)$ , definita in  $]x_0, x_0 + r_\varepsilon[$ , di classe  $C^2$ , tale che  $F(x, f(x)) = 0$ . Notiamo che  $f(x) \rightarrow y_0$  per  $x \rightarrow x_0^+$ , dato che il grafico di  $f$  è contenuto in  $S_\varepsilon^+$ .

Adesso, per concludere, vogliamo provare che  $f'(x_0)$  esiste ed è uguale a  $\tan \vartheta_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}$ . A questo scopo osserviamo che

$$\tan(\vartheta_1 - d\varepsilon) \leq \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} \leq \tan(\vartheta_1 + d'_\varepsilon) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + r_\varepsilon[.$$

Sia allora  $\{x_n\} \subset ]x_0, x_0 + r_\varepsilon[$  una successione convergente a  $x_0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Per compattezza, esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k}) - y_0}{x_{n_k} - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che  $\lambda = \tan \vartheta_1$ . Essendo  $F(x, f(x)) = 0$ , la prima stima fondamentale ci dice che

$$|Q(x - x_0, y - y_0)| \leq 2\varepsilon[(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2],$$

cioè, raccogliendo  $(x - x_0)^2$ ,

$$\left| a + 2b \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} + c \left( \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} \right)^2 \right| \leq 2\varepsilon \left[ 1 + \left( \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} \right)^2 \right].$$

Ne segue, mettendo  $x_{n_k}$  al posto di  $x$  e passando al limite,

$$|a + 2b + c\lambda^2| \leq 2\varepsilon(1 + \lambda^2),$$

ove a secondo membro compare una quantità arbitrariamente piccola. Si deduce quindi che  $a + 2b + c\lambda^2 = 0$ , ossia  $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$ ; ma dal momento che  $\tan(\vartheta_1 - d\varepsilon) \leq \lambda \leq \tan(\vartheta_1 + d'\varepsilon)$ , si conclude che  $\lambda = \tan \vartheta_1$ . Pertanto, ogni successione  $\{x_n\}$  convergente a  $x_0$  ha una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $\frac{f(x_{n_k}) - y_0}{x_{n_k} - x_0} \rightarrow \tan \vartheta_1$ : è facile allora dedurre che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = \tan \vartheta_1.$$

Dunque  $f'(x_0)$  è proprio il coefficiente angolare del segmento  $Z \cap S_\varepsilon^+$ .

Nel caso in cui  $c = 0$ , la funzione implicita è necessariamente della forma  $x = g(y)$  e si trova in questo caso

$$g'(y_0) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1}{\frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}},$$

risultato che coincide col precedente.

I discorsi sono del tutto analoghi per l'altro pezzo  $S_\varepsilon^-$  di  $S_\varepsilon$  e per l'altro settore  $\Sigma_\varepsilon$ . Ciò conclude finalmente la dimostrazione del teorema 1.9.5.  $\square$

## Il teorema del Dini nel caso generale

Ed eccoci all'enunciato del teorema delle funzioni implicite nel caso generale. Scriveremo  $N = r + k$ ,  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k$ , e di conseguenza denoteremo i punti di  $\mathbb{R}^N$  come  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ . Se  $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ , denoteremo rispettivamente con  $\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e con  $\mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  le matrici (rispettivamente  $k \times r$  e  $k \times k$ )

$$\left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x^h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}_{i=1, \dots, k; h=1, \dots, r}, \quad \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial y^j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}_{i, j=1, \dots, k}.$$

**Teorema 1.9.6 (del Dini, caso generale)** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k$  e sia  $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^k)$ . Sia  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  tale che*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}, \quad \det \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^r$ , un intorno  $W$  di  $\mathbf{y}_0$  in  $\mathbb{R}^k$  ed una funzione  $\mathbf{f} : V \rightarrow W$  tali che

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times W, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x});$$

la funzione implicita  $\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  e la sua matrice Jacobiana ( $k \times r$ ) è

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{D}_y\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))]^{-1} \cdot [\mathbf{D}_x\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))] \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

**Dimostrazione** Per ipotesi  $\mathbf{F}$  è differenziabile nel punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ; essendo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ , possiamo scrivere

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{D}_x\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}_y\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

ove  $\mathbf{v}$  è una funzione di  $C^1(A, \mathbb{R}^k)$  tale che

$$\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_r^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|_k^2}} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{per} \quad \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_r^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|_k^2} \rightarrow 0.$$

Dato che, per ipotesi, la matrice  $\mathbf{D}_y\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  è invertibile, dalla relazione precedente deduciamo

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{B}\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A,$$

ove si è posto per comodità di scrittura

$$\mathbf{B} = [\mathbf{D}_y\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]^{-1}, \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{D}_y\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]^{-1}\mathbf{D}_x\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0).$$

Vogliamo applicare a questa relazione il teorema delle contrazioni. A questo scopo poniamo

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 - \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A;$$

la  $\mathbf{g}$  è una applicazione affine di  $\mathbb{R}^r$  in  $\mathbb{R}^k$ , mentre la  $\mathbf{G}$  è una funzione di classe  $C^1(A, \mathbb{R}^k)$  con

$$|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_k \leq \|\mathbf{B}\|_{\mathcal{M}_k} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_k,$$

ed in particolare  $\mathbf{G}$  è nulla in  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , con differenziale nullo in tale punto. Adesso osserviamo che per  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A$  si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

quindi il nostro obiettivo è quello di trovare un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^r$  ed un intorno compatto  $V$  di  $\mathbf{y}_0$  in  $\mathbb{R}^k$  tali che, per ogni fissato  $\mathbf{x} \in U$ , l'applicazione

$$\mathbf{T}_x(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

trasformi  $V$  in  $V$  e sia una contrazione. Dal teorema 1.8.2 seguirà allora che per ogni  $\mathbf{x} \in U$  esisterà un unico  $\mathbf{y} \in V$ , che battezeremo  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , tale che  $\mathbf{T}_x(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ , ossia

$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ . Per  $\rho > 0$  denotiamo con  $V_\rho$  la palla di centro  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^r$  e con  $W_\rho$  la palla di centro  $\mathbf{y}_0$  in  $\mathbb{R}^k$ , ed osserviamo che, essendo  $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ , si ha, fissati  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in V_\rho \times W_\rho$  e posto  $(\boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\eta}_t) = ((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x}', (1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{y}')$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')|_k &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\eta}_t) dt \right|_k \leq \\ &= \left| \int_0^1 ([\mathbf{G}_x(\boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\eta}_t) - \mathbf{G}_x(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [\mathbf{G}_y(\boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\eta}_t) - \mathbf{G}_y(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)](\mathbf{y} - \mathbf{y}')) dt \right|_k ; \end{aligned}$$

dunque esiste  $\rho_0 > 0$  tale che  $|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')|_k \leq \frac{1}{2}[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_r + |\mathbf{y} - \mathbf{y}'|_k]$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V_{\rho_0}$  e  $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in W_{\rho_0}$ , ed in particolare

$$|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_k \leq \frac{1}{2} [|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_r + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|_k] \quad \forall \mathbf{x} \in V_{\rho_0}, \quad \forall \mathbf{y} \in W_{\rho_0}.$$

Fissiamo ora  $\rho_1 \in ]0, \rho_0]$  e notiamo che per  $\mathbf{x} \in V_{\rho_1}$  l'applicazione  $\mathbf{T}_x$  manda  $W_{\rho_0}$  in sé, a patto che  $\rho_1$  sia sufficientemente piccolo: infatti

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}_x(\mathbf{y}) - \mathbf{y}_0|_k &= |\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}_0|_k \leq \\ &\leq \|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{M}_{k,r}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_r + \frac{1}{2} (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_r + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|_k) \leq \\ &\leq \left[ \|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{M}_{k,r}} + \frac{1}{2} \right] \rho_1 + \frac{\rho_0}{2} \leq \rho_0 \end{aligned}$$

pur di scegliere  $\rho_1 \leq \frac{\rho_0}{2\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{M}_{k,r}} + 1}$ . Inoltre, per  $\mathbf{x} \in V_{\rho_1}$  la  $\mathbf{T}_x$  è una contrazione in  $W_{\rho_0}$ , poiché

$$|\mathbf{T}_x(\mathbf{y}) - \mathbf{T}_x(\mathbf{y}')|_k = |\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')|_k \leq \frac{1}{2} |\mathbf{y} - \mathbf{y}'|_k \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in W_{\rho_0}.$$

Essendo  $W_{\rho_0}$  uno spazio metrico completo con la distanza indotta dalla norma euclidea di  $\mathbb{R}^k$ , si conclude che per ogni  $\mathbf{x} \in V_{\rho_1}$  esiste un unico punto  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W_{\rho_0}$  tale che  $\mathbf{T}_x(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , il che significa, per quanto detto in precedenza,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ . Naturalmente si ha, in particolare,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ .

Abbiamo così costruito la nostra funzione implicita  $\mathbf{f} : V_{\rho_1} \rightarrow W_{\rho_0}$ ; ne analizzeremo adesso le proprietà di regolarità. Sappiamo dal teorema 1.8.3 che  $\mathbf{f}$  è continua. Quindi, anche  $\mathbf{x} \mapsto \det \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  è continua in  $V_{\rho_1}$ ; allora, essendo  $\det \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$ , rimpicciolendo eventualmente  $\rho_1$  avremo

$$\det \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V_{\rho_1}.$$

Proviamo che  $\mathbf{f}$  è differenziabile in  $V_{\rho_1}$ . Sia  $\mathbf{x}' \in V_{\rho_1}$ : poiché  $\mathbf{F}$  è differenziabile nel punto  $(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}')) \in V_{\rho_1} \times W_{\rho_0}$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \\ &= \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'))(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'))(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

con

$$\frac{\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_r^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}')|_k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_r^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}')|_k^2} \rightarrow 0.$$

Dunque

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}') = -\mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'))^{-1} \cdot \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'))(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'))^{-1} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})),$$

ed a secondo membro il primo addendo è una funzione lineare di  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ , mentre il secondo è infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_r$ , in virtù delle proprietà di  $\mathbf{w}$  e di  $\mathbf{f}$ . Si ha dunque

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}') = -\mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'))^{-1} \cdot \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}')) \quad \forall \mathbf{x}' \in V_{\rho_1},$$

e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Osservazioni 1.9.7 (1)** A complemento di quanto mostrato nel teorema 1.9.5, osserviamo che il teorema del Dini esprime una condizione sufficiente per l'esistenza della funzione implicita, ma niente affatto necessaria. Basta pensare che, nel caso  $k = 1$ , se  $F$  verifica le ipotesi del teorema del Dini, l'insieme  $Z = \{(\mathbf{x}, y) \in A : F(\mathbf{x}, y) = 0\}$  è anche l'insieme dove si annulla  $F^2$ :  $Z$  è dunque grafico di una funzione implicita nonostante che  $\mathbf{D}(F^2)(\mathbf{x}, y) = \mathbf{0}$  per ogni  $(\mathbf{x}, y) \in Z$ . Addirittura  $Z$  potrebbe essere globalmente, e non solo localmente, grafico di una funzione, senza tuttavia soddisfare le ipotesi del teorema del Dini: basta fissare  $g : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  e porre  $Z = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{r+1} : (y - g(\mathbf{x}))^2 = 0\}$ .

**(2)** Il luogo  $Z = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{r+k} : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$ , nelle ipotesi del teorema 1.9.6, in un intorno di  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  è una *varietà regolare*  $r$ -dimensionale di classe  $C^1$ , ossia l'immagine di un aperto di  $\mathbb{R}^r$  mediante un'applicazione di classe  $C^1$  a valori in  $\mathbb{R}^{r+k}$  con matrice Jacobiana di rango massimo  $r$  (nel paragrafo 4.11 daremo una definizione precisa di varietà). L'insieme  $Z$  ha nel punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  un iperpiano tangente  $r$ -dimensionale, descritto dal sistema di  $k$  equazioni

$$\mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}_y \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}.$$

**(3)** Nel caso tridimensionale,  $N = 3$ , si hanno due sole possibilità:  $r = 1$  e  $k = 2$ , ossia una sola equazione con tre incognite, oppure  $r = 2$  e  $k = 1$ , cioè due equazioni con tre incognite. In entrambi questi casi il teorema del Dini può essere provato senza l'uso delle contrazioni, ma semplicemente adattando la dimostrazione del caso bidimensionale (teorema 1.9.2): si vedano gli esercizi 1.9.3 e 1.9.4.

## Applicazioni localmente invertibili

Dato un sistema di  $k$  equazioni in  $N = r + k$  incognite, il teorema delle funzioni implicite permette, come si è visto, di ricavare  $k$  incognite in funzione delle altre  $r$ . Cosa succede quando abbiamo  $N$  equazioni in  $N$  incognite? In questo caso, essendo  $r = 0$ , dovrebbe



essere possibile ricavare tutte le  $N$  incognite, ossia risolvere completamente il sistema. Più generalmente, consideriamo il problema di “invertire” un sistema della forma

$$\begin{cases} y^1 = F_1(x^1, \dots, x^N) \\ y^2 = F_2(x^1, \dots, x^N) \\ \dots\dots\dots \\ y^N = F_N(x^1, \dots, x^N), \end{cases}$$

(in forma vettoriale,  $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ): vogliamo allora ricavare le  $N$  variabili  $x^i$  in funzione delle  $N$  variabili  $y^j$ . Si tratta dunque di vedere se l'applicazione

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x^1, \dots, x^N), \dots, F_N(x^1, \dots, x^N))$$

è invertibile.

In certi casi, sotto adeguate ipotesi, questo problema lo sappiamo risolvere: ad esempio, quando  $N = 1$  e  $F$  è una funzione di classe  $C^1$ , definita su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  a valori in un altro intervallo  $J \subseteq \mathbb{R}$ , è noto che se  $F' \neq 0$  in  $I$  allora  $F$  è strettamente monotona e dunque ha l'inversa  $F^{-1}$ , la quale è a sua volta di classe  $C^1$  con

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(F^{-1}(y))}.$$

Inoltre, se  $N \geq 1$ , se  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_N$  e se  $\mathbf{F}$  è l'applicazione lineare

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

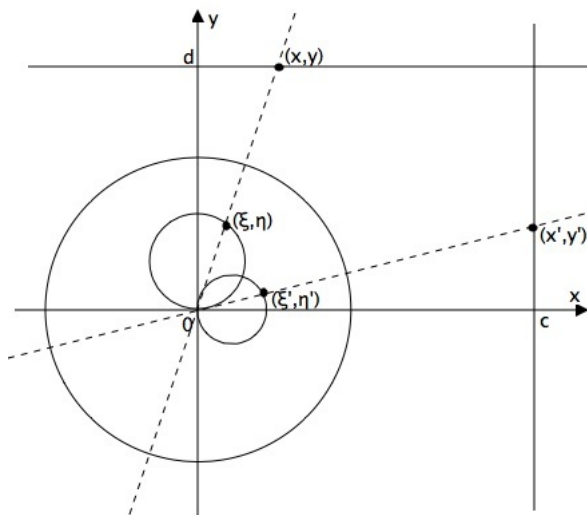
allora si sa che  $\mathbf{F}$  è invertibile se e solo se  $\mathbf{B}$  è non singolare, vale a dire  $\det \mathbf{B} \neq 0$ , ed in tal caso, naturalmente, si ha  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{y}$  per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ .

Nel caso generale, con  $N \geq 1$  e  $\mathbf{F}$  funzione generica di classe  $C^1$ , le cose sono più complicate e non sempre si ha l'invertibilità.

**Esempi 1.9.8 (1)** Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  la *trasformazione per raggi vettori reciproci*

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

definita per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Al vettore  $P = (x, y)$  viene associato il vettore ad esso concorde  $Q = (\xi, \eta)$  tale che  $|P|_2 \cdot |Q|_2 = 1$ : infatti  $\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . In particolare, i punti interni alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  vengono trasformati in punti esterni, e viceversa. Questa applicazione è di classe  $C^\infty$ , è invertibile su tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , e l'inversa è



$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2};$$

dunque essa stessa è una trasformazione per raggi vettori reciproci: anzi, la trasformazione è l'inversa di se stessa. Si osservi che le rette  $x = c$  e  $y = d$  sono trasformate rispettivamente nelle circonferenze

$$\left(\xi - \frac{1}{2c}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4c^2}, \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{2d}\right)^2 = \frac{1}{4d^2},$$

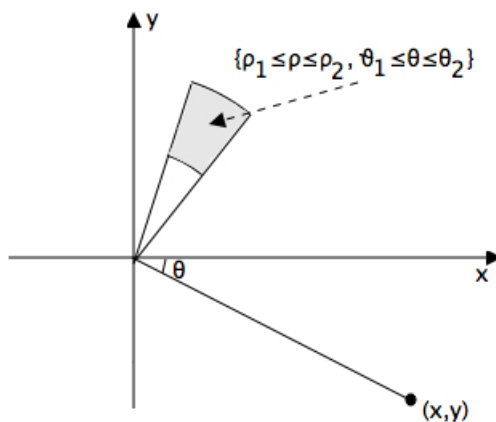
e reciprocamente.

(2) La corrispondenza

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta,$$

ove  $\rho \geq 0$  e  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , fornisce la rappresentazione dei punti del piano in *coordinate polari*: come si sa,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  misura la distanza del punto  $P = (x, y)$  dall'origine  $O = (0, 0)$ , mentre  $\vartheta$  è l'angolo che il segmento  $OP$  forma con il semiasse delle  $x$  positive. Se  $\rho \geq 0$  e  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , l'applicazione

$$\mathbf{F}(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) = (x, y)$$



è di classe  $C^\infty$  ed è surgettiva ma non iniettiva, poiché  $(0, 0) = \mathbf{F}(0, \vartheta)$  con  $\vartheta$  arbitrario, mentre per i punti  $(\rho, \vartheta)$  con  $\rho > 0$  si ha  $\mathbf{F}(\rho, \vartheta) = \mathbf{F}(\rho, \vartheta + 2\pi)$ . Però, fissato un punto  $(\rho_0, \vartheta_0) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ , la restrizione di  $\mathbf{F}$  ad un opportuno intorno  $U$  di  $(\rho_0, \vartheta_0)$  è iniettiva; in particolare, la restrizione di  $\mathbf{F}$  alla striscia  $]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi]$  ha per immagine  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , e l'inversa è

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

ossia, più precisamente,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y = 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

(3) Questo esempio è simile al precedente. Per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  poniamo

$$\mathbf{F}(x, y) = (\xi, \eta), \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \xi = e^x \cos y \\ \eta = e^x \sin y. \end{cases}$$

Questa trasformazione è di classe  $C^\infty$ , con immagine  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ; se proviamo ad invertirla, troviamo

$$x = \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \begin{cases} \cos y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ \sin y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \end{cases}$$

ma è chiaro che la  $y$  è determinata soltanto a meno di multipli di  $2\pi$ . Come nell'esempio precedente, l'immagine della restrizione di  $\mathbf{F}$  alla striscia  $\mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[$  è l'insieme  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\xi, \eta) : \xi \leq 0, \eta = 0\}$ , e l'inversa è determinata dalle formule sopra scritte.

Si noti che, identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , la funzione  $\mathbf{F}$  è in effetti l'esponenziale complessa: se  $(x, y) = x + iy = z$  si ha

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Come si sa, la funzione  $e^z$  è periodica di periodo  $2\pi i$  e dunque non è iniettiva, ma lo diventa, appunto, su una qualunque striscia del tipo  $\mathbb{R} \times ]y_0 - \pi, y_0 + \pi[$ . Nel caso  $y_0 = 0$ , si ha  $\mathbf{F}^{-1}(e^z) = \mathbf{F}^{-1}(\xi, \eta) = (x, y)$  con  $x = \ln |e^z|$  e  $y = \arg(e^z)$ . Questa è la via che permette di definire il *logaritmo complesso*: se  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , si pone

$$\log w = \ln |w| + i \arg w;$$

si tratta di una funzione *multivoca*, ossia a più valori, che diventa univoca allorché si sceglie una determinazione dell'argomento di  $w$ . Con questa definizione del logaritmo si ha

$$e^{\log w} = w \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \log e^z = z + 2k\pi i \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Gli esempi precedenti mostrano che in genere ci dobbiamo aspettare l'invertibilità di opportune restrizioni di una data funzione, ossia un'invertibilità di carattere *locale*.

**Definizione 1.9.9** *Siano  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\mathbf{F} : A \rightarrow B$  una funzione. Fissato  $\mathbf{x}_0 \in A$ , diciamo che  $\mathbf{F}$  è localmente invertibile nel punto  $\mathbf{x}_0$  se esistono un intorno  $U \subseteq A$  di  $\mathbf{x}_0$  ed un intorno  $V \subseteq B$  di  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  tali che  $\mathbf{F}|_U$  sia un'applicazione bigettiva fra  $U$  e  $V$ .*

È evidente che tutte le funzioni invertibili sono anche localmente invertibili in ogni punto del loro insieme di definizione. Il viceversa non vale, come mostrano gli esempi 1.9.8 (2)-(3).

**Teorema 1.9.10 (di invertibilità locale)** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  un'applicazione di classe  $C^1$ . Indichiamo con  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$  il determinante della matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Se in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  risulta  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , allora  $\mathbf{F}$  è localmente invertibile nel punto  $\mathbf{x}_0$ , con inversa di classe  $C^1$  in un opportuno intorno  $V$  di  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ ; inoltre risulta*

$$\mathbf{DF}^{-1}(\mathbf{y}) = [\mathbf{DF}(\mathbf{F}|_U^{-1}(\mathbf{y}))]^{-1} \quad \forall \mathbf{y} \in V.$$

*Infine, se  $\mathbf{F}$  è di classe  $C^m$ , allora anche  $\mathbf{F}^{-1}$  è di classe  $C^m$ .*

**Dimostrazione** Poniamo  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  e consideriamo la funzione  $\mathbf{G} : A \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , definita da

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Chiaramente  $\mathbf{G}$  è di classe  $C^1$ , e

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}, \quad \det \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (-1)^N J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Quindi, per il teorema delle funzioni implicite, esistono un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$ , un intorno  $V$  di  $\mathbf{y}_0$  ed una funzione  $\mathbf{g} : V \rightarrow U$  di classe  $C^1$ , tali che per  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$  risulta

$$\mathbf{y} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

In altre parole, per  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$  si ha  $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ , e dunque  $\mathbf{g}$  è l'inversa di  $\mathbf{F}|_U$ . Ciò prova che  $\mathbf{F}$  è localmente invertibile in  $\mathbf{x}_0$ . Inoltre il teorema del Dini ci assicura che  $\mathbf{g}$  è di classe  $C^1$  con

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}) &= -[\mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})]^{-1} \cdot [\mathbf{D}_{\mathbf{y}} \mathbf{G}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})] = \\ &= -[-\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))]^{-1} \cdot I_N = [\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{F}|_U^{-1}(\mathbf{y}))]^{-1} \quad \forall \mathbf{y} \in V. \end{aligned}$$

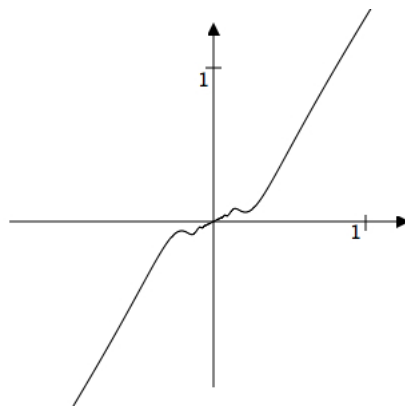
Anche l'ultima affermazione dell'enunciato segue dal teorema del Dini: se  $\mathbf{F} \in C^m$ , anche  $\mathbf{G} \in C^m$  e quindi la funzione implicita  $\mathbf{g}$ , ossia  $\mathbf{F}|_U^{-1}$ , è di classe  $C^m$ .  $\square$

**Osservazione 1.9.11** Il teorema di invertibilità locale non vale se si suppone che  $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  sia soltanto differenziabile. Ad esempio, per  $N = 1$  la funzione

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile (ossia differenziabile) in ogni punto di  $\mathbb{R}$ , con derivata data da

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0, \end{cases}$$



dunque  $F'$  è discontinua in 0. In tale punto si ha  $F'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ , e tuttavia  $F$  non è localmente invertibile in 0, dato che non è monotona in alcun intervallo di centro 0.

## Il teorema del rango

Ci rimane da considerare il caso di una funzione  $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ , di classe  $C^1$ , ove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^r$  con  $r = N - k < N$ . In questo caso, naturalmente, non possiamo aspettarci che  $\mathbf{F}$  sia surgettiva: quello che vogliamo fare è analizzare la struttura dell'insieme  $\mathbf{F}(A) \subset \mathbb{R}^N$ , ossia dell'immagine di  $\mathbf{F}$ . Supporremo, in analogia con i teoremi 1.9.6 e

1.9.10, che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  abbia rango massimo  $r$ . Il “teorema del rango”, che andiamo ad enunciare, ci dice che  $A$ , localmente, ha immagine mediante  $\mathbf{F}$  che è isomorfa ad una palla di  $\mathbb{R}^r$ , ed in particolare è dotata in ogni punto di iperpiano  $r$ -dimensionale tangente.

**Teorema 1.9.12 (del rango)** *Sia  $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  una funzione di classe  $C^1$ , definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^r$  ove  $r = N - k < N$ . Supponiamo che in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  la matrice Jacobiana  $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)$  abbia rango massimo  $r$ , e che in particolare risulti*

$$\det \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}_0) \right\}_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

*Allora esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\mathbf{F}(U)$  è il grafico di una funzione  $\mathbf{h}$  di  $r$  variabili, a valori in  $\mathbb{R}^k$ , di classe  $C^1$ ; inoltre l'iperpiano  $r$ -dimensionale tangente in  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  a questo grafico, cioè a  $\mathbf{F}(U)$ , è il piano per  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  generato dai vettori  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Infine, se  $\mathbf{F} \in C^m$ , allora anche  $\mathbf{h}$  è di classe  $C^m$ .*

**Dimostrazione** Per maggior chiarezza, scriviamo i punti di  $\mathbb{R}^N$  come  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , ove  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$  e  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ . Analogamente, scriviamo  $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ , ove  $\mathbf{f} = (F_1, \dots, F_r)$  e  $\mathbf{g} = (F_{r+1}, \dots, F_N)$ . I punti di  $\mathbf{F}(A)$  sono della forma

$$\begin{cases} y^j = f_j(x^1, \dots, x^r), & j = 1, \dots, r \\ z^i = g_i(x^1, \dots, x^r), & i = r + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (x^1, \dots, x^r) \in A.$$

Nelle prime  $r$  di queste relazioni possiamo ricavare le  $x^i$  in funzione delle  $y^j$ : infatti  $\mathbf{f}$  è una funzione localmente invertibile da un opportuno intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  ad un opportuno intorno  $V$  di  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , in virtù dell'ipotesi fatta sulla matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  e del teorema 1.9.10. Pertanto, l'insieme  $\mathbf{F}(U)$  può essere descritto come segue:

$$\mathbf{F}(U) = \{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{F}(A) : \mathbf{y} \in V, \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))\}.$$

Dunque  $\mathbf{F}(U)$  è il grafico della funzione  $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}^{-1}$ , la quale è chiaramente di classe  $C^1$ . Inoltre il piano  $r$ -dimensionale tangente al grafico di  $\mathbf{h}$  nel punto  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  è dato dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{Dh}(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r,$$

ovvero

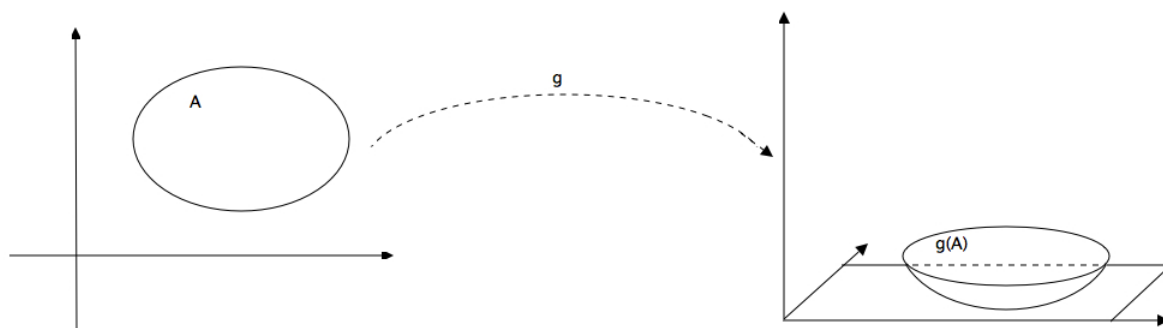
$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{D}[\mathbf{g} \circ \mathbf{f}^{-1}](\mathbf{y}_0) \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{Dg}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)]^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r;$$

equivalentemente possiamo scrivere, scrivendo i punti di  $\mathbb{R}^N$  come  $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{u}$  e ponendo  $\mathbf{t} = [\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)]^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)\mathbf{t}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^r.$$

Ciò mostra che il piano tangente è generato dagli  $r$  vettori colonna della matrice  $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)$ . Infine, se supponiamo  $\mathbf{F} \in C^m$ , il teorema 1.9.10 ci dice che  $\mathbf{f}^{-1} \in C^m$  e quindi anche  $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}^{-1}$  è di classe  $C^m$ .  $\square$

**Osservazione 1.9.13** Il senso del teorema del rango è il seguente: se  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r+k}$  è di classe  $C^1$  con matrice Jacobiana di rango massimo  $r$ , allora localmente  $A$  ha per immagine una “copia deformata” di una palla aperta di  $\mathbb{R}^r$ . In altre parole, per ogni punto  $\mathbf{x} \in A$  vi è un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^r$  tale che in  $\mathbf{F}(U)$  è definita un’applicazione  $\mathbf{k}$ , a valori in un aperto di  $\mathbb{R}^r$ , la quale è un *omeomorfismo*, vale a dire è bigettiva e continua; in più l’inversa è di classe  $C^1$ . Infatti, essendo  $\mathbf{F}(U)$  grafico di un’applicazione  $\mathbf{h}$ , l’omeomorfismo è definito da  $\mathbf{k}(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ , cioè dalla proiezione dei punti del grafico di  $\mathbf{h}$  sul piano  $r$ -dimensionale delle variabili  $\mathbf{y}$ , e l’inversa è l’applicazione  $\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y}))$ . L’insieme  $\mathbf{F}(A)$  è una *varietà  $r$ -dimensionale regolare*.



**Esempi 1.9.14 (1)** Sia  $r = 1$  e prendiamo  $A = ]a, b[$ . Per un’applicazione  $\mathbf{F} : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^N$  avere matrice Jacobiana di rango massimo in ogni punto significa dire semplicemente che  $\mathbf{F}'(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in ]a, b[$ . L’applicazione  $\mathbf{F}$  è detta allora *curva regolare*; la retta tangente in ogni punto  $\mathbf{F}(t_0)$  si scrive, in forma parametrica,

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(t_0) + s \mathbf{F}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

**(2)** Se  $r = 2$  ed  $A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$ , un’applicazione  $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^N)$  con matrice Jacobiana di rango 2 in ogni punto si chiama *superficie regolare*. Il piano tangente alla superficie in un suo punto  $\mathbf{F}(s_0, t_0)$  ha equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(s_0, t_0) + \sigma \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s}(s_0, t_0) + \tau \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(s_0, t_0), \quad \sigma, \tau \in \mathbb{R}.$$

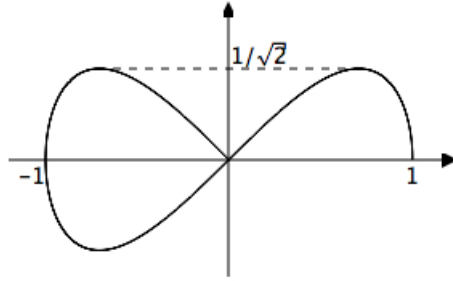
Avrà particolare interesse per noi lo studio del caso  $N = 2, r = 1$ , relativo alle *curve piane*, e dei casi  $N = 3, r = 1, 2$ , relativi a curve e superfici immerse in  $\mathbb{R}^3$ ; studieremo tutto ciò nel capitolo 4.

**Osservazione 1.9.15** Attenzione: il teorema del rango non asserisce che  $\mathbf{F}(A)$  sia localmente una “copia deformata” di una palla aperta di  $\mathbb{R}^r$ . Quello che esso dichiara è che  $A$ , localmente, ha come immagine una “copia deformata” di una palla aperta di  $\mathbb{R}^r$ . La sottile differenza è la seguente: nel teorema del rango si afferma che una palla di  $A$  ha immagine omeomorfa a una palla di  $\mathbb{R}^r$ ; nel primo caso si afferma invece che una palla di  $\mathbb{R}^N$ , intersecata con  $\mathbf{F}(A)$ , è omeomorfa a una palla di  $\mathbb{R}^r$ , e questo può essere falso, come mostra l’esempio che segue.

**Esempio 1.9.16** Consideriamo l’applicazione  $\mathbf{F} : ]0, \frac{3\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\mathbf{F}(t) = (\cos t, \cos t \sin t).$$

È facile verificare che  $\mathbf{F}'(t) \neq \mathbf{0}$  in ogni punto, e tuttavia l'origine, che corrisponde al valore  $t = \pi/2$  del parametro, è un punto del sostegno tale che nessun suo intorno verifica, per  $r = 1$ , il requisito descritto nell'osservazione 1.9.13.



Questa curva non costituisce un controesempio al teorema del rango: infatti, se  $0 < \delta < \pi/2$  l'intorno  $U = ]\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta[$  di  $\pi/2$  in  $\mathbb{R}$  ha immagine  $\mathbf{F}(U)$  che è effettivamente un grafico, poiché non contiene alcun punto del secondo quadrante.

Come abbiamo visto, le superfici di livello relative a funzioni da  $\mathbb{R}^{r+k}$  a  $\mathbb{R}^k$  e le immagini di aperti di  $\mathbb{R}^r$  mediante applicazioni da  $\mathbb{R}^r$  a  $\mathbb{R}^{r+k}$  sono esprimibili localmente, sempre che le funzioni abbiano matrice Jacobiana di rango massimo, come grafici di opportune funzioni di  $r$  variabili; in particolare tali sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^{r+k}$  hanno piano tangente  $r$ -dimensionale e, per questa ragione, come si è detto e come si vedrà meglio nel paragrafo 4.11, si denominano *varietà regolari  $r$ -dimensionali* di classe  $C^1$  (o di classe  $C^m$ , se le funzioni coinvolte sono di classe  $C^m$ ). Una stessa varietà, localmente o (talvolta) globalmente, può essere vista indifferentemente in uno dei tre modi descritti. Ad esempio, la circonferenza  $C$  in  $\mathbb{R}^2$ , di raggio  $r$ , centrata in  $(a, b)$  può essere vista come luogo di zeri

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0\},$$

come grafico

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \pm \sqrt{r^2 - (y - b)^2}\}$$

o come immagine di una applicazione, ossia, come si dice, in *forma parametrica*:

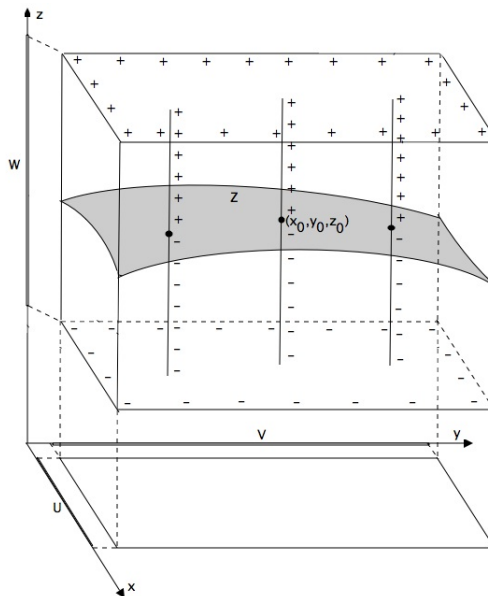
$$C = \mathbf{g}([0, 2\pi]), \quad \mathbf{g}(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t).$$

Notiamo infine che la nozione di varietà che si utilizza in geometria è molto più generale ed anche più complicata della nostra, ma andrebbe ben oltre i nostri scopi.

## Esercizi 1.9

1. Sia  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$ , ove  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x > 0\}$  e  $F(x, y) = y^3 + \ln(x + y) - xy$ . Si verifichi che  $(1, 0) \in Z$  e che in un intorno di tale punto  $Z$  è grafico di una funzione  $g(y)$  di classe  $C^\infty$ ; si determini poi il polinomio di Taylor di  $g$  di centro 0 e grado 2.
2. Sia  $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 1\}$ , ove  $F(x, y) = x^3 + y^3 - x^2y$ . Si provi che  $Z$  ha tre punti di ascissa 1, e che in un intorno di ciascuno di essi  $Z$  è grafico di una funzione  $f(x)$  di classe  $C^\infty$ ; si scriva il polinomio di Taylor di queste funzioni di centro 1 e grado 2.

3. Si provi che se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  tale che in un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in A$  risulti  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  e  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , allora esistono un intorno  $U \times V \times W$  di  $(x_0, y_0, z_0)$ , contenuto in  $A$ , ed una funzione  $f : U \times V \rightarrow W$  di classe  $C^1$ , tali che per  $(x, y, z)$  in  $U \times V \times W$  si ha  $F(x, y, z) = 0$  se e solo se  $z = f(x, y)$ . Si provi inoltre che per ogni  $(x, y) \in U \times V$  valgono le relazioni



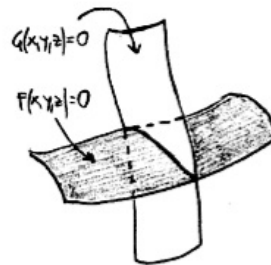
$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}, \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}.$$

4. Si provi che se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$  e  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni di classe  $C^1$  tali che in un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in A$  risulti

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{cases} \quad \det \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) \\ G_x(x_0, y_0, z_0) & G_y(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $U \times V \times W \subseteq A$  di  $(x_0, y_0, z_0)$  e due funzioni  $g : W \rightarrow U$ ,  $h : W \rightarrow V$  di classe  $C^1$ , tali che per  $(x, y, z)$  in  $U \times V \times W$  si ha  $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$  se e solo se  $x = g(z)$  e  $y = h(z)$ . Si provi inoltre che per ogni  $z \in W$  vale la relazione

$$\begin{pmatrix} g'(z) \\ h'(z) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_z \\ G_z \end{pmatrix},$$



ove tutte le funzioni a secondo membro sono calcolate in  $(g(z), h(z), z)$ .

[**Traccia:** uno almeno fra i numeri  $F_x(x_0, y_0, z_0)$  e  $F_y(x_0, y_0, z_0)$ , ad esempio il primo, è diverso da 0. Utilizzando l'esercizio precedente, si provi che in un intorno  $U \times V \times W \subseteq A$  di  $(x_0, y_0, z_0)$  si ha  $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$  se e solo se  $x = k(y, z)$  e  $G(k(y, z), y, z) = 0$ , con  $k$  funzione di classe  $C^1$  tale che, in  $V \times W$ ,

$$k_y(y, z) = -\frac{F_y(k(y, z), y, z)}{F_x(k(y, z), y, z)}, \quad k_z(y, z) = -\frac{F_z(k(y, z), y, z)}{F_x(k(y, z), y, z)}.$$

Posto poi  $\ell(y, z) = G(k(y, z), y, z)$ , si verifichi che  $\ell$  verifica in  $(y_0, z_0)$  le ipotesi del teorema 1.9.2; se ne deduca che in  $U \times V \times W$  si ha  $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$  se e solo se  $x = k(y, z)$  e  $y = h(z)$ , con  $h$  opportuna funzione di classe  $C^1$ . Infine si ricavi la tesi con la  $h$  già trovata e con  $g(z) = k(h(z), z)$ .]



5. Sia  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x + \sin y + \sin z - 1, \cos x + \cos y + \cos z - 1)$$

e poniamo  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}\}$ . Si provi che il punto  $(0, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$  appartiene a  $Z$  e che in un intorno di questo punto si ha  $Z = \{(x, y, z) : y = f(x), z = g(x)\}$  per opportune funzioni  $f, g$ . Si scrivano le equazioni della retta tangente a  $Z$  nel punto  $(0, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ .

6. Si consideri la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^4 y}{y^2 + x^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si verifichi che  $F$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^2$ , con  $|\nabla F(x, y)|_2 > 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ma che intorno all'origine l'insieme  $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$  non è un grafico. Come mai?

7. Si verifichi che l'applicazione  $\mathbf{F} : ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , definita da

$$\mathbf{F}(\rho, \vartheta, \varphi) = (\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta)$$

è localmente invertibile nel punto  $(1, \pi/4, 3\pi)$  e se ne scriva l'inversa in un intorno di tale punto.

8. Posto  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ , in quali punti di  $\mathbb{R}^2$  la  $\mathbf{F}$  è localmente invertibile? In tal caso si scriva  $\mathbf{F}^{-1}$ .

9. Poniamo

$$\mathbf{F}(t) = \left( t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right), \quad t > 0.$$

Si verifichi che  $F$  è una curva regolare, si scriva la funzione di cui  $\mathbf{F}(\mathbb{R}^+)$  è grafico, e si mostri che  $\mathbf{F}(\mathbb{R}^+)$  giace su un piano di  $\mathbb{R}^3$ .

10. Scrivere in forma parametrica, di grafico e di luogo di zeri i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ :

- (i) il cono di altezza  $h$ , con base la circonferenza del piano  $z = 0$  di centro  $(1, 0)$  e raggio 1;
- (ii) l'ellissoide centrato nell'origine di semiassi  $a, b, c$ ;
- (iii) il piano per  $(1, 1, 1)$  parallelo ai vettori  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 0)$ .

## 1.10 Massimi e minimi vincolati

Sia  $K$  un compatto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Per il teorema di Weierstrass,  $f$  assume massimo e minimo su  $K$ . Come determinarli?

Se  $K$  ha punti interni e  $f$  è di classe  $C^1$ , gli eventuali punti di massimo e di minimo

*interni* a  $K$  sono da ricercare, come si sa dall'Analisi I, fra i *punti stazionari* di  $f$  interni a  $K$ . Questo studio, tuttavia, non include gli eventuali punti di massimo o di minimo situati sulla frontiera di  $K$ .

Il problema che ci poniamo qui è la ricerca del massimo e del minimo di una funzione  $f \in C^1(A)$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^N$ , su un insieme compatto  $K \subset A$ , *privo di parte interna*. L'insieme  $K$ , sul quale naturalmente occorrerà fare qualche ipotesi, è detto *vincolo*, ed i valori estremi raggiunti da  $f$  su  $K$  si diranno *massimi e minimi vincolati* (su  $K$ ). Il termine “vincolo” indica appunto che le variabili da cui dipende  $f$  sono vincolate a muoversi dentro  $K$ .

Per i nostri scopi basterà supporre che  $K$  sia una varietà  $r$ -dimensionale ( $r < N$ ) di classe  $C^1$  contenuta nell'aperto  $A$ , oppure, più in generale, l'unione finita di varietà di questo tipo.

**Esempio 1.10.1** Se  $K$  è la frontiera del quadrato di  $\mathbb{R}^2$  di centro l'origine e lato 2, allora  $K$  è l'unione di quattro segmenti di lunghezza 2, ciascuno dei quali è una curva regolare: ad esempio il segmento di estremi  $(-1, -1)$  e  $(-1, 1)$  è descritto dalla parametrizzazione  $x = -1, y = t$ , con  $t \in [-1, 1]$ .

**Definizione 1.10.2** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $f \in C^1(A)$  e sia  $K$  una varietà  $r$ -dimensionale ( $r < N$ ) di classe  $C^1$ , contenuta in  $A$ . Un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  si dice *punto stazionario vincolato per  $f$  su  $K$* , se  $\mathbf{x}_0 \in K$  e se il vettore  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è ortogonale all'iperpiano  $r$ -dimensionale tangente a  $K$  in  $\mathbf{x}_0$ .

**Teorema 1.10.3** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $f \in C^1(A)$  e sia  $K$  una varietà  $r$ -dimensionale ( $r < N$ ) di classe  $C^1$ , contenuta in  $A$ . Se  $\mathbf{x}_0 \in K$  è punto di massimo o di minimo relativo per  $f|_K$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto stazionario vincolato per  $f$  su  $K$ .

**Dimostrazione** Supponiamo che  $K$  sia della forma  $K = \mathbf{g}(U)$ , con  $U$  aperto di  $\mathbb{R}^r$  e  $\mathbf{g}$  funzione di classe  $C^1$  con matrice Jacobiana di rango  $r$  in ogni punto di  $U$ . Sarà, in particolare,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ , con  $\mathbf{y}_0 \in U$ . Dall'ipotesi fatta su  $\mathbf{x}_0$  segue che  $\mathbf{y}_0$  è punto di massimo o di minimo locale per la funzione composta  $F(\mathbf{y}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$ ,  $\mathbf{y} \in U$ . Quindi deve essere

$$D_i F(\mathbf{y}_0) = \sum_{j=1}^r D_j f(\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)) D_i g^j(\mathbf{y}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

ossia

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), D_i \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) \rangle_N = 0, \quad i = 1, \dots, r :$$

ciò significa che  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è ortogonale ai vettori  $D_1 \mathbf{g}(\mathbf{y}_0), \dots, D_r \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ , i quali, in virtù del teorema del rango, sono i generatori del piano  $r$ -dimensionale tangente a  $K$  nel punto  $\mathbf{x}_0$ . Ciò prova che in  $\mathbf{x}_0$  il vettore  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è ortogonale a  $K$ , che è la tesi.  $\square$

Il teorema precedente mostra che la ricerca dei punti di massimo e di minimo di una funzione  $f$  su  $K$  va limitata ai punti stazionari vincolati. Un confronto fra i valori assunti da  $f$  in tali punti fornirà poi i valori massimo e minimo cercati.

**Esempio 1.10.4** Cerchiamo il massimo e il minimo della funzione  $f(x, y) = e^{x-y}$  sulla circonferenza  $K$  di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , che si parametrizza ponendo  $(x, y) = \mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $t \in [-\pi, \pi]$ . Dobbiamo trovare il massimo e il minimo della funzione composta  $f(\cos t, \sin t) = e^{\cos t - \sin t}$ , la cui derivata si annulla quando

$$e^{\cos t - \sin t}(-\sin t - \cos t) = 0.$$

Ciò accade per  $t_1 = -\pi/4$  e  $t_2 = 3\pi/4$ , valori che corrispondono ai punti  $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Essendo  $\mathbf{g}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ , in corrispondenza di questi punti si ha

$$\mathbf{g}'(t_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{g}'(t_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

mentre

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, y_1) &= (e^{x_1 - y_1}, -e^{x_1 - y_1}) = (e^{\sqrt{2}}, -e^{\sqrt{2}}), \\ \nabla f(x_2, y_2) &= (e^{x_2 - y_2}, -e^{x_2 - y_2}) = (e^{-\sqrt{2}}, -e^{-\sqrt{2}}); \end{aligned}$$

ne segue, come è giusto,

$$\langle \nabla f(x_1, y_1), \mathbf{g}'(t_1) \rangle_N = 0, \quad \langle \nabla f(x_2, y_2), \mathbf{g}'(t_2) \rangle_N = 0.$$

Il massimo ed il minimo di  $f$  valgono

$$\max_K f = f(x_1, y_1) = e^{\sqrt{2}}, \quad \min_K f = f(x_2, y_2) = e^{-\sqrt{2}}.$$

Molto spesso la varietà  $K$  è data (come nell'esempio precedente) in forma di luogo di zeri di una funzione. In questo caso può essere più comodo utilizzare il *metodo dei moltiplicatori*, dovuto a Lagrange, che andiamo a descrivere nell'enunciato che segue.

**Teorema 1.10.5** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $f \in C^1(A)$  e sia

$$K = \{\mathbf{x} \in A : \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

ove  $\mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  ( $k < N$ ) è una funzione di classe  $C^1$  con matrice Jacobiana  $\mathbf{DG}(\mathbf{x})$  di rango massimo  $k$  in ogni punto  $\mathbf{x} \in K$ . Allora un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  è stazionario vincolato per  $f$  su  $K$  se e solo se esiste  $\mathbf{m}_0 \in \mathbb{R}^k$  tale che  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0)$  è punto stazionario (libero) in  $A \times \mathbb{R}^k$  per la funzione Lagrangiana

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{m}, \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rangle_k.$$

**Dimostrazione** Nelle ipotesi fatte, posto  $r = N - k$ ,  $K$  è una varietà  $r$ -dimensionale di classe  $C^1$ , in virtù del teorema del Dini. Sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  un punto stazionario vincolato per  $f$ : allora si ha  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e, per il teorema 1.10.3, il vettore  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  deve essere ortogonale al piano  $r$ -dimensionale tangente a  $K$  in  $\mathbf{x}_0$ . Ma, essendo  $K$  una curva di livello della funzione  $\mathbf{G}$ , i vettori normali a  $K$  in  $\mathbf{x}_0$  sono le righe della matrice Jacobiana  $\mathbf{DG}(\mathbf{x}_0)$ , ossia i vettori  $\nabla G_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla G_k(\mathbf{x}_0)$ . Quindi  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è combinazione lineare

di tali vettori, e dunque esistono  $k$  numeri reali  $m^1, \dots, m^k$  (detti *moltiplicatori*) tali che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^k m^i \nabla G_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

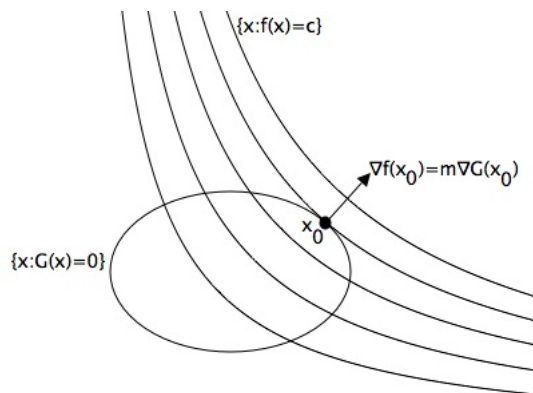
In altre parole, il punto  $\mathbf{x}_0$  verifica le condizioni

$$\begin{cases} D_j f(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^k m^i D_j G_i(\mathbf{x}_0) = 0, & j = 1, \dots, N \\ -G_i(\mathbf{x}_0) = 0, & i = 1, \dots, k, \end{cases}$$

le quali equivalgono, per definizione della Lagrangiana  $L$  e ponendo  $\mathbf{m}_0 = (m^1, \dots, m^k)$ , all'annullarsi in  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0)$  del gradiente di  $L$  rispetto alle variabili  $x^j$  e  $m^i$ .

Viceversa, se un punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) \in A \times \mathbb{R}^k$  è stazionario per la Lagrangiana, ossia soddisfa il sistema sopra scritto, allora il secondo gruppo di equazioni ci dice che  $\mathbf{x}_0 \in K$ , mentre il primo gruppo esprime la lineare dipendenza di  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  dai vettori normali a  $K$  in  $\mathbf{x}_0$ . Ciò prova che  $\mathbf{x}_0$  è punto stazionario vincolato per  $f$  su  $K$ .  $\square$

Il teorema 1.10.5 ha un'interpretazione geometrica. Supponiamo  $k = 1$ , cioè che il vincolo  $K$  sia la superficie di livello 0 di una funzione *scalare*  $G$ . Se consideriamo gli insiemi di livello della funzione  $f$ , ad un punto stazionario vincolato  $\mathbf{x}_0 \in K$  corrisponderà il *valore critico*  $f(\mathbf{x}_0) = c_0$ ; il teorema dice allora che, essendo i vettori  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  e  $\nabla G(\mathbf{x}_0)$  paralleli, la curva di livello  $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c_0\}$  è tangente in  $\mathbf{x}_0$  al vincolo  $K$ .



Gli stessi moltiplicatori hanno un loro significato geometrico, che è descritto nell'esercizio 1.10.12.

In sostanza, il metodo dei moltiplicatori riduce il problema della ricerca dei punti stazionari vincolati a quello più semplice di trovare i punti stazionari liberi della Lagrangiana: il prezzo da pagare è che si hanno delle variabili in più (i moltiplicatori).

**Esempio 1.10.6** Calcoliamo, con il metodo dei moltiplicatori, il massimo ed il minimo della funzione  $f(x, y) = e^{x-y}$  sulla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ , già determinati nell'esempio 1.10.4. Dobbiamo cercare i punti stazionari della Lagrangiana

$$L(x, y, m) = e^{x-y} - m(x^2 + y^2 - 1), \quad (x, y, m) \in \mathbb{R}^2 \times [-\pi, \pi].$$

Risulta  $\nabla L(x, y, m) = \mathbf{0}$  se e solo se

$$\begin{cases} e^{x-y} - 2mx = 0 \\ -e^{x-y} - 2my = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni segue che  $m \neq 0$  e  $2m(x+y) = 0$ , da cui  $x = -y$ . Sostituendo nella terza si trova  $2x^2 = 1$ , ed infine i due punti

$$(x_1, y_1, m_1) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right), \quad (x_2, y_2, m_2) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right).$$

Abbiamo così ritrovato i punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  ottenuti nell'esempio 1.10.4.

**Osservazione 1.10.7** Nelle applicazioni occorre frequentemente trovare il massimo e il minimo di una funzione su un insieme  $K$  che non è una varietà regolare: o perché vi sono punti singolari nei quali manca il piano tangente, o perché vi è un bordo (ad esempio quando  $K = \mathbf{g}(U)$ , con  $U \setminus \overset{\circ}{U} \neq \emptyset$ ), o perché  $K$  è una varietà *regolare a tratti*: ciò significa che  $K$  è unione finita di varietà  $K_i$  ciascuna delle quali è regolare (si pensi al caso di una superficie poliedrica). In generale, se in qualche punto di  $K$  non sono verificate le ipotesi dei teoremi precedenti, occorrerà studiare a parte come si comporta la funzione in tali punti.

**Esempio 1.10.8** Sia  $Q$  il quadrato di  $\mathbb{R}^2$  di centro l'origine e spigolo 2. Vogliamo calcolare il massimo e il minimo di  $f(x, y) = (x^2 - 1)y^2$  su  $Q$ . Anzitutto, essendo  $\nabla f(x, y) = (2xy^2, 2y(x^2 - 1))$ , l'unico punto stazionario *interno* a  $Q$  è l'origine, dove si ha  $f(0, 0) = 0$ . Analizziamo la situazione sulla frontiera: essa è costituita dai quattro lati

$$T_1 = \{(t, -1) : t \in ]-1, 1[ \}, \quad T_2 = \{(1, t) : t \in ]-1, 1[ \}, \\ T_3 = \{(t, 1) : t \in ]-1, 1[ \}, \quad T_4 = \{(-1, t) : t \in ]-1, 1[ \},$$

e dai quattro vertici  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ . In questo caso l'uso del metodo dei moltiplicatori non è conveniente, perché è piuttosto complicato rappresentare  $\partial Q$  come luogo di zeri di una funzione. Usiamo dunque le parametrizzazioni dei lati della frontiera sopra scritte: se poniamo  $f_i = f|_{T_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , risulta  $f_2(t) \equiv f_4(t) \equiv 0$ , mentre

$$f_1(t) \equiv f_3(t) = t^2 - 1, \quad f'_1(t) = 2t, \quad f'_1(t) = 0 \iff t = 0,$$

con  $f_1(0) = f(0, -1) = f_3(0) = f(0, 1) = -1$ . Nei quattro vertici poi la  $f$  si annulla. Confrontando i valori trovati nei punti considerati, si conclude che

$$\max_Q f = 0, \quad \min_Q f = -1.$$

## Esercizi 1.10

1. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  non entrambi nulli. Determinare il massimo ed il minimo della funzione  $f(x, y) = ax + by$  sulla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ .
2. Sia  $\alpha > 0$ . Determinare il massimo ed il minimo della funzione  $f(x, y) = xy$  sull'insieme

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^\alpha + y^\alpha = 1\}.$$

3. Determinare il massimo ed il minimo delle funzioni seguenti sui vincoli indicati:

- (i)  $f(x, y) = (x + 2y)^2$ ,  $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \right\}$ ;
- (ii)  $f(x, y) = (3x + 2y)^2$ ,  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$ ;
- (iii)  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{x^2 + y^2, |z|\} = 1\}$ .

4. Fra tutti i rettangoli, inscritti in una data ellisse e con lati paralleli agli assi dell'ellisse, trovare quello di area massima.

5. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli con superficie assegnata, trovare quelli di volume massimo. Cosa succede se si assegna soltanto la superficie laterale?

6. Determinare sulla superficie di equazione  $z^2 - xy = 1$  i punti più vicini all'origine di  $\mathbb{R}^3$ .

7. Trovare il massimo ed il minimo di  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_N$  sul vincolo

$$K = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2N} : |\mathbf{x}|_N = |\mathbf{y}|_N = 1\}.$$

8. Determinare il

$$\max \left\{ \prod_{i=1}^N x^i : x^1, \dots, x^N > 0, \sum_{i=1}^N x^i = S \right\},$$

ove  $S > 0$ , e dedurre la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica.

9. Determinare il

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{x^i} : x^1, \dots, x^N > 0, \prod_{i=1}^N x^i = P \right\},$$

ove  $P > 0$ , e dedurre la disuguaglianza fra media armonica e media geometrica.

10. Siano  $p, q > 1$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Posto  $\|\mathbf{x}\| = \left[ \sum_{i=1}^N |x^i|^p \right]^{1/p}$ , si provi che per ogni  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$  si ha

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^N a^i x^i : \|\mathbf{x}\| = 1 \right\} = \left[ \sum_{i=1}^N |a^i|^q \right]^{1/q}.$$

11. Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $N \times N$ , simmetrica, a coefficienti reali, e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  gli autovalori di  $\mathbf{A}$ , ordinati in modo decrescente. Posto  $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_N$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , si provino i fatti seguenti:

- (i)  $\lambda_1 = \max_{\mathbf{x} \in M_1} f(\mathbf{x})$ , ove  $M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x}|_N = 1\}$ , ed inoltre se  $\mathbf{y}_1 \in M_1$  realizza tale massimo, allora  $\mathbf{y}_1$  è autovalore di  $\mathbf{A}$  relativo a  $\lambda_1$ ;

- (ii)  $\lambda_2 = \max_{\mathbf{x} \in M_2} f(\mathbf{x})$ , ove  $M_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x}|_N = 1, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle_N = 0\}$ , ed inoltre se  $\mathbf{y}_2 \in M_2$  realizza tale massimo, allora  $\mathbf{y}_2$  è autovalore di  $\mathbf{A}$  relativo a  $\lambda_2$ ;
- (iii) similmente, per  $k = 3, \dots, N$  si ha  $\lambda_k = \max_{\mathbf{x} \in M_k} f(\mathbf{x})$ , ove

$$M_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x}|_N = 1, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle_N = 0, j = 1, \dots, k-1\},$$

ed inoltre se  $\mathbf{y}_k \in M_k$  realizza tale massimo, allora  $\mathbf{y}_k$  è autovalore di  $\mathbf{A}$  relativo a  $\lambda_k$ .

- (iv)  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$ ; inoltre se  $(\xi^1, \dots, \xi^N)$  sono le coordinate di un generico punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  rispetto a tale base, si ha

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_N = \sum_{i=1}^N \lambda_i (\xi^i)^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

12. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e siano  $f, g \in C^2(A)$ . Sia inoltre  $(x_0, y_0)$  un punto stazionario vincolato per  $f$  rispetto al vincolo

$$K = \{(x, y) \in A : g(x, y) = t_0\},$$

con moltiplicatore  $m_0$ . Dimostrare i fatti seguenti:

- (i) se la Lagrangiana  $L(x, y, m) = f(x, y) + m(g(x, y) - t_0)$  ha matrice Hessiana non singolare nel punto  $(x_0, y_0, m_0)$ , allora esiste un intorno  $I$  di  $t_0$  in  $\mathbb{R}$  tale che per ogni  $t \in I$  il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) + mg_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + mg_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = t \end{cases}$$

ha un'unica soluzione  $(x(t), y(t), m(t))$ : dunque il punto  $(x(t), y(t))$  è stazionario vincolato per  $f(x, y)$  rispetto al vincolo  $g(x, y) = t$ , con moltiplicatore  $m(t)$ ;

- (ii) posto  $v(t) = f(x(t), y(t))$ , risulta  $m(t) = v'(t)$  per ogni  $t \in I$ : dunque il numero  $m_0 = m(t_0)$  misura il tasso di variazione del valore critico di  $f$  rispetto a variazioni della curva di livello di  $g$ .

[**Traccia:** si applichi il teorema del Dini. Per il calcolo di  $v'(t)$  è utile derivare l'identità  $g(x(t), y(t)) = t$ .]

13. Sia  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$ . Si verifichi che la funzione  $f(x, y) = x$  ha minimo assoluto su  $Z$  nel punto  $(0, 0)$ , ma che tale punto non è punto stazionario vincolato per  $f$  su  $K$ . Come mai?
14. Si provi che la distanza fra un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$  e il piano  $(N-1)$ -dimensionale di equazione  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle_N = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , è uguale a

$$\frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle_N|}{|\mathbf{a}|_N}.$$

15. Si provi che la distanza fra un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$  e l'iperpiano  $r$ -dimensionale  $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$  (dunque  $\mathbf{A}$  è una matrice  $N \times (N - r)$  di rango massimo) è uguale a

$$\|\mathbf{A}^t(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b})\|_N,$$

ove  $\mathbf{A}^t$  è la *matrice trasposta* di  $\mathbf{A}$  (dunque è  $(N - r) \times N$  con  $(a^t)_{ij} = a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, N - r$ ,  $j = 1, \dots, N$ ).



# Capitolo 2

## Sistemi differenziali

### 2.1 Preliminari

Abbiamo visto in Analisi I (capitolo 6) che un'equazione differenziale di ordine arbitrario  $n$  è equivalente ad un sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine, e che l'equazione è in forma normale se e solo se il sistema è in forma normale. Per quest'ultimo tipo di sistemi abbiamo dato un teorema di esistenza e unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy (teorema 6.1.1), osservando anche che la soluzione dipende con continuità dai dati; inoltre si è mostrato che nel caso di sistemi lineari l'esistenza è globale, ossia il vettore soluzione è definito nell'intero intervallo dove sono definiti i coefficienti del sistema. Infine abbiamo mostrato come determinare le soluzioni di alcuni tipi di equazioni del primo ordine, nonché delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

In questo capitolo studieremo più sistematicamente i sistemi lineari, dei quali descriveremo l'insieme delle soluzioni, estendendo il discorso anche alle equazioni lineari di ordine arbitrario, e forniremo metodi per lo studio qualitativo dei sistemi non lineari bi-dimensionali. Negli esercizi che seguono si illustrano alcuni esempi di equazioni e sistemi differenziali che scaturiscono dalle scienze applicate e che sono risolvibili con le tecniche viste in Analisi I. In alcuni casi, le grandezze considerate sono discrete ma vengono trattate come quantità continue: ciò è poco corretto matematicamente, ma è giustificato dal fatto che i risultati che si ottengono corrispondono efficacemente ai dati sperimentali.

#### Esercizi 2.1

1. Per stimare l'efficacia di una campagna pubblicitaria, è stato proposto il modello che segue. L'importo  $x(t)$  delle vendite, in assenza di pubblicità, diminuisce nel tempo secondo un certo tasso costante  $\lambda > 0$ , e dunque risulta

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x.$$

In presenza di pubblicità, denotiamo con  $A(t)$  l'attività pubblicitaria e con  $M$  il livello di saturazione del mercato: si ritiene che la pubblicità incida su quella

parte del mercato che non ha ancora acquistato il prodotto, cosicché l'equazione diventa

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + rA(t)\frac{M-x}{M},$$

ove  $r$  è una costante positiva; posto  $b(t) = \frac{rA(t)}{M} + \lambda$ , possiamo scrivere

$$\frac{dx}{dt} + b(t)x = rA(t).$$

Supponiamo in particolare che l'attività pubblicitaria  $A(t)$  abbia il valore costante  $\bar{A} > 0$  per un certo tempo  $T > 0$ , e poi cessi: dunque

$$A(t) = \begin{cases} \bar{A} & \text{se } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{se } t > T. \end{cases}$$

Si risolva l'equazione differenziale e si traccino i grafici delle funzioni  $A(t)$  e  $x(t)$ . Si confronti l'effetto di una campagna pubblicitaria intensa e breve con quello di una più moderata ma duratura.

2. Una fabbrica introduce un interessante processo innovativo. Sia  $N$  il numero di fabbriche presenti sul territorio, e indichiamo con  $x(t)$  il numero di quelle che, al tempo  $t$ , hanno adottato l'innovazione (in particolare  $x(0) = 1$ ). Il tasso di diffusione sarà proporzionale a  $x(t)$ , ma decrescerà al ridursi del numero delle fabbriche che non hanno ancora introdotto il nuovo processo. Dunque avremo

$$\frac{dx}{dt} = ax(N-x),$$

ove  $a$  è una costante positiva. Risolvere l'equazione e descrivere qualitativamente la soluzione.

3. Nella situazione dell'esercizio precedente, analizziamo l'effetto della pubblicità introducendo un termine proporzionale al numero di coloro che non hanno ancora adottato l'innovazione:

$$\frac{dx}{dt} = (ax+b)(N-x).$$

Si risolva l'equazione con la condizione  $x(0) = 1$  e se ne confronti l'andamento con quello della soluzione dell'esercizio precedente.

4. Il modello più semplice di dinamica delle popolazioni animali è quello della *crescita malthusiana*: se una popolazione è composta da  $x(t)$  individui all'istante  $t$ , allora  $x'(t)$  rappresenta il suo tasso di crescita. In questo modello, adatto a descrivere la fase iniziale dell'accrescimento di una colonia di batteri in un brodo di coltura, si ha

$$x'(t) = \mu x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

dove  $x_0$  è la popolazione all'istante iniziale  $t_0$  e  $\mu > 0$  è il *fattore di crescita*. Si determini la soluzione del problema e si verifichi che il modello proposto è ragionevole solo per un breve intervallo temporale.

5. Alle condizioni dell'esercizio precedente si aggiunga l'effetto, negativo sulla crescita della popolazione, dovuto all'affollamento oppure alla limitazione delle risorse alimentari. Si ottiene allora l'*equazione logistica*

$$x' = ax - bx^2, \quad x(t_0) = x_0,$$

in cui le costanti  $a, b$  sono positive e  $b$  è piccola rispetto ad  $a$ : in questo modo il termine  $bx^2$  non incide quando la popolazione è scarsa. Si risolva l'equazione e se ne faccia un'analisi qualitativa.

6. Si supponga che in un allevamento di pesci la legge di crescita sia di tipo malthusiano, e che si effettui una pesca con prelievo  $h > 0$  costante nel tempo. L'equazione che governa l'allevamento è allora

$$x'(t) = ax(t) - h, \quad x(t_0) = x_0.$$

Si determini la soluzione e se ne analizzi il comportamento al variare dei parametri  $x_0$  e  $h$ .

7. Consideriamo il moto di una particella di massa  $m$ , legata ad una molla di costante elastica  $k$ , soggetta ad una forza esterna  $F(t)$  e a una reazione viscosa di costante  $\mu$ . L'equazione del moto è

$$u''(t) + \frac{\mu}{m}u'(t) + \frac{k}{m}u(t) = \frac{F(t)}{m},$$

Si scriva l'insieme delle soluzioni di questa equazione al variare della posizione iniziale  $u_0$  e della velocità iniziale  $v_0$ .

8. In un circuito elettrico di induttanza  $L$  e resistenza  $R$ , la legge di carica  $Q(t)$  di un condensatore di capacità  $C$ , con forza elettromotrice applicata  $E(t)$ , verifica l'equazione differenziale

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \quad t \geq 0.$$

Si descrivano le soluzioni dell'equazione, supponendo  $E(t) = e^{-t}$ .

9. La legge di decadimento  $K(t)$  di una sostanza radioattiva soddisfa l'equazione differenziale

$$K'(t) = \alpha K(t), \quad t \geq 0.$$

ove  $\alpha$  è una costante positiva. Si scrivano le soluzioni di questa equazione.

10. Un modello semplificato per l'economia nazionale è descritto dalle seguenti variabili: il prodotto interno lordo  $x(t)$ , la spesa per investimenti  $I(t)$ , le spese correnti  $S(t)$ , i consumi  $C(t)$ . Si assume che per i consumi si abbia  $C = (1 - s)x$ , prevedendo un coefficiente di risparmio  $s$ , e che il prodotto interno si evolva nel tempo, rispondendo all'eccesso di domanda, nel modo seguente:

$$\frac{dx}{dt} = l(C + I + S - x), \quad t \geq 0,$$

ove  $l$  è una costante positiva; per gli investimenti si assume che

$$\frac{dI}{dt} = m \left( a \frac{dx}{dt} - I \right),$$

con  $a, m$  costanti positive. Si ha dunque un sistema di due equazioni differenziali nelle variabili  $x, I$ . Si trasformi il sistema in una equazione del secondo ordine per  $x$ , e si specifichi quali previsioni si possono fare per l'evoluzione del prodotto interno lordo.

11. Un corpo di massa  $m$  cade, incontrando una resistenza idraulica proporzionale al quadrato della sua velocità. Il suo moto è descritto dalla legge

$$mx'' = mg - \mu(x')^2.$$

Si risolva questa equazione supponendo che  $m = 1$ ,  $g = 10$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $x(0) = 100$ ,  $x'(0) = 0$  (le costanti sono espresse in unità di misura coerenti).

## 2.2 Sistemi lineari

Un sistema differenziale lineare del primo ordine ha la forma

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in J,$$

ove  $J$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$  (non vuoto, limitato o illimitato, aperto o chiuso),  $\mathbf{A}(t)$  è una matrice  $n \times n$ , con  $n > 1$ , i cui coefficienti  $a_{ij}(t)$  supporremo continui su  $J$  a valori in generale complessi, e il secondo membro  $\mathbf{f}$  è una funzione continua su  $J$  a valori in  $\mathbb{C}^n$ ; l'incognita  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$  è una funzione da  $J$  in  $\mathbb{C}^n$  di classe  $C^1$ . La scelta di ammettere funzioni a valori complessi è dettata dal fatto che le soluzioni complesse entrano in ballo in modo naturale: basta pensare che  $e^{it}$  risolve l'equazione  $u'' + u = 0$ , che è a coefficienti reali.

In forma scalare il sistema diventa

$$\begin{cases} (u^1)'(t) = a_{11}(t)u^1(t) + a_{12}(t)u^2(t) + \dots + a_{1n}(t)u^n(t) + f^1(t), \\ (u^2)'(t) = a_{21}(t)u^1(t) + a_{22}(t)u^2(t) + \dots + a_{2n}(t)u^n(t) + f^2(t), \\ \vdots \\ (u^n)'(t) = a_{n1}(t)u^1(t) + a_{n2}(t)u^2(t) + \dots + a_{nn}(t)u^n(t) + f^n(t). \end{cases}$$

Dalla linearità del sistema discende il *principio di sovrapposizione*: se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  risolvono

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{w}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{g}(t), \quad t \in J,$$

allora per ogni  $a, b \in \mathbb{C}$  la funzione  $\mathbf{z} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$  risolve

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + a\mathbf{f}(t) + b\mathbf{g}(t), \quad t \in J.$$

In particolare, se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  risolvono un sistema *omogeneo*, ossia con secondo membro nullo, anche  $\mathbf{z} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$  risolve lo stesso sistema: ne segue che l'insieme

$$V_0 = \{\mathbf{u} \in C^1(J, \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} \text{ in } J\}$$

è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Inoltre, se  $\mathbf{u}_f$  è un'arbitraria soluzione del sistema non omogeneo

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in J,$$

allora, posto

$$V_f = \{\mathbf{u} \in C^1(J, \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f} \text{ in } J\},$$

si ha la relazione

$$V_f = V_0 + \mathbf{u}_f,$$

nel senso che

$$V_f = \{\mathbf{u} + \mathbf{u}_f, \mathbf{u} \in V_0\}.$$

Ciò significa che  $V_f$  è un spazio affine contenuto in  $C^1(J, \mathbb{C}^n)$ , parallelo al sottospazio vettoriale  $V_0$ .

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), & t \in J, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

con  $t_0 \in J$  e  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^n$  assegnati. Per le osservazioni fatte nel paragrafo iniziale, questo problema ha una e una sola soluzione  $\mathbf{u}$ , di classe  $C^1$ , definita su tutto l'intervallo  $J$ . Inoltre, se i coefficienti e il termine noto sono di classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , allora  $\mathbf{u}$  è di classe  $C^{k+1}$ , cosicché se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{f}$  sono di classe  $C^\infty$  anche la soluzione è di classe  $C^\infty$ .

## Sistemi lineari omogenei

Cominciamo ad analizzare i sistemi lineari omogenei, dunque con  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

**Proposizione 2.2.1** *Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $n \times n$  con coefficienti  $a_{ij} \in C(J, \mathbb{C})$ . Lo spazio vettoriale  $V_0$ , costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo*

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t), \quad t \in J,$$

*ha dimensione  $n$ .*

**Dimostrazione** Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  sia  $\mathbf{u}_\mathbf{x}(\cdot)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t), & t \in J \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

L'applicazione  $\mathbf{S} : \mathbb{C}^n \rightarrow V_0$ , definita da

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\mathbf{x}(\cdot) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

è chiaramente lineare, dato che per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  si ha, in virtù del principio di sovrapposizione,

$$\mathbf{S}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \mathbf{u}_{\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}}(\cdot) = \lambda\mathbf{u}_{\mathbf{x}}(\cdot) + \mu\mathbf{u}_{\mathbf{y}}(\cdot) = \lambda\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{S}(\mathbf{y});$$

inoltre  $\mathbf{S}$  è un isomorfismo, poiché essa è iniettiva (infatti, se  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  è la funzione identicamente nulla, allora ovviamente  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) e surgettiva (se  $\mathbf{v} \in V_0$  allora, per unicità,  $\mathbf{v} = \mathbf{S}(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t_0)$ ). Dunque lo spazio  $V_0$  è isomorfo a  $\mathbb{C}^n$  e quindi ha dimensione  $n$ .  $\square$

Alla luce della proposizione precedente, per descrivere esplicitamente  $V_0$  basterà conoscerne una base, ossia determinare  $n$  soluzioni linearmente indipendenti: una tale famiglia sarà chiamata *sistema fondamentale di soluzioni*.

Come riconoscere un sistema fondamentale di soluzioni? A questo scopo conviene dare la seguente

**Definizione 2.2.2** *Siano  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  elementi di  $C^1(J, \mathbb{C}^n)$ . Si chiama matrice Wronskiana delle funzioni  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  la matrice che ha tali funzioni come vettori colonna:*

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} u_1^1(t) & u_2^1(t) & \cdots & u_n^1(t) \\ u_1^2(t) & u_2^2(t) & \cdots & u_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n(t) & u_2^n(t) & \cdots & u_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Si ha allora:

**Teorema 2.2.3** *Siano  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  soluzioni del sistema omogeneo*

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t), \quad t \in J.$$

*Allora la matrice Wronskiana di tali funzioni verifica*

$$\mathbf{W}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t) \quad \forall t \in J;$$

*inoltre i seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i) *le funzioni  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  sono linearmente indipendenti in  $V_0$ ;*
- (ii) *esiste  $t_0 \in J$  tale che  $\det \mathbf{W}(t_0) \neq 0$ ;*
- (iii) *risulta  $\det \mathbf{W}(t) \neq 0$  per ogni  $t \in J$ .*

**Dimostrazione** Anzitutto, detti  $w_{ij}(t)$  e  $a_{ij}(t)$  i coefficienti di  $\mathbf{W}(t)$  e di  $\mathbf{A}(t)$ , si ha

$$\frac{dw_{ij}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}u_j^i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)u_j^k(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)w_{kj}(t),$$

da cui  $\mathbf{W}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t)$ .

Proviamo adesso l'equivalenza fra le condizioni (i), (ii) e (iii).

(i)  $\implies$  (iii) Se, per assurdo, la (iii) fosse falsa, esisterebbe  $t_0 \in J$  tale che  $\det \mathbf{W}(t_0) = 0$ : dunque le colonne di  $\mathbf{W}(t_0)$  sarebbero linearmente dipendenti, ossia esisterebbero  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , non tutti nulli, tali che  $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i(t_0) = \mathbf{0}$ . Ne seguirebbe che la funzione  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$  è un elemento di  $V_0$  che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t), & t \in J \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

e dunque, per unicità,  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ , cioè  $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \equiv \mathbf{0}$ , con i  $c_i$  non tutti nulli: dunque  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  sarebbero linearmente dipendenti in  $V_0$ , contro l'ipotesi (i).

(iii)  $\implies$  (ii) Evidente.

(ii)  $\implies$  (i) Supponiamo, per assurdo, che esistano  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , non tutti nulli, tali che  $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \equiv \mathbf{0}$  in  $J$ : allora per ogni  $t \in J$  i vettori  $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$  sarebbero linearmente dipendenti in  $\mathbb{C}^n$ ; ne seguirebbe  $\det \mathbf{W}(t) = 0$  per ogni  $t \in J$ , il che contraddirebbe (ii).

□

In definitiva, per stabilire se una data famiglia di  $n$  soluzioni del sistema omogeneo è o non è un sistema fondamentale, è sufficiente calcolarne il determinante Wronskiano in un punto qualunque di  $J$ .

Come si è osservato, i vettori colonna  $\mathbf{u}_j$  di una matrice Wronskiana  $\mathbf{W}(t)$ , a determinante non nullo, formano una base di  $V_0$ : conoscendo  $\mathbf{W}(t)$ , è dunque possibile scrivere l'*integrale generale* del sistema omogeneo, ossia l'insieme delle sue soluzioni:

$$V_0 = \{c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}\} = \{\mathbf{W}(\cdot)\mathbf{c} : \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Un modo per costruire un sistema fondamentale di soluzioni è il seguente: se  $\mathbf{e}_j$  è il  $j$ -simo elemento della base canonica di  $\mathbb{C}^n$ , sia  $\mathbf{u}_j$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t), & t \in J \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{e}_j; \end{cases}$$

allora le funzioni  $\mathbf{u}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , costituiscono un sistema fondamentale in quanto, ovviamente, il loro determinante Wronskiano nel punto  $t_0$  vale

$$\det \mathbf{W}(t_0) = \det \mathbf{I} = 1.$$

Una matrice Wronskiana che si riduca all'identità in un punto  $\tau \in J$  si denota con  $\mathbf{W}(t, \tau)$  e si chiama *matrice di transizione*. Il nome nasce dal fatto che la soluzione  $\mathbf{u}(\cdot; \tau, \mathbf{x})$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t), & t \in J \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{x} \end{cases}$$

è data da

$$\mathbf{u}(t; \tau, \mathbf{x}) = \mathbf{W}(t, \tau)\mathbf{x}, \quad t \in J;$$

in sostanza,  $\mathbf{W}(t, \tau)$  agisce come un operatore che fa passare dallo stato  $\mathbf{x}$ , realizzato al tempo  $\tau$ , allo stato che si realizza al tempo  $t$ . Le principali proprietà della matrice di transizione sono le seguenti:

- (i)  $\mathbf{W}(t, t) = \mathbf{I}$  per ogni  $t \in J$ ,
- (ii)  $\mathbf{W}(t, s)\mathbf{W}(s, \tau) = \mathbf{W}(t, \tau)$  per ogni  $t, s, \tau \in J$ ,
- (iii)  $[\mathbf{W}(t, \tau)]^{-1} = \mathbf{W}(\tau, t)$  per ogni  $t, \tau \in J$ .

La prima proprietà deriva dalla definizione di matrice di transizione; la terza segue dalle precedenti scegliendo  $\tau = t$  in (ii), e infine la seconda discende dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy: entrambi i membri di (ii) risolvono il sistema omogeneo  $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W}$  in  $J$  e assumono il valore  $\mathbf{W}(s, \tau)$  per  $t = s$ .

In generale, comunque, la costruzione esplicita di una matrice Wronskiana, e quindi di un sistema fondamentale di soluzioni, è difficoltosa e spesso impraticabile.

## Sistemi lineari non omogenei

Passiamo ora allo studio del sistema lineare non omogeneo

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in J.$$

Come si è già osservato, per determinare l'insieme  $V_f$  delle soluzioni di questo sistema, supposto noto l'insieme  $V_0$  delle soluzioni del sistema omogeneo, è sufficiente determinare un singolo elemento dell'insieme  $V_f$ . Il metodo che permette di costruire un elemento  $\mathbf{v}$  di  $V_f$  è dovuto a Lagrange e si chiama *metodo di variazione delle costanti arbitrarie*. Esso consiste nella ricerca di una soluzione  $\mathbf{v}$  della forma

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t),$$

dove  $\mathbf{W}(t)$  è la matrice Wronskiana relativa ad un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo, e  $\mathbf{c}$  è una funzione opportuna, definita su  $J$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1$ . Naturalmente, quando  $\mathbf{c}$  è un vettore costante, la  $\mathbf{v}$  sopra definita è un elemento di  $V_0$ ; l'idea è che se facciamo "variare le costanti", ossia prendiamo  $\mathbf{c}$  non costante, allora è possibile ottenere un elemento di  $V_f$ .

In effetti, imponendo che  $\mathbf{v}$  sia soluzione, troviamo

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{W}'(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{W}(t)\mathbf{c}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t) - \mathbf{f}(t),$$

da cui, per definizione di matrice Wronskiana,

$$\mathbf{0} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}'(t) - \mathbf{f}(t),$$

ossia, essendo  $\mathbf{W}(t)$  invertibile,

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{f}(t).$$

Dunque si ha, ad esempio,

$$\mathbf{c}(t) = \int_s^t \mathbf{W}(r)^{-1}\mathbf{f}(r) dr,$$



ove  $s$  è un arbitrario punto di  $J$ . Perciò risulta, in definitiva,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_s^t \mathbf{W}(r)^{-1} \mathbf{f}(r) dr.$$

È chiaro, viceversa, che la  $\mathbf{v}(t)$  fornita da questa formula è soluzione del sistema  $\mathbf{v}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t)$ .

In conclusione, detto  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo, l'integrale generale del sistema non omogeneo è dato da

$$\begin{aligned} V_f &= \{c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n + \mathbf{v} : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}\} = \\ &= \left\{ \mathbf{W}(\cdot) \left( \mathbf{c} + \int_s^{\cdot} \mathbf{W}(r)^{-1} \mathbf{f}(r) dr \right) : \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \right\}. \end{aligned}$$

Se, in particolare, cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), & t \in J \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

converrà scegliere  $s = \tau$  ed utilizzare la matrice di transizione  $\mathbf{W}(t, \tau)$ : la soluzione del problema di Cauchy è allora data da

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{W}(t, \tau)\mathbf{x} + \int_{\tau}^t \mathbf{W}(t, r)\mathbf{f}(r) dr,$$

che è semplicemente la somma delle soluzioni dei due problemi

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t), & t \in J \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), & t \in J \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

## Dipendenza continua dai dati

Le soluzioni di un problema di Cauchy relativo ad un sistema differenziale lineare dipendono con continuità dai dati, vale a dire dal secondo membro, dai coefficienti e dal dato iniziale. Per verificare questa asserzione, iniziamo con il seguente risultato:

**Lemma 2.2.4** *Sia  $\mathbf{W}_{\mathbf{A}}(t, s)$  la matrice di transizione relativa al sistema differenziale lineare  $\mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ , ove  $\mathbf{A}(\cdot)$  è una matrice  $n \times n$  con coefficienti  $a_{ij} \in C(J, \mathbb{C})$  e  $J$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Allora per ogni sottointervallo chiuso e limitato  $I \subseteq J$  e per ogni matrice  $n \times n$   $\mathbf{B}(\cdot)$ , con coefficienti  $b_{ij} \in C(J, \mathbb{C})$ , tale che  $\sup_{t \in I} \|\mathbf{B}(t) - \mathbf{A}(t)\|_{\mathcal{M}_n} < 1$ , si ha*

$$\sup_{t, s \in I} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, s)\|_{\mathcal{M}_n} \leq M,$$

ove  $M$  è una costante che dipende solamente da  $I$  e da  $\|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}$ .

**Dimostrazione** Dalle proprietà della matrice di transizione  $\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r)$  segue che

$$\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r) = \mathbf{I} + \int_r^t \mathbf{B}(s) \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(s, r) ds, \quad t, r \in I.$$

Poniamo  $A = \|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}$ ,  $B = \|\mathbf{B}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}$  ed osserviamo che  $B \leq A + 1$ ; quindi, scelto  $\delta \in ]0, \frac{1}{A+1}[$ , otteniamo per  $|t - r| \leq \delta$

$$\|\mathbf{W}(t, r)_{\mathbf{B}}\|_{\mathcal{M}_n} \leq 1 + \delta(A + 1) \sup_{|s-r| \leq \delta} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(s, r)\|_{\mathcal{M}_n},$$

da cui

$$\sup_{|t-r| \leq \delta} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r)\|_{\mathcal{M}_n} \leq \frac{1}{1 - \delta(A + 1)}.$$

D'altronde, se  $t, r \in I$  e  $|t - r| > \delta$  possiamo scrivere, definendo  $k = \lceil |t - r| / \delta \rceil$  e supposto ad esempio  $t > r$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r)\|_{\mathcal{M}_n} &= \left\| \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r + k\delta) \prod_{h=1}^k \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(r + h\delta, r + (h-1)\delta) \right\|_{\mathcal{M}_n} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1 - \delta(A + 1))^{k+1}}, \end{aligned}$$

cosicché, detto  $K = \lceil \ell(I) / \delta \rceil$ , avremo

$$\sup_{r, t \in I} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, r)\|_{\mathcal{M}_n} \leq \frac{1}{(1 - \delta(A + 1))^{K+1}}.$$

Posto ad esempio  $\delta = \frac{1}{2(A+1)}$  si ha allora

$$\sup_{t, s \in I} \|\mathbf{W}_{\mathbf{B}}(t, s)\|_{\mathcal{M}_n} \leq M = 2^{1+2(A+1)\ell(I)}. \quad \square$$

Siano adesso  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), & t \in J, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}'(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}(t), & t \in J, \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{y}, \end{cases}$$

ove  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono matrici  $n \times n$  di funzioni continue su  $J$  a valori in  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  sono funzioni continue su  $J$  a valori in  $\mathbb{C}^n$ , e  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  appartengono a  $\mathbb{C}^n$ . Fissiamo un sottointervallo chiuso e limitato  $I \subseteq J$  tale che  $t_0 \in I$ , e supponiamo che  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{x}$  siano fissati, mentre  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{y}$  si muovono verso  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{x}$  rispettivamente; supponiamo in particolare che si abbia

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)} < 1, \quad \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} < 1, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n < 1.$$

Si ha allora questo enunciato:

**Teorema 2.2.5** *Nelle ipotesi sopra scritte, esiste una costante  $C$ , dipendente solamente da  $\ell(I)$  e dai dati  $\|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}$ ,  $|\mathbf{x}|_n$ , tale che*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C^1(I, \mathbb{C}^n)} \leq C [|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)} + \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}].$$

**Dimostrazione** La funzione  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  è soluzione in  $I$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{w}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{w}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)]\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{x} - \mathbf{y} \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}_{\mathbf{A}}(t, t_0)[\mathbf{x} - \mathbf{y}] + \int_{t_0}^t \mathbf{W}_{\mathbf{A}}(t, s)[[\mathbf{A}(s) - \mathbf{B}(s)]\mathbf{v}(s) + \mathbf{f}(s) - \mathbf{g}(s)] ds.$$

Dal lemma 2.2.4 segue allora

$$|\mathbf{w}(t)|_n \leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \int_{t_0}^t M[\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}|\mathbf{v}(s)|_n + \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}] ds.$$

D'altra parte, si ha

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(s, t_0)\mathbf{y} + \int_{t_0}^s \mathbf{W}_{\mathbf{B}}(s, \sigma)\mathbf{g}(\sigma) ds;$$

quindi ancora dal lemma 2.2.4 ricaviamo la stima

$$|\mathbf{v}(s)|_n \leq M|\mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}.$$

Inserendo questa disuguaglianza nella precedente si deduce facilmente

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}(t)|_n &\leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + \\ &\quad + M\ell(I)[M|\mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}]\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)} \leq \\ &\leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + M\ell(I)\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + \\ &\quad + M\ell(I)[M|\mathbf{x}|_n + 1 + M\ell(I)[\|\mathbf{f}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + 1]]\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}, \end{aligned}$$

e da qui segue facilmente, ricordando la definizione di  $M$  fornita nel lemma 2.2.4,

$$\|\mathbf{w}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} \leq C[|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}]$$

con  $C$  dipendente da  $\ell(I)$ ,  $\|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}$ ,  $|\mathbf{x}|_n$  e  $\|\mathbf{f}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}$ .

Infine, dal sistema differenziale risolto da  $\mathbf{w}$  si ricava immediatamente

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}'\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} &\leq \\ &\leq \|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}\|\mathbf{w}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}\|\mathbf{v}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}, \end{aligned}$$

e tenendo conto delle stime precedenti si deduce facilmente la tesi.  $\square$

## Esercizi 2.2

1. Determinare un sistema fondamentale di soluzioni per il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{2t}u(t) - \frac{1}{2t^2}v(t) \\ v'(t) = -\frac{1}{2}u(t) + \frac{3}{2t}v(t). \end{cases}$$

[**Traccia:** Cercare due soluzioni linearmente indipendenti  $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$  di tipo polinomiale.]

2. Sia  $u \in C^1[a, b]$  soluzione dell'equazione  $u'(x) = a(x)u(x) + f(x)$  in  $[a, b]$ , ove  $a, f \in C[a, b]$  sono fissate funzioni a valori reali. Si provi che o la  $u$  è una funzione a valori reali, oppure  $u(x) \notin \mathbb{R}$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

3. Determinare l'insieme delle soluzioni dei sistemi seguenti:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \begin{cases} u'(t) = u(t) - v(t) + t \\ v'(t) = v(t) - 1, \end{cases} & \text{(ii)} \quad & \begin{cases} u'(t) = -v(t) + e^{-t} \\ v'(t) = u(t) + \sin t, \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad & \begin{cases} u'(t) = v(t) + 1 \\ v'(t) = w(t) - 1 \\ w'(t) = -6w(t) - e^t. \end{cases} & \text{(iv)} \quad & \begin{cases} u'(t) = 2u(t) - v(t) + \cos t \\ v'(t) = v(t) + w(t) - \sin t \\ w'(t) = v(t) - w(t). \end{cases} \end{aligned}$$

[**Traccia:** Derivando una delle equazioni si trasformino i sistemi in equazioni differenziali del secondo ordine...]

4. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = -3u(t) + 2v(t) + 2e^t \\ v'(t) = -5u(t) + 4v(t) - e^{3t} \\ u(0) = 0, v(0) = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{2t}u(t) - \frac{1}{2t^2}v(t) + t^2 \\ v'(t) = -\frac{1}{2}u(t) + \frac{3}{2t}v(t) - t \\ u(1) = -1, v(1) = -2. \end{cases}$$

5. Scrivere tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + bv(t) \\ v'(t) = cu(t) + dv(t), \end{cases}$$

al variare dei parametri reali  $a, b, c, d$ .

6. (*Teorema di Liouville*) Si provi che il determinante  $w(t)$  di una qualsiasi matrice Wronskiana  $\mathbf{W}(t)$ , relativa ad un sistema della forma  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t)$ ,  $t \in J$ , soddisfa l'equazione differenziale

$$w'(t) = \text{tr}\mathbf{A}(t) \cdot w(t), \quad t \in J,$$

ove  $\text{tr}\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$  è la *traccia* della matrice  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}$ .

[**Traccia:** Si provi anzitutto che se  $t \in J$  si ha, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\mathbf{W}(t + \varepsilon) = \mathbf{W}(t) + \varepsilon\mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t) + \mathbf{o}(\varepsilon).$$

Se ne deduca, utilizzando il teorema di Binet,

$$\det \mathbf{W}(t + \varepsilon) = \det(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{A}(t)) \det \mathbf{W}(t) + o(\varepsilon).$$

Adesso, indicati con  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , gli autovalori (non necessariamente distinti) di  $\mathbf{A}(t)$ , si deduca che

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{A}(t)) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + o(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \text{tr}(\mathbf{A}(t)) + o(\varepsilon)$$

e che, di conseguenza,

$$\det \mathbf{W}(t + \varepsilon) = (1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}(t))) \det \mathbf{W}(t) + o(\varepsilon).$$

Di qui si ricavi la tesi. Si noti che si poteva dimostrare questo risultato anche utilizzando l'esercizio 2.2.7 ed il fatto che le colonne di  $\mathbf{W}(t)$  sono soluzioni del sistema omogeneo.]

7. Sia  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}$  una matrice  $n \times n$  di funzioni derivabili in  $[a, b]$ . Posto  $d(t) = \det \mathbf{A}(t)$ , si provi che  $d(t)$  è derivabile e che  $d'(t) = \sum_{i=1}^n d'_i(t)$ , ove  $d_i(t) = \det \mathbf{A}_i(t)$  e  $\mathbf{A}_i(t)$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}(t)$  sostituendo la colonna  $i$ -esima  $(a_{1i}(t), \dots, a_{ni}(t))$  con la colonna delle corrispondenti derivate  $(a'_{1i}(t), \dots, a'_{ni}(t))$ . Si provi anche l'analogo risultato in cui si usano le righe anziché le colonne.

## 2.3 Sistemi omogenei a coefficienti costanti

Nel caso di un sistema lineare omogeneo con coefficienti costanti, nel quale cioè la matrice  $\mathbf{A}(t)$  è indipendente da  $t$ , è possibile costruire esplicitamente un sistema fondamentale di soluzioni, definite sull'intero asse reale, cercandole di forma esponenziale: l'ovvia motivazione di questa ricerca è che le funzioni esponenziali sono le uniche che abbiano le proprie derivate multiple di se stesse.

A questo scopo, data una matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ , consideriamo la matrice esponenziale  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ , definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  in virtù della definizione 1.7.16.

**Proposizione 2.3.1** *Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . Allora:*

- (i) *risulta  $\mathbf{e}^{(t+s)\mathbf{A}} = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{s\mathbf{A}}$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ , e in particolare  $\mathbf{e}^{0\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ ;*
- (ii) *si ha  $\det \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr}(t\mathbf{A})} \neq 0$ , con  $[\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}]^{-1} = \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}$ ;*
- (iii) *esiste la matrice  $\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ , e vale l'identità  $\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ .*

**Dimostrazione** (i) È facile conseguenza della definizione 1.7.16; si veda l'esercizio 1.7.12.

(ii) Per la proposizione 1.7.17,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \det \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{t\mathbf{A}}{p} \right)^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \det \left( \mathbf{I} + \frac{t\mathbf{A}}{p} \right)^p = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \det \left( \mathbf{I} + \frac{t\mathbf{A}}{p} \right) \right]^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ 1 + \operatorname{tr} \left( \frac{t\mathbf{A}}{p} \right) + o \left( \frac{1}{p} \right) \right]^p = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\operatorname{tr}(t\mathbf{A})}{p} \right)^p = e^{\operatorname{tr}(t\mathbf{A})}. \end{aligned}$$

La formula dell'inversa segue da (i) scegliendo  $s = -t$ .

(iii) Tenuto conto degli esercizi 1.7.11 e 1.7.7, la serie che definisce  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$  è derivabile termine a termine: dunque

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^{k-1} \mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{A} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h \mathbf{A}^h}{h!} = \mathbf{A} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}. \quad \square$$

Dalla proposizione precedente segue subito:

**Corollario 2.3.2** Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . La matrice di transizione del sistema omogeneo

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

è  $\mathbf{W}(t, \tau) = \mathbf{e}^{(t-\tau)\mathbf{A}}$ . In particolare, per ogni  $t \in J$  le colonne di  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$  formano un sistema fondamentale di soluzioni, e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ha l'unica soluzione  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{x}$ .

**Dimostrazione** La  $i$ -sima colonna di  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$  è il vettore  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}_i$ , che è banalmente soluzione del sistema in virtù della proposizione 2.3.1. Tutte le altre verifiche seguono allo stesso modo.  $\square$

**Corollario 2.3.3** Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  e sia  $\mathbf{f}$  una funzione continua su  $\mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{C}^n$ . L'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

è dato dalle funzioni della forma

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s) ds, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n,$$

e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), & t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{x} + \int_{\tau}^t \mathbf{e}^{(t-\sigma)\mathbf{A}}\mathbf{f}(\sigma) d\sigma.$$

**Dimostrazione** È un'immediata conseguenza della formula che fornisce l'integrale generale di un sistema non omogeneo, e del fatto che nel caso dei coefficienti costanti la matrice di transizione è semplicemente  $\mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}$ .  $\square$

Si noti che la relazione sopra scritta è formalmente analoga alla formula risolutiva dell'equazione scalare del primo ordine  $u'(t) - au(t) = f(t)$ , con  $a$  costante reale, sotto la condizione  $u(\tau) = x$ .

## Calcolo di $e^{t\mathbf{A}}$

Resta ora il problema di calcolare esplicitamente la matrice  $e^{t\mathbf{A}}$ . Questo problema non è banale, salvo casi molto particolari; tuttavia vale la pena di affrontarlo, vista l'importanza teorica della cosa, e ciò sarà fatto nel seguito. Osserviamo però fin d'ora che, per fortuna, le soluzioni di un sistema differenziale lineare omogeneo possono spesso essere determinate con metodi più immediati e diretti, che analizzeremo più in là.

Analizziamo dapprima alcuni casi particolari.

**Esempi 2.3.4 (1)** Un caso in cui il calcolo di  $e^{t\mathbf{A}}$  è particolarmente semplice è quello in cui  $\mathbf{A}$  è una matrice diagonale:

$$\mathbf{A} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Allora, essendo  $\mathbf{A}^k = \mathbf{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , dalla definizione di  $e^{t\mathbf{A}}$  segue immediatamente che

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Più in generale, se la matrice  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile, ossia esiste  $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n$  invertibile tale che  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  sia diagonale, allora risulta

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{U}^{-1},$$

e quindi  $\mathbf{A}^k = \mathbf{U} \cdot \mathbf{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \cdot \mathbf{U}^{-1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ; ne segue

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

**(2)** Quando la matrice  $\mathbf{A}$  è triangolare superiore, ossia i suoi elementi  $a_{ij}$  sono nulli per  $j < i$ , ed inoltre gli elementi della diagonale principale  $a_{ii}$  sono tutti uguali, il calcolo di  $e^{t\mathbf{A}}$  è ancora semplice. In effetti si può scrivere  $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$ , ove  $\lambda$  è il comune valore degli  $a_{ii}$ , e

$$\mathbf{N} = \{n_{ij}\} \text{ con } n_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } j > i \\ 0 & \text{se } j \leq i. \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{N}$  è *nilpotente*, cioè esiste  $m \in \mathbb{N}$  (in questo caso, per la precisione,  $m \leq n$ ) tale che  $\mathbf{N}^m = \mathbf{0}$ : infatti ragionando per induzione è facile vedere che  $\mathbf{N}^h$  ha nulli tutti i suoi elementi con indici  $i, j$  tali che  $j \leq i + h - 1$ , da cui  $\mathbf{N}^n = \mathbf{0}$ . Inoltre, ovviamente le matrici  $\lambda\mathbf{I}$  e  $\mathbf{N}$  commutano fra loro. Pertanto  $e^{t\mathbf{A}}$  ha la forma

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N})} = e^{t\lambda\mathbf{I}} e^{t\mathbf{N}} = e^{t\lambda} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{t^h}{h!} \mathbf{N}^h.$$

Gli elementi della matrice  $e^{t\mathbf{A}}$  sono quindi, in questo caso, opportune combinazioni lineari di prodotti di esponenziali per polinomi di grado minore di  $n$ .

## Preliminari algebrici

Prima di addentrarci nel calcolo di  $e^{t\mathbf{A}}$  occorre richiamare alcuni risultati di algebra lineare. Ricordiamo che due matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$  sono *simili* se esiste una matrice invertibile  $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n$  tale che  $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$ . Ai fini del calcolo esplicito di  $e^{t\mathbf{A}}$  sarà fondamentale costruire la *forma canonica di Jordan* di  $\mathbf{A}$ , che è una matrice triangolare superiore  $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_n$  simile ad  $\mathbf{A}$ , la cui struttura è il più possibile vicina ad una matrice diagonale.

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti complessi: abbiamo visto nel paragrafo 1.7 che ad ogni polinomio  $q(\lambda)$  è possibile associare la matrice  $\mathbf{q}(\mathbf{A})$  mediante la regola

$$q(\lambda) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k \quad \implies \quad \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^N a_k \mathbf{A}^k.$$

Indichiamo con  $p(\lambda)$  il *polinomio caratteristico* di  $\mathbf{A}$ , cioè

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sono gli autovalori distinti di  $\mathbf{A}$ , e  $m_1, \dots, m_k$  le rispettive molteplicità ( $1 \leq m_j \leq n$ ,  $m_1 + \dots + m_k = n$ ), si ha la fattorizzazione

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{m_j} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sia poi  $m(\lambda)$  il *polinomio minimo* di  $\mathbf{A}$ , ossia il polinomio *monico* (cioè con coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1) che ha grado minimo fra tutti i polinomi  $q(\lambda)$  tali che  $\mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . Esso è l'unico generatore dell'ideale principale

$$\mathcal{I}(\mathbf{A}) = \{q \text{ polinomio tale che } \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\} :$$

in altre parole,  $\mathcal{I}(\mathbf{A})$  è formato da tutti e soli i polinomi della forma  $m \cdot q$ , con  $q$  polinomio qualunque. Il polinomio  $m(\lambda)$  è quindi univocamente determinato e verifica  $\mathbf{m}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . Proviamo il seguente

**Teorema 2.3.5 (di Cayley-Hamilton)** *Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . Il polinomio caratteristico  $p$  della matrice  $\mathbf{A}$  verifica  $\mathbf{p}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ .*

**Dimostrazione** Utilizzeremo un classico risultato dell'algebra lineare, secondo il quale ogni matrice a coefficienti complessi è triangolabile per mezzo di un opportuna matrice  $\mathbf{U}$  unitaria (cioè tale che  $|\det \mathbf{U}| = 1$ ). Sia dunque  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  e sia  $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n$  una matrice unitaria tale che  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  sia triangolare superiore. Se rinominiamo gli autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  di  $\mathbf{A}$  come  $\mu_1, \dots, \mu_n$  (contando ciascuno di essi un numero di volte pari alla sua molteplicità), la diagonale principale di  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  sarà formata da  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . In particolare, denotando con  $V_j$  il sottospazio generato dai vettori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j$ , si verifica che

$$(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_1 \mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0},$$



$$(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_j\mathbf{I})\mathbf{e}_j \in V_{j-1}, \quad j = 2, \dots, N.$$

Proviamo la relazione

$$\prod_{h=1}^n (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Otterremo ciò mostrando, per induzione, che per ogni  $j = 1, \dots, n$  risulta

$$\prod_{h=1}^j (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in V_j.$$

Per  $j = 1$  la relazione precedente è stata verificata sopra; supponiamo ora che per un certo  $j \in \{2, \dots, n\}$  valga

$$\prod_{h=1}^{j-1} (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in V_{j-1},$$

e consideriamo un elemento  $\mathbf{w} \in V_j$ , che possiamo scrivere nella forma  $\mathbf{w} = \mathbf{v} + c\mathbf{e}_j$ , con  $c \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{v} \in V_{j-1}$ . Allora si ha  $\mu_j\mathbf{v} \in V_{j-1}$  ed anche, essendo  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  triangolare superiore,  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{v} \in V_{j-1}$ ; pertanto

$$(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_j\mathbf{I})\mathbf{v} \in V_{j-1}$$

e dunque, per ipotesi induttiva,

$$\prod_{h=1}^j (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})\mathbf{w} = \prod_{h=1}^{j-1} (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_j\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

D'altronde, per quanto osservato poc'anzi,  $(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_j\mathbf{I})\mathbf{e}_j \in V_{j-1}$ , cosicché, nuovamente per ipotesi induttiva,

$$\prod_{h=1}^j (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})\mathbf{e}_j = \prod_{h=1}^{j-1} (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_j\mathbf{I})\mathbf{e}_j = \mathbf{0}.$$

Ne segue

$$\prod_{h=1}^j (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{w} \in V_j$$

e ciò prova il passo induttivo.

Abbiamo così provato che

$$\prod_{h=1}^n (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mu_h\mathbf{I}) = \mathbf{0};$$

tornando a scrivere  $\mu_1, \dots, \mu_n$  nella forma  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , ciò significa che

$$\prod_{s=1}^k (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda_s\mathbf{I})^{m_s} = \mathbf{0}$$

(ove  $m_s$  è la molteplicità di  $\lambda_s$ ), ossia

$$\mathbf{U}^{-1} \prod_{s=1}^k (\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{I})^{m_s} \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

e infine

$$\mathbf{p}(\mathbf{A}) = \prod_{s=1}^k (\lambda_s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{m_s} = \mathbf{0},$$

che è la tesi.  $\square$

In particolare, dal teorema di Cayley-Hamilton segue che il polinomio caratteristico  $p$  è un multiplo del polinomio minimo  $m$ , il quale ha dunque la forma

$$m(\lambda) = \prod_{s=1}^k (\lambda - \lambda_s)^{h_s},$$

ove gli  $h_s$  sono interi tali che  $1 \leq h_s \leq m_s$ . È facile infatti verificare che  $h_s \neq 0$ : se  $\mathbf{v}$  è un autovettore non nullo relativo all'autovalore  $\lambda_s$ , si vede immediatamente che  $\mathbf{A}^j \mathbf{v} = \lambda_s^j \mathbf{v}$  per ogni  $j$ , da cui  $\mathbf{0} = \mathbf{m}(\mathbf{A}) \mathbf{v} = m(\lambda_s) \mathbf{v}$ ; dato che  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , il numero  $m(\lambda_s)$  deve essere nullo, e pertanto  $h_s \geq 1$ .

**Esempi 2.3.6** (1) Sia  $n = 2$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Allora  $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$  e  $m(\lambda) = \lambda - 1$ , in quanto  $\mathbf{m}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ .

(2) Sia  $n = 2$  e  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Allora necessariamente  $p(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ .

(3) Sia  $n = 3$  e  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Allora  $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ , ed essendo

$(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ , deve essere  $m(\lambda) = p(\lambda)$ .

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 2.3.7** Siano  $q_1, \dots, q_m$  polinomi relativamente primi; detto  $Q$  il loro minimo comune multiplo, si ha

$$\ker \mathbf{Q}(\mathbf{A}) = \bigoplus_{i=1}^m \ker \mathbf{q}_i(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n.$$

**Dimostrazione** Fissata  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ , ragioniamo per induzione su  $m$ . Sia  $m = 2$ , e proviamo anzitutto che i nuclei di  $\mathbf{q}_1(\mathbf{A})$  e  $\mathbf{q}_2(\mathbf{A})$  hanno intersezione  $\{\mathbf{0}\}$ . Sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  tale che  $\mathbf{q}_1(\mathbf{A}) \mathbf{v} = \mathbf{q}_2(\mathbf{A}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ; scelti due polinomi  $r_1$  e  $r_2$  tali che  $r_1(\lambda)q_1(\lambda) + r_2(\lambda)q_2(\lambda) \equiv 1$

(essi esistono, in virtù dell'*identità di Bézout*, perché  $q_1$  e  $q_2$  sono relativamente primi), si deduce

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}_1(\mathbf{A})\mathbf{q}_1(\mathbf{A})\mathbf{v} + \mathbf{r}_2(\mathbf{A})\mathbf{q}_2(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ciò mostra che  $\ker \mathbf{q}_1(\mathbf{A}) \cap \ker \mathbf{q}_2(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ . Adesso dimostriamo che  $\ker \mathbf{Q}(\mathbf{A}) = \ker \mathbf{q}_1(\mathbf{A}) \oplus \ker \mathbf{q}_2(\mathbf{A})$ .

Se  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{q}_1(\mathbf{A}) \oplus \ker \mathbf{q}_2(\mathbf{A})$ , sarà  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , con  $\mathbf{q}_1(\mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_2(\mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ ; ne segue, essendo  $Q$  multiplo sia di  $q_1$  che di  $q_2$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ , da cui  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{Q}(\mathbf{A})$ . Viceversa, sia  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{Q}(\mathbf{A})$ : allora dalla relazione  $r_1q_1 + r_2q_2 \equiv 1$  segue

$$\mathbf{0} = \mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{r}_1(\mathbf{A})\mathbf{q}_1(\mathbf{A})\mathbf{v} + \mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{r}_2(\mathbf{A})\mathbf{q}_2(\mathbf{A})\mathbf{v}.$$

Poniamo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_2(\mathbf{A})\mathbf{q}_2(\mathbf{A})\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_1(\mathbf{A})\mathbf{q}_1(\mathbf{A})\mathbf{v}$ ; allora si ha  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ . Inoltre, dato che  $Q$  è il minimo comune multiplo fra  $q_1$  e  $q_2$ , esiste un polinomio non nullo  $R$  tale che  $R \cdot Q = q_1 \cdot q_2$ , cosicché

$$\mathbf{q}_1(\mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1(\mathbf{A})\mathbf{r}_2(\mathbf{A})\mathbf{q}_2(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{r}_2(\mathbf{A})\mathbf{R}(\mathbf{A})\mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{r}_2(\mathbf{A})\mathbf{R}(\mathbf{A})\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e similmente  $\mathbf{q}_2(\mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ . Ciò prova che  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{q}_1(\mathbf{A}) \oplus \ker \mathbf{q}_2(\mathbf{A})$ .

Supponiamo ora che la tesi valga per un certo intero  $m$ , e consideriamo  $m + 1$  polinomi  $q_1, \dots, q_{m+1}$  relativamente primi fra loro. Poniamo

$$Q = \text{m.c.m.}\{q_1, \dots, q_m\}, \quad P = \text{m.c.m.}\{q_{m+1}, Q\}$$

e osserviamo che i due polinomi  $Q$  e  $q_{m+1}$  sono relativamente primi: quindi, come abbiamo visto, l'intersezione fra i loro nuclei è  $\{\mathbf{0}\}$ . Utilizzando il caso  $m = 2$  già dimostrato, nonché l'ipotesi induttiva, otteniamo

$$\begin{aligned} \ker \mathbf{P}(\mathbf{A}) &= \ker \mathbf{Q}(\mathbf{A}) \oplus \ker \mathbf{q}_{m+1}(\mathbf{A}) = \\ &= \left( \bigoplus_{h=1}^m \ker \mathbf{q}_h(\mathbf{A}) \right) \oplus \ker \mathbf{q}_{m+1}(\mathbf{A}) = \bigoplus_{h=1}^{m+1} \ker \mathbf{q}_h(\mathbf{A}). \quad \square \end{aligned}$$

**Corollario 2.3.8** *Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  i suoi autovalori distinti. Se  $P$  è un polinomio tale che*

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad P(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{r_j},$$

*allora si ha*

$$\bigoplus_{j=1}^k \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{r_j} = \mathbb{C}^n.$$

**Dimostrazione** La tesi è conseguenza immediata della proposizione 2.3.7, osservando che  $\ker \mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{C}^n$  e

$$P(\lambda) = \text{m.c.m.}\{(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}\}. \quad \square$$

Il corollario che segue è la chiave di volta di tutta la nostra costruzione: si decompone  $\mathbb{C}^n$  come somma diretta di sottospazi invarianti, in ognuno dei quali si concentrano le informazioni relative al singolo autovalore  $\lambda_j$ . Questo ci permetterà di trasformare la matrice  $\mathbf{A}$  nella sua *forma canonica di Jordan*.

**Corollario 2.3.9** Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  e sia  $m(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{h_j}$  il polinomio minimo di  $\mathbf{A}$ . Allora:

(i)  $\bigoplus_{j=1}^k \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j} = \mathbb{C}^n$ ;

(ii)  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p = \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j}$  per ogni  $p \geq h_j$  e per ogni  $j = 1, \dots, k$ .

(iii)  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p \subset \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{p+1}$  per ogni  $p < h_j$  e per ogni  $j = 1, \dots, k$ .

**Dimostrazione** (i) Segue dal corollario 2.3.8, essendo  $\mathbf{m}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  per definizione di polinomio minimo.

(ii) Fissato  $j$ , supponiamo che sia  $\dim \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p > \dim \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j}$  per un certo intero  $p > h_j$ : poiché il polinomio  $q(\lambda) = m(\lambda)(\lambda - \lambda_j)^{p-h_j}$  verifica  $\mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ , dal corollario 2.3.8 seguirebbe che

$$\mathbb{C}^n = \left( \bigoplus_{i \neq j} \ker(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{h_i} \right) \oplus \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p,$$

il che è assurdo, dato che il membro destro di questa uguaglianza ha dimensione maggiore di  $n$ .

(iii) Sia, per assurdo,  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p = \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{p+1}$  per un certo intero positivo  $p < h_j$ . È immediato riconoscere allora che

$$\ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p = \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{p+1} = \dots = \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j};$$

ma allora per il corollario 2.3.8 il polinomio  $q(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{h_j - p}}$  verificherebbe

$$\ker \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \left( \bigoplus_{i \neq j} \ker(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{h_i} \right) \oplus \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^p = \bigoplus_{j=1}^k \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j} = \mathbb{C}^n,$$

da cui  $\mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ : ciò è assurdo, perché il grado di  $q$  è minore del grado di  $m$ .  $\square$

**Osservazione 2.3.10** Vi è un metodo abbastanza semplice, benché un po' laborioso, per calcolare esplicitamente il polinomio minimo di una matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . Si calcolano, per ciascun  $j = 1, \dots, n$ , i vettori

$$\mathbf{e}_j, \mathbf{A}\mathbf{e}_j, \mathbf{A}^2\mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{A}^{d_j}\mathbf{e}_j,$$

fino al minimo intero  $d_j$  tale che questi vettori risultino linearmente dipendenti. Si avrà allora

$$\alpha_0 \mathbf{e}_j + \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{e}_j + \dots + \alpha_{d_j-1} \mathbf{A}^{d_j-1} \mathbf{e}_j + \mathbf{A}^{d_j} \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

per opportuni coefficienti  $\alpha_0, \dots, \alpha_{d_j-1} \in \mathbb{C}$ . Posto

$$p_j(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{d_j-1} \lambda^{d_j-1} + \lambda^{d_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

il polinomio minimo di  $\mathbf{A}$  è dato da

$$m = \text{m.c.m.}\{p_1, \dots, p_n\}.$$

Giustificiamo questa affermazione. Consideriamo l'ideale

$$\mathcal{I}_j = \{q \text{ polinomio tale che } \mathbf{q}(\mathbf{A})\mathbf{e}_j = \mathbf{0}\} :$$

se  $q \in \mathcal{I}_j$  è un polinomio di grado  $k$ , allora i vettori  $\mathbf{e}_j, \mathbf{A}\mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{A}^k\mathbf{e}_j$  sono linearmente dipendenti, cosicché deve essere  $k \geq d_j$ . Ne segue che  $p_j$  è il polinomio di  $\mathcal{I}_j$  che ha grado minimo, ossia  $p_j$  è un generatore di  $\mathcal{I}_j$ . Dato che

$$\bigcup_{j=1}^n \mathcal{I}_j = \mathcal{I}(\mathbf{A}),$$

è immediato vedere che ogni elemento di  $\mathcal{I}(\mathbf{A})$  è multiplo di ciascuno dei  $p_j$ , e quindi anche del loro minimo comune multiplo. D'altronde, è chiaro che  $\text{m.c.m.}\{p_1, \dots, p_n\} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ , e dunque esso coincide col polinomio minimo  $m$ .

**Esempi 2.3.11 (1)** Consideriamo la matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ . Si ha

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 6)(\lambda - 1),$$

e poiché  $p$  ha due radici semplici, deve essere necessariamente  $m(\lambda) = p(\lambda)$ .

**(2)** Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Si verifica facilmente che  $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ . Inoltre

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};$$

dunque  $\mathbf{A}^2\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{A}\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ , da cui  $p_1(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$ . Similmente

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix},$$

da cui, ancora,  $\mathbf{A}^2\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{A}\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$  e  $p_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = p_1(\lambda)$ . Analogamente

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix},$$

e nuovamente  $\mathbf{A}^2\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{A}\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$  e  $p_3(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = p_1(\lambda)$ . In definitiva

$$m(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5),$$

mentre con facile calcolo si vede che

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

(3) Poniamo  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix}$ . Risulta, con qualche calcolo,

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & -2i & 1 \\ -1 & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix};$$

da qui si deduce con poca fatica  $\mathbf{A}^3\mathbf{e}_1 + i\mathbf{A}^2\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ , da cui  $p_1(\lambda) = \lambda^3 + i\lambda^2 + \lambda - i$ . Dato che questo polinomio ha grado pari alla dimensione della matrice, si può tralasciare il calcolo di  $p_2$  e  $p_3$  e concludere che il polinomio minimo coincide con  $p_1$  ed anche col polinomio caratteristico:

$$m(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^3 + i\lambda^2 + \lambda - i.$$

Vi è un semplice criterio per stabilire quando una matrice  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile:

**Proposizione 2.3.12** *Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ , con autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Allora  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile se e solo se il polinomio minimo di  $\mathbf{A}$  ha tutte radici semplici.*

**Dimostrazione** Supponiamo che

$$m(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j).$$

Allora, per il corollario 2.3.9(i),

$$\bigoplus_{j=1}^k \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) = \mathbb{C}^n.$$

Sia  $m_j$  la dimensione di  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$ . Allora possiamo costruire una base di  $\mathbb{C}^n$  della forma

$$\{\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{v}_{m_k}^{(k)}\},$$

ove, per ogni  $j$ ,  $\{\mathbf{v}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{v}_{m_j}^{(j)}\}$  è una base di  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$ . Ridenominiamo questa base come

$$\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$$

e consideriamo la matrice  $\mathbf{U}$  che ha come colonne i vettori  $\mathbf{w}_i$ : allora, indicato con  $\lambda_{r_i}$  l'autovalore di cui  $\mathbf{w}_i$  è autovettore, si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda_{r_i} \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

da cui

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \lambda_{r_i}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{w}_i = \lambda_{r_i}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

cosicché  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  è diagonale.

Viceversa, supponiamo che  $\mathbf{A}$  sia diagonalizzabile e prendiamo  $\mathbf{U}$  tale che  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$  sia diagonale. A meno di permutazioni di indici (il che corrisponde a considerare  $\mathbf{U}\mathbf{V}$  al posto di  $\mathbf{U}$ , con  $\mathbf{V}$  opportuna matrice unitaria) possiamo supporre che

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k).$$

Per  $j = 1, \dots, k$  indichiamo con  $m_j$  il numero di righe che contengono l'elemento  $\lambda_j$  (in particolare,  $\sum_{j=1}^k m_j = n$ ), e per  $i = 1, \dots, n$  poniamo  $\mathbf{w}_i = \mathbf{U}\mathbf{e}_i$ . Allora  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  è una base di  $\mathbb{C}^n$ ; inoltre, essendo

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{e}_i &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{e}_i, & i &= 1, \dots, m_1, \\ \lambda_2\mathbf{e}_i &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{e}_i, & i &= m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2, \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_k\mathbf{e}_i &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{e}_i, & i &= \left(\sum_{h=1}^{k-1} m_h\right) + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

si deduce, per  $1 \leq j \leq k$  e  $\left(\sum_{h=1}^{j-1} m_h\right) + 1 \leq i \leq \sum_{h=1}^j m_h$ ,

$$\lambda_j\mathbf{w}_i = \lambda_j\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{w}_i,$$

ossia

$$\mathbf{w}_i \in \ker(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I}), \quad i = \sum_{h=1}^{j-1} m_h + 1, \dots, \sum_{h=1}^j m_h, \quad j = 1, \dots, k.$$

Ciò prova che

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^k \ker(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I}),$$

e da qui un facile ragionamento per assurdo, che utilizza il corollario 2.3.9, mostra che

$$m(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j). \quad \square$$

## Calcolo esplicito di $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$

A questo punto abbiamo acquisito tutte le premesse necessarie per il calcolo esplicito della matrice  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ .

Sia dunque  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ , e supponiamo che essa abbia  $k$  autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , con le rispettive molteplicità  $m_1, \dots, m_k$  tali che  $\sum_{j=1}^k m_j = n$ . Supporremo di conoscere tali autovalori, trascurando il fatto che in pratica non sempre è possibile calcolarli esattamente.

Se  $\mathbf{A}$  è diagonale, allora  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$  è stata già costruita nell'esempio 2.3.4. Se non siamo

in questo caso, allora conviene determinare (utilizzando l'osservazione 2.3.10 o anche, nei casi semplici, metodi più diretti) il polinomio minimo  $m$ , esaminando il quale si può innanzitutto dedurre, grazie alla proposizione 2.3.12, se  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile o no. In caso affermativo, si può trovare una base di  $\mathbb{C}^n$  fatta di autovettori, la quale è calcolabile con poca fatica; allora la matrice  $\mathbf{U}$ , le cui colonne sono tali autovettori, fornisce il cambiamento di base che diagonalizza  $\mathbf{A}$ , e il calcolo di  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$  si effettua come mostrato nell'esempio 2.3.4(1). In caso contrario, se  $\mathbf{A}$  è triangolare superiore ed ha gli elementi della diagonale principale tutti uguali, la matrice  $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$  può essere calcolata direttamente seguendo la procedura dell'esempio 2.3.4(2); altrimenti, si può procedere come segue. Sappiamo che risulta

$$\bigoplus_{j=1}^k \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j} = \mathbb{C}^n$$

ove gli  $h_j$  sono gli esponenti nella fattorizzazione del polinomio minimo. Ciò significa che ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  si può scrivere in modo unico nella forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_1 \mathbf{u} + \dots + \mathbf{P}_k \mathbf{u},$$

ove  $\mathbf{P}_j \mathbf{u}$  è la proiezione di  $\mathbf{u}$  sul sottospazio  $S_j = \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j}$ . Le proiezioni  $\mathbf{P}_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  sono applicazioni lineari dotate, in virtù dell'unicità della decomposizione, delle proprietà seguenti:

$$\mathbf{P}_j^2 = \mathbf{P}_j, \quad \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i = \mathbf{0} \quad \text{per } j \neq i, \quad \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j = \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_j \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in S_j.$$

Inoltre esse commutano con  $\mathbf{A}$ : infatti i sottospazi  $S_j$  sono invarianti per  $\mathbf{A}$ , ossia  $\mathbf{A}\mathbf{v} \in S_j$  se  $\mathbf{v} \in S_j$ , da cui

$$\mathbf{P}_j \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{P}_j \mathbf{A} (\mathbf{P}_1 \mathbf{u} + \dots + \mathbf{P}_k \mathbf{u}) = \mathbf{P}_j \mathbf{A} \mathbf{P}_j \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{P}_j \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n.$$

Di conseguenza la matrice  $\mathbf{A}$  può essere decomposta nella forma  $\mathbf{A} = \mathbf{K} + \mathbf{P}$ , ove

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{P}_j, \quad \mathbf{K} = \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{P}_j.$$

Le matrici  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{P}$  ovviamente commutano, e inoltre  $\mathbf{K}$  è nilpotente, in quanto, scelto  $r = \max\{h_1, \dots, h_k\}$ , si ha per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^r \mathbf{u} &= \left[ \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{P}_j \right]^r \mathbf{u} = \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^r \mathbf{P}_j \mathbf{u} = \\ &= \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{r-h_j} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_j} \mathbf{P}_j \mathbf{u} = \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{r-h_j} \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$



Conviene allora determinare una base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  di “autovettori generalizzati”, ossia di elementi dei sottospazi  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ : precisamente,

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_1} \in S_1, \mathbf{v}_{m_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{m_1+m_2} \in S_2, \dots, \mathbf{v}_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in S_k.$$

Il calcolo di tale base è un esercizio di routine. Sia ora  $\mathbf{U}$  la matrice che ha per colonne gli autovettori generalizzati  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Col passaggio a questa base, la matrice trasformata di  $\mathbf{P}$  è

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k),$$

ove ciascuno dei  $\lambda_j$  compare esattamente  $m_j$  volte: infatti, scelto  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ , risulta  $\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$ ; supposto che tale vettore sia un generatore di  $S_j$ , si ha  $\mathbf{P}\mathbf{v}_i = \lambda_j\mathbf{v}_i$ , da cui  $\mathbf{D}\mathbf{e}_i = \mathbf{U}^{-1}\lambda_j\mathbf{v}_i = \lambda_j\mathbf{e}_i$ . Invece la matrice trasformata di  $\mathbf{K}$  è

$$\mathbf{N} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U};$$

essa commuta con  $\mathbf{D}$  ed è ancora una matrice nilpotente, poiché

$$\mathbf{N}^r = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U})^r = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{K}^r\mathbf{U} = \mathbf{0}.$$

Da tutti questi fatti segue che

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{U}\mathbf{e}^{t\mathbf{N}}\mathbf{e}^{t\mathbf{D}}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_k}, \dots, e^{t\lambda_k}) \cdot \sum_{h=0}^k \frac{t^h}{h!} \mathbf{N}^h \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

**Esempi 2.3.13 (1)** Sia  $n = 3$  e consideriamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica subito che  $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$ , ed essendo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

deve essere  $m(\lambda) = p(\lambda)$ . Cerchiamo gli autovettori generalizzati. Per l'autovalore  $\lambda_1 = 2$  si ha  $h_1 = 1$  e

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y = z,$$

da cui segue che  $\ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$  è generato dal vettore  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ . Per l'autovalore  $\lambda_2 = -1$  si ha  $h_2 = 2$  e

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0,$$

cosicché  $\ker(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2$  è generato dai vettori ortogonali  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ . Dopo calcoli di routine si trova

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}.$$

Dunque

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{t\mathbf{N}} = \mathbf{I} + t\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 1 \end{pmatrix},$$

ed infine

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{U}\mathbf{e}^{t\mathbf{D}}\mathbf{e}^{t\mathbf{N}}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 2te^{-t} & e^{2t} - (2t+1)e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Pertanto il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2y \\ z' = 2x + y - z \\ x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = -1 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} \\ 2e^{2t} - (2t+3)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(2) Sia  $n = 2$  e poniamo  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; si ha  $p(\lambda) = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = m(\lambda)$  e gli autovettori sono ad esempio  $\mathbf{v}_1 = (1, i)$  (relativo a  $\lambda_1 = 1 + i$ ),  $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$  (relativo a  $\lambda_2 = 1 - i$ ). Allora

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{0},$$

cosicché

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{U}\mathbf{e}^{t\mathbf{D}}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} & -ie^{(1+i)t} + ie^{(1-i)t} \\ ie^{(1+i)t} - ie^{(1-i)t} & e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'integrale generale del sistema  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$  è pertanto dato dalle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{C}^n;$$

in particolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \\ x(0) = 0, y(0) = -1 \end{cases}$$

è la funzione  $\mathbf{u}(t) = (-e^t \sin t, -e^t \cos t)$ .

## Metodo pratico

Il calcolo di  $e^{t\mathbf{A}}$ , come si è visto, è alquanto laborioso, anche se non difficile. Talvolta, per determinare l'integrale generale del sistema omogeneo  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ , può essere preferibile seguire un'altra strada.

Sia  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  una matrice qualunque: tre casi sono possibili.

**Caso 1** La matrice  $\mathbf{A}$  ha autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tutti semplici.

Si cercano soluzioni del tipo  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ , e si trova che deve essere  $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ , cioè  $\lambda$  deve essere un autovalore di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{v}$  un corrispondente autovettore. Si ottengono allora le  $n$  soluzioni linearmente indipendenti

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

(in accordo col fatto che  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile), in generale complesse. Però, nel caso in cui  $\mathbf{A}$  è una matrice *reale*, tenuto conto che gli autovalori non reali compaiono a coppie coniugate ed i rispettivi autovettori sono l'uno il coniugato dell'altro, si possono sempre trovare, modificando le  $\mathbf{u}_i$  per somme e differenze,  $n$  soluzioni linearmente indipendenti *reali*. Infatti, supponiamo che fra le soluzioni scritte sopra compaia la coppia

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \bar{\mathbf{v}}e^{\bar{\lambda}t},$$

e scriviamo  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ ,  $\lambda = \alpha + i\beta$  con  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ : allora è facile riconoscere che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t)] &= e^{\alpha t}[\mathbf{x} \cos \beta t - \mathbf{y} \sin \beta t] \\ \frac{1}{2i}[\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)] &= e^{\alpha t}[\mathbf{y} \cos \beta t + \mathbf{x} \sin \beta t] \end{aligned}$$

e quindi possiamo sostituire la coppia  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  con la coppia di soluzioni reali  $\frac{1}{2}[\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2], \frac{1}{2i}[\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2]$ .

**Esempio 2.3.14** Sia  $n = 3$  e poniamo  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ : gli autovalori sono  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 + i, \lambda_3 = 3 - i$ ; come autovettori corrispondenti possiamo scegliere

$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1+i, 2-i)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 1-i, 2+i)$ . Quindi tre soluzioni linearmente indipendenti (complesse) sono

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{2t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{(3+i)t}, \quad \mathbf{u}_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{(3-i)t},$$

e tre soluzioni linearmente indipendenti (reali) sono

$$\mathbf{w}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema sarà dato dalle funzioni

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= c_1 \mathbf{w}_1(t) + c_2 \mathbf{w}_2(t) + c_3 \mathbf{w}_3(t) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t) \\ e^{3t}[(c_2 + c_3) \cos t - (c_2 - c_3) \sin t] \\ c_1 e^{2t} + e^{3t}[(2c_2 - c_3) \cos t + (c_2 + 2c_3) \sin t] \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

**Caso 2** La matrice  $\mathbf{A}$  ha (almeno) un autovalore  $\lambda_0$  di molteplicità  $r > 1$  uguale alla dimensione di  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})$ .

In questo caso il monomio  $(\lambda - \lambda_0)$  compare con esponente 1 nella fattorizzazione del polinomio minimo  $m(\lambda)$ . Si trovano allora  $r$  soluzioni linearmente indipendenti, relative all'autovalore  $\lambda_0$ , della forma

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_0 t}, \dots, \mathbf{v}_r e^{\lambda_0 t},$$

ove  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  è una base di  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})$ .

**Esempio 2.3.15** Sia  $n = 3$  e poniamo  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ : gli autovalori sono  $\lambda_1 = 2$

e  $\lambda_0 = -1$  (doppio); gli autovettori corrispondenti sono, ad esempio,  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$  per  $\lambda_1$  e  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$  per  $\lambda_0$ . Tre soluzioni linearmente indipendenti del sistema  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$  sono allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{2t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{-t}, \quad \mathbf{u}_3(t) = \mathbf{v}_3 e^{-t},$$

e l'integrale generale è dato dalle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) + c_3 \mathbf{u}_3(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} - (c_2 + c_3) e^{-t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

**Caso 3** La matrice  $\mathbf{A}$  ha (almeno) un autovalore  $\lambda_0$  di molteplicità  $r > 1$  maggiore della dimensione  $m$  di  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})$ .

In questo caso il monomio  $(\lambda - \lambda_0)$  compare con esponente maggiore di 1 nella fattorizzazione del polinomio minimo  $m(\lambda)$ . Gli autovettori linearmente indipendenti  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$

relativi a  $\lambda_0$  sono solo  $m$ , meno degli  $r$  necessari per costruire una base di  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I})$ . Allora accanto alle  $m$  soluzioni linearmente indipendenti

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_0 t}, \dots, \mathbf{v}_m e^{\lambda_0 t},$$

bisogna trovarne altre  $r - m$ , che si cercano della forma

$$\mathbf{p}_1(t) e^{\lambda_0 t}, \dots, \mathbf{p}_{r-m}(t) e^{\lambda_0 t},$$

ove i  $\mathbf{p}_j(t)$  sono vettori linearmente indipendenti le cui componenti sono polinomi di grado  $j$  ( $1 \leq j \leq r - m$ ): in altre parole, risulta  $\mathbf{p}_j(t) = \sum_{k=0}^j \mathbf{c}_{jk} t^k$  con  $\mathbf{c}_{jj} \neq \mathbf{0}$ .

**Esempio 2.3.16** Sia  $n = 3$  e poniamo  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ : gli autovalori sono  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_0 = 1$  (doppio); un autovettore relativo a  $\lambda_1$  è  $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 4)$ , mentre lo spazio  $\ker(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I})$  ha dimensione 1 ed è generato ad esempio da  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ . Tre soluzioni linearmente indipendenti sono

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{-2t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^t, \quad \mathbf{u}_3(t) = \mathbf{p}_1(t) e^t,$$

dove  $\mathbf{p}_1(t)$  è un vettore-polinomio di grado 1, quindi della forma  $\mathbf{p}_1(t) = (a + bt, a' + b't, a'' + b''t)$ . Sostituendo nel sistema  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$  si trova  $\mathbf{p}_1(t) = (a + bt, a + b + bt, a + 2b + bt)$ , e si può scegliere ad esempio  $a = 0, b = 1$ . Quindi l'integrale generale del sistema è dato dalle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + e^t(c_2 + c_3 t) \\ -2c_1 e^{-2t} + e^t[c_2 + c_3(1+t)] \\ 4c_1 e^{-2t} + e^t[c_2 + c_3(2+t)] \end{pmatrix}.$$

## Esercizi 2.3

1. (*Sistemi differenziali di Eulero*) Si consideri il sistema

$$\mathbf{u}'(t) = \frac{1}{t} \mathbf{A} \mathbf{u}(t), \quad t > 0,$$

ove  $\mathbf{A}$  è una fissata matrice  $n \times n$ . Si provi che l'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}^{(\ln t)\mathbf{A}} \mathbf{c}, \quad t > 0,$$

al variare di  $\mathbf{c}$  in  $\mathbb{C}^n$ .

[**Traccia:** porre  $t = e^s$  e  $\mathbf{z}(s) = \mathbf{u}(e^s)$ .]

2. Sia  $\lambda$  un autovalore di molteplicità  $m$  per una matrice  $\mathbf{A}$ ; supponiamo che risulti  $\dim \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 1$ . Si provi che si possono trovare altri  $m$  autovettori generalizzati linearmente indipendenti risolvendo successivamente i sistemi  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m-1}$ .

3. Determinare un sistema fondamentale di soluzioni per il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = -v(t) + w(t) \\ v'(t) = -2u(t) - v(t) - 6w(t) \\ w'(t) = -v(t) + w(t). \end{cases}$$

4. Determinare l'esponenziale delle matrici seguenti:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Determinare l'integrale generale del sistema  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ , quando la matrice  $\mathbf{A}$  è una delle seguenti:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & 11 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Determinare l'integrale generale dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} u'(t) = 3u(t) + v(t) + \sin t \\ v'(t) = v(t) - u(t) + e^{2t}, \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = -4u(t) - 2v(t) + \frac{2}{e^t-1} \\ v'(t) = 6u(t) + 3v(t) - \frac{3}{e^t-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(t) = iu(t) - v(t) \\ v'(t) = u(t) + iv(t) + e^{it}, \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = 2u(t) - 3w(t) \\ w'(t) = z(t) \\ z'(t) = u(t) - 2w(t). \end{cases}$$

7. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} u''(t) + 5u'(t) + 2v'(t) + v(t) = 0 \\ 3u''(t) + 5u(t) + v'(t) + 3v(t) = 0. \end{cases}$$

[**Traccia** Posto  $w(t) = u'(t)$ , si trasformi il sistema in uno di tre equazioni del primo ordine...]

8. Provare che tutte le soluzioni del sistema  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$  sono infinitesime per  $t \rightarrow +\infty$  se e solo se ciascun autovalore di  $\mathbf{A}$  ha parte reale negativa, e che in tal caso il decadimento per  $t \rightarrow +\infty$  è di tipo esponenziale.

## 2.4 Equazioni lineari di ordine $n$

Un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  ha la forma

$$u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u^{(k)}(t) + f(t), \quad t \in J,$$

ove  $J$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ , e  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f$  sono funzioni continue su  $J$  a valori reali o complessi. Naturalmente,  $u^{(0)}(t)$  significa  $u(t)$ .

È facile riconoscere che se una funzione  $u \in C^n(J, \mathbb{C})$  risolve questa equazione, allora la funzione vettoriale

$$\mathbf{v}(t) = (v^1(t), \dots, v^n(t)), \quad \text{con } v^k(t) = u^{(k-1)}(t), \quad k = 1, \dots, n,$$

appartiene a  $C^1(J, \mathbb{C}^n)$  e risolve il sistema

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{F}(t), \quad t \in J$$

ove

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Viceversa, se  $\mathbf{v}$  è una funzione appartenente a  $C^1(J, \mathbb{C}^n)$  che risolve il sistema sopra scritto, allora è immediato verificare che la funzione  $u(t) = v^1(t)$ , prima componente del vettore  $\mathbf{v}(t)$ , appartiene a  $C^n(J, \mathbb{C})$  e risolve l'equazione differenziale di partenza.

Pertanto la teoria delle equazioni lineari di ordine  $n$  si può dedurre da quella svolta nel paragrafo 2.2 per i sistemi lineari. In particolare, vale il principio di sovrapposizione: se  $u, v$  risolvono nell'intervallo  $J$  rispettivamente le equazioni

$$u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u^{(k)}(t) + f(t), \quad v^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)v^{(k)}(t) + g(t),$$

e se  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , allora  $\lambda u + \mu v$  è soluzione in  $J$  di

$$(\lambda u + \mu v)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)(\lambda u + \mu v)^{(k)}(t) + \lambda f(t) + \mu g(t).$$

Di conseguenza, indicato con  $V_f$  lo spazio affine delle soluzioni dell'equazione con secondo membro  $f$ , si ha

$$V_f = V_0 + u_f$$

ove  $V_0$  è, naturalmente, lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea e  $u_f$  è un fissato, arbitrario elemento di  $V_f$ .

Inoltre, per ogni scelta di  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  in  $\mathbb{C}$ , il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u^{(k)}(t) + f(t), & t \in J, \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

ha soluzione unica in  $C^n(J, \mathbb{C})$ .

Ne segue che lo spazio  $V_0$  ha dimensione  $n$ : una base è data, ad esempio, dalle soluzioni  $u_i$  degli  $n$  problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u_i^{(k)}(t), & t \in J, \\ u_i(t_0) = 0 \\ \dots \\ u_i^{(i-1)}(t_0) = 1 \\ \dots \\ u_i^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dati  $n$  elementi  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V_0$ , la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

si chiama, come nel caso dei sistemi, *matrice Wronskiana* relativa alle funzioni  $u_1, \dots, u_n$ : essa non è altro che la matrice Wronskiana relativa al sistema corrispondente alla nostra equazione, poiché ha per vettori colonna le funzioni  $\mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_n(t)$  date da  $\mathbf{v}_i(t) = (u_i(t), u_i'(t), \dots, u_i^{(n-1)}(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Risulta, in virtù del teorema di Liouville (teorema 2.2.6),

$$\det \mathbf{W}(t) = \det \mathbf{W}(t_0) \exp \int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds, \quad t \in J,$$



e dunque  $\det \mathbf{W}(t)$  è identicamente nullo in  $J$  oppure è sempre diverso da 0 in  $J$ . In quest'ultimo caso, la  $n$ -pla di funzioni  $(u_1(t), \dots, u_n(t))$  è una base di  $V_0$  e si chiama, ancora, *sistema fondamentale di soluzioni* dell'equazione; risulta allora

$$V_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}\}.$$

Un elemento  $u_f$  di  $V_f$  si può trovare col metodo di variazione delle costanti arbitrarie: si ha  $u_f \in V_f$  se e solo se  $\mathbf{u}_f = (u_f, u_f', \dots, u_f^{(n-1)})$  è soluzione del sistema differenziale corrispondente. Fissiamo un sistema fondamentale di soluzioni  $u_1, \dots, u_n \in V_0$ , e sia  $\mathbf{W}(t)$  la relativa matrice Wronskiana. Se si cerca  $\mathbf{u}_f$ , soluzione particolare del sistema corrispondente, della forma  $\mathbf{u}_f(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t)$ , come sappiamo si trova la condizione

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{F}(t),$$

ove  $\mathbf{F}(t) = (0, 0, \dots, 0, f(t))$ .

Denotiamo con  $\mathbf{W}_{ij}(t)$  la matrice ottenuta da  $\mathbf{W}(t)$  cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ ; si ha allora

$$\mathbf{W}(t)^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}(t)} \{b_{ij}(t)\}, \quad \text{con} \quad b_{ij}(t) = (-1)^{i+j} \det \mathbf{W}_{ji}(t),$$

da cui

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{F}(t) = \frac{f(t)}{\det \mathbf{W}(t)} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \det \mathbf{W}_{n1}(t) \\ (-1)^{n+2} \det \mathbf{W}_{n2}(t) \\ \vdots \\ \det \mathbf{W}_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

In definitiva, le funzioni  $c_i(t)$  saranno arbitrarie primitive delle funzioni sopra indicate. Perciò potremo scrivere la soluzione particolare  $u_f$  nella forma

$$u_f(t) = \langle \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t), \mathbf{e}_1 \rangle_n = \sum_{i=1}^n u_i(t) \int_s^t \frac{(-1)^{(n+i)} f(r) \det \mathbf{W}_{ni}(r)}{\det \mathbf{W}(r)} dr,$$

con  $s \in J$  arbitrariamente fissato.

**Esempio 2.4.1** Consideriamo l'equazione

$$u'''(t) + u'(t) = e^{it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Andiamo a determinare l'insieme  $V_0$ . Se  $u$  è soluzione di  $u''' + u' = 0$ , la funzione  $v = u'$  risolve  $v'' + v = 0$  e quindi, come si sa,

$$v(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

da cui  $u(t) = \frac{1}{i} c_1 e^{it} - \frac{1}{i} c_2 e^{-it} + c_3$ ; dunque, cambiando nome alle costanti,

$$V_0 = \{c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}.$$

In particolare le funzioni  $e^{it}$ ,  $e^{-it}$ , 1 costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni. La relativa matrice Wronskiana è

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} & 1 \\ ie^{it} & -ie^{-it} & 0 \\ -e^{it} & -e^{-it} & 0 \end{pmatrix},$$

e si vede facilmente che il suo determinante è  $\det \mathbf{W}(t) = -2i$ ; inoltre i determinanti delle tre sottomatrici  $W_{3i}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sono dati da

$$\det \mathbf{W}_{31}(t) = \det \begin{pmatrix} e^{-it} & 1 \\ -ie^{-it} & 0 \end{pmatrix} = ie^{-it}$$

$$\det \mathbf{W}_{32}(t) = \det \begin{pmatrix} e^{it} & 1 \\ ie^{it} & 0 \end{pmatrix} = -ie^{it},$$

$$\det \mathbf{W}_{33}(t) = \det \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix} = -2i.$$

Una soluzione particolare dell'equazione assegnata sarà della forma

$$u(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it} + c_3(t),$$

con  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$ ,  $c_3(t)$  fornite dalle relazioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\frac{1}{2i} \det \mathbf{W}_{31}(t)e^{it} = -\frac{1}{2} \\ c_2'(t) = \frac{1}{2i} \det \mathbf{W}_{32}(t)e^{it} = -\frac{1}{2}e^{2it} \\ c_3'(t) = -\frac{1}{2i} \det \mathbf{W}_{33}(t)e^{it} = e^{it}. \end{cases}$$

Ne segue, ad esempio,

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}t, \quad c_2(t) = -\frac{1}{4i}e^{2it}, \quad c_3(t) = \frac{1}{i}e^{it}.$$

Pertanto si trova la soluzione particolare

$$u(t) = -\frac{1}{2}te^{it} - \frac{1}{4i}e^{it} + \frac{1}{i}e^{it}.$$

Dato che  $e^{it}$  risolve l'equazione omogenea, si può scegliere più semplicemente  $u(t) = -\frac{1}{2}te^{it}$ ; tenuto conto dell'espressione trovata per  $V_0$  otteniamo allora l'integrale generale:

$$V_f = \left\{ c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + c_3 - \frac{1}{2}te^{it} \right\}.$$

Proviamo infine che le soluzioni di equazioni di ordine  $n$ , al pari di quelle dei sistemi, dipendono con continuità dai coefficienti, dal secondo membro e dai valori iniziali. Siano

$u$  e  $v$  le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u^{(k)}(t) + f(t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} v^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)v^{(k)}(t) + g(t) \\ v(t_0) = v_0 \\ v'(t_0) = v_1 \\ \dots \\ v^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}, \end{cases}$$

ove  $t \in J$ ,  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})$  e  $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{n-1})$  sono elementi di  $C(J, \mathbb{C}^n)$ ,  $f$  e  $g$  sono funzioni di  $C(J, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{x} = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$  e  $\mathbf{y} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  sono vettori di  $\mathbb{C}^n$ . Fissiamo un sottointervallo chiuso e limitato  $I \subseteq J$  tale che  $t_0 \in I$ , e supponiamo che  $\mathbf{a}$ ,  $f$  e  $\mathbf{x}$  siano fissati, mentre  $\mathbf{b}$ ,  $g$  e  $\mathbf{y}$  si muovono verso  $\mathbf{a}$ ,  $f$  e  $\mathbf{x}$  rispettivamente; supponiamo in particolare che si abbia

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} < 1, \quad \|g - f\|_{C(I, \mathbb{C})} < 1, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n < 1.$$

Si ha allora

**Teorema 2.4.2** *Nelle ipotesi precedenti esiste una costante  $C$ , dipendente solamente da  $\ell(I)$ , dall'ordine dell'equazione  $n$  e dai dati  $\|\mathbf{a}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}$ ,  $\|f\|_{C(I, \mathbb{C})}$ ,  $|\mathbf{x}|_n$ , tale che*

$$\|u - v\|_{C^n(I, \mathbb{C})} \leq C [|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} + \|g - f\|_{C(I, \mathbb{C})}].$$

**Dimostrazione** Le funzioni  $\mathbf{u} = (u, u', \dots, u^{(n-1)})$  e  $\mathbf{v} = (v, v', \dots, v^{(n-1)})$  risolvono i sistemi differenziali lineari

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), & t \in J, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}'(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) = \mathbf{G}(t), & t \in J, \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{y}, \end{cases}$$

ove

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_0(t) & b_1(t) & b_2(t) & \dots & b_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Alla funzione  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  è applicabile il teorema 2.2.5, e il risultato è la stima

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C^1(I, \mathbb{C}^n)} \leq C [|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n + \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)} + \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}]$$

con  $C$  dipendente da  $\ell(I)$ ,  $\|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)}$  e  $\|\mathbf{F}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}$ . Poiché

$$\|\mathbf{A}\|_{C(I, \mathcal{M}_n)} = \sqrt{n-1 + \|\mathbf{a}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)}^2}, \quad \|\mathbf{F}\|_{C(I, \mathbb{C}^n)} = \|f\|_{C(I, \mathbb{C})},$$

mentre  $\|u\|_{C^n(I, \mathbb{C})} = \|\mathbf{u}\|_{C^1(I, \mathbb{C}^n)}$ , ed analogamente per  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{v}$ , si deduce facilmente la tesi.  $\square$

## Equazioni lineari a coefficienti costanti

Dovendo risolvere l'equazione

$$u^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in J,$$

con  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  costanti, ci si può sempre ridurre al sistema equivalente, che ha a sua volta coefficienti costanti, ed applicare i metodi visti nel paragrafo 2.3, ma è preferibile far uso di un metodo più diretto.

Cominciamo con il caso  $f \equiv 0$ . Il metodo consiste nel cercare soluzioni in forma esponenziale-polinomiale, cioè del tipo

$$u(t) = t^h e^{\lambda t},$$

con opportuni parametri  $h \in \mathbb{N}$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Andiamo ad imporre che la funzione  $u$  risolva l'equazione differenziale omogenea. Poniamo

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k :$$

l'equazione algebrica  $P(\lambda) = 0$  si chiami *equazione caratteristica* associata all'equazione differenziale data, e l'operatore differenziale dato dal primo membro di quest'ultima può scriversi formalmente come  $P\left(\frac{d}{dt}\right)$  (sostituendo ciascun monomio  $\lambda^k$  con la derivazione  $\frac{d^k}{dt^k}$ ). Si ha allora

$$u^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{(k)}(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right) [t^h e^{\lambda t}] = P\left(\frac{d}{dt}\right) \frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} e^{\lambda t},$$

ed osservando che  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ , si può invertire l'ordine di derivazione. Ricordando la formula per la derivata  $h$ -sima di un prodotto, si ottiene

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{(k)}(t) &= \frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} = \frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} P(\lambda) e^{\lambda t} = \\ &= \sum_{s=0}^h \binom{h}{s} P^{(s)}(\lambda) \frac{\partial^{h-s}}{\partial \lambda^{h-s}} e^{\lambda t} = \sum_{s=0}^h \binom{h}{s} P^{(s)}(\lambda) t^{h-s} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Questo calcolo mostra che  $u(t) = t^h e^{\lambda t}$  è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se il polinomio che compare all'ultimo membro è identicamente nullo, cioè se e solo se risulta  $P^{(j)}(\lambda) = 0$  per  $j = 0, 1, \dots, h$ . Ciò significa che  $\lambda$  deve essere una radice di  $P$ , di molteplicità almeno  $h + 1$ . Supponendo che  $P(\lambda)$  abbia  $m$  radici distinte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  di rispettive molteplicità  $k_1, \dots, k_m$  (con  $k_i \in \mathbb{N}^+$  e  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ ), si deduce che  $x^h e^{\lambda t}$  è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se esiste  $i \in \{1, \dots, m\}$  tale che  $\lambda = \lambda_i$  e  $0 \leq h \leq k_i$ . Avremo pertanto le  $n$  soluzioni

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & t e^{\lambda_2 t}, & \dots & t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_m t}, & t e^{\lambda_m t}, & \dots & t^{k_m-1} e^{\lambda_m t}. \end{array}$$

Per verificare che esse costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea, basta provare che esse sono linearmente indipendenti. A questo scopo ci sono utili i seguenti due lemmi.

**Lemma 2.4.3** *Se  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e se  $Q(t)$  è un polinomio, allora per ogni  $m \in \mathbb{N}$  si ha*

$$\frac{d^m}{dt^m} [Q(t)e^{\alpha t}] = R_m(t)e^{\alpha t},$$

ove  $R_m(t)$  è un polinomio che ha lo stesso grado di  $Q(t)$ .

**Dimostrazione** Ragioniamo per induzione. Se  $m = 1$  la tesi è vera: infatti

$$\frac{d}{dt} [Q(t)e^{\alpha t}] = [Q'(t) + \alpha Q(t)]e^{\alpha t},$$

e poiché  $\alpha \neq 0$ , il grado di  $Q' + \alpha Q$  è quello di  $Q$ . Supponiamo la tesi vera per ogni  $k \in \{1, \dots, m-1\}$  e dimostriamola per  $m$ . Possiamo scrivere

$$\frac{d^m}{dt^m} [Q(t)e^{\alpha t}] = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} [Q(t)e^{\alpha t}] \right),$$

e per l'ipotesi induttiva

$$\frac{d^m}{dt^m} [Q(t)e^{\alpha t}] = \frac{d}{dt} [R_{m-1}(t)e^{\alpha t}],$$

ove il grado di  $R_{m-1}$  è lo stesso di  $Q$ ; utilizzando il caso  $m = 1$  ricaviamo allora

$$\frac{d^m}{dt^m} [Q(t)e^{\alpha t}] = [R'_{m-1}(t) + \alpha R_{m-1}(t)]e^{\alpha t} = R_m(t)e^{\alpha t},$$

ove  $R_m = R'_{m-1} + \alpha R_{m-1}$  ha lo stesso grado di  $R_{m-1}$  e quindi di  $Q$ .  $\square$

**Lemma 2.4.4** *Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  sono tutti distinti fra loro, e se  $P_1, \dots, P_m$  sono polinomi tali che*

$$\sum_{i=1}^m P_i(t)e^{\lambda_i t} \equiv 0,$$

allora si ha  $P_i \equiv 0$  per  $i = 1, \dots, m$ .

**Dimostrazione** Proviamo la tesi per induzione su  $m$ . Se  $m = 1$ , è chiaro che  $P_1(t) \equiv 0$  come conseguenza dell'identità  $P_1(t)e^{\lambda_1 t} \equiv 0$ . Supponiamo che l'enunciato valga per un certo  $s - 1 \in \{1, \dots, m - 1\}$ , e dimostriamolo per  $s$ . Riscriviamo l'identità

$$\sum_{i=1}^s P_i(t)e^{\lambda_i t} \equiv 0$$

nella forma

$$P_s(t) \equiv - \sum_{i=1}^{s-1} P_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_s)t},$$

ed osserviamo che i numeri  $\lambda_i - \lambda_s$ , per  $i = 1, \dots, s - 1$ , sono distinti fra loro e diversi da 0. Detto  $r_s$  il grado di  $P_s$ , derivando l'espressione precedente  $r_s + 1$  volte otteniamo, grazie al lemma 2.4.3,

$$0 \equiv \frac{d^{r_s+1}}{dt^{r_s+1}} \sum_{i=1}^{s-1} P_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_s)t} = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{d^{r_s+1}}{dt^{r_s+1}} [P_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_s)t}] = \sum_{i=1}^{s-1} R_{is}(t)e^{(\lambda_i - \lambda_s)t},$$

ove  $R_{is}$  ha lo stesso grado di  $P_i$ . Ma per ipotesi induttiva, si ha  $R_{is}(t) \equiv 0$ , per cui anche  $P_i \equiv 0$ . Pertanto  $P_s$ , essendo combinazione lineare dei  $P_i$ , è identicamente nullo. Ciò completa il passo induttivo e prova la tesi.  $\square$

Consideriamo allora una combinazione lineare nulla delle  $n$  funzioni scritte in precedenza:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{k_i-1} c_{ih} t^h e^{\lambda_i t} \equiv 0,$$

e proviamo che tutti i coefficienti  $c_{ih}$  devono essere nulli.

Definiamo

$$P_i(t) = \sum_{h=0}^{k_i-1} c_{ih} t^h, \quad i = 1, \dots, m;$$

per ipotesi si ha quindi

$$\sum_{i=1}^m P_i(t)e^{\lambda_i t} \equiv 0,$$

ed il lemma 2.4.4 ci dice che  $P_i(t) \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ne segue, per il principio di identità dei polinomi, che  $c_{ih} = 0$  per  $h = 0, \dots, k_i - 1$  e  $i = 1, \dots, m$ . Ciò prova la lineare indipendenza delle  $n$  funzioni  $t^h e^{\lambda_i t}$ .

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$u^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{(k)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

è dato da

$$V_0 = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{k_i-1} c_{ih} t^h e^{\lambda_i t} : c_{ih} \in \mathbb{C} \right\}$$

ove, come si è detto, i  $\lambda_i$  sono le radici distinte del polinomio  $t \mapsto t^n - \sum_{h=0}^{n-1} a_h t^h$ , con rispettive molteplicità  $k_i$ .

Osserviamo anche che se i coefficienti dell'equazione differenziale sono reali, allora si può trovare una base di  $V_0$  costituita da funzioni reali. Infatti in questo caso accanto ad ogni radice  $\lambda_j \notin \mathbb{R}$  vi è l'altra radice  $\bar{\lambda}_j$ , complessa coniugata della precedente: quindi, posto  $\lambda_j = p_j + iq_j$ , possiamo sostituire alle due righe

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j t}, & t e^{\lambda_j t}, \dots t^{k_j-1} e^{\lambda_j t}, \\ e^{\bar{\lambda}_j t}, & t e^{\bar{\lambda}_j t}, \dots t^{k_j-1} e^{\bar{\lambda}_j t} \end{aligned}$$

le seguenti

$$\begin{aligned} e^{p_j t} \cos(q_j t), & t e^{p_j t} \cos(q_j t), \dots t^{k_j-1} e^{p_j t} \cos(q_j t), \\ e^{p_j t} \sin(q_j t), & t e^{p_j t} \sin(q_j t), \dots t^{k_j-1} e^{p_j t} \sin(q_j t), \end{aligned}$$

che derivano dalle precedenti mediante evidenti combinazioni lineari.

**Osservazione 2.4.5** Talvolta, anziché risolvere direttamente un sistema differenziale lineare a coefficienti costanti, è più semplice trasformarlo in una equazione lineare di ordine opportuno, che si ottiene eliminando una delle incognite. Questo è il cosiddetto *metodo di eliminazione*, che andiamo ad illustrare.

Consideriamo il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + bv(t) \\ v'(t) = cu(t) + dv(t), \end{cases}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Derivando la prima equazione, e ricavando  $v'$  dalla seconda, otteniamo

$$u''(t) = au'(t) + bcu(t) + bdv(t);$$

ricavando infine  $bv$  dalla prima equazione del sistema, arriviamo all'equazione del secondo ordine

$$u''(t) = (a + d)u'(t) + (bc - ad)u(t) = (\text{tr } \mathbf{A})u'(t) - (\det \mathbf{A})u(t),$$

ove  $\mathbf{A}$  è la matrice dei coefficienti. Se essa ha due autovalori distinti  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , troveremo

$$u(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C},$$

mentre se vi è un solo autovalore  $\lambda$  avremo

$$u(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

Infine, se  $b \neq 0$ , dalla prima equazione ricaviamo

$$v(t) = \frac{1}{b} u'(t) - \frac{a}{b} u(t).$$

Se invece  $b = 0$  (nel qual caso, comunque, sarebbe stato inutile derivare la prima equazione!), dobbiamo ricavare  $v$  dall'equazione differenziale  $v'(t) - dv(t) = cu(t)$ , il che fornisce  $v$  a meno di una terza costante arbitraria. La ragione di questa sovrabbondanza sta nel fatto che abbiamo derivato una equazione del sistema, il che porta in generale ad introdurre nuove soluzioni. Di regola occorre perciò, una volta trovate  $u(t)$  e  $v(t)$ , verificare che esse sono davvero soluzioni del sistema originario.

**Esempi 2.4.6 (1)** Risolviamo col metodo di eliminazione il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = u(t) - v(t), \end{cases}$$

Derivando la seconda equazione e procedendo come illustrato nell'osservazione precedente, troviamo

$$v''(t) = u'(t) - v'(t) = 2u(t) - v'(t) = v'(t) + 2v(t);$$

come si vede facilmente, questa equazione differenziale ha le soluzioni

$$v(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C},$$

e dunque

$$u(t) = v'(t) + v(t) = 3k_1 e^{2t}.$$

L'integrale generale del sistema è dunque

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} k_1 e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_2 e^{-t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

**(2)** Consideriamo il sistema del secondo ordine

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - v(t) \\ v''(t) = u'(t) - 4u(t) + 2v(t). \end{cases}$$

Possiamo facilmente trasformare questo sistema in un sistema del primo ordine: ponendo  $w = v'$  abbiamo

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - v(t) \\ v'(t) = w(t) \\ w'(t) = u'(t) - 4u(t) + 2v(t) = -3u(t) + v(t), \end{cases}$$

e da qui in poi potremmo utilizzare i metodi visti nel paragrafo 2.3. Invece, ricominciamo da capo e facciamo uso del metodo di eliminazione: inserendo la prima equazione del sistema originario nella seconda, possiamo riscrivere questa nella forma  $v''(t) = -3u(t) + v(t)$ . Derivandola, otteniamo

$$v'''(t) = -3u'(t) + v'(t) = -3u(t) + 3v(t) + v'(t);$$

dato che  $3u(t) = v(t) - v''(t)$ , arriviamo a

$$v'''(t) = v''(t) + v'(t) + 2v(t).$$

Questa equazione, come è facile verificare, ha le soluzioni

$$v(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{\lambda t} + c_3 e^{\bar{\lambda} t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C},$$



ove  $\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Dato che  $u(t) = \frac{1}{3}(v(t) - v''(t))$ , ricaviamo anche, con qualche calcolo,

$$u(t) = -c_1 e^{2t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) c_2 e^{\lambda t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) c_3 e^{\bar{\lambda} t}.$$

Dunque l'integrale generale del sistema dato è

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 e^{2t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} c_2 e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} c_3 e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t}$$

al variare di  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ .

Consideriamo ora un'equazione differenziale a coefficienti costanti, con secondo membro  $f$  non nullo. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, possiamo sempre utilizzare il metodo di variazione della costanti, come abbiamo fatto nell'esempio 2.4.1; tuttavia quando il secondo membro è di tipo particolare, conviene seguire un'altra strada. Supponiamo che  $f$  sia della forma  $f(t) = P_n(t)e^{\lambda t}$ , con  $P_n$  polinomio di grado  $n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Allora possiamo cercare una soluzione particolare  $u_f$  dello stesso tipo di  $f$ : precisamente, si cercherà  $u_f$  della forma

$$u_f(t) = t^h Q_n(t) e^{\lambda t},$$

ove  $Q_n$  è un polinomio dello stesso grado  $n$ , mentre  $h$  è la molteplicità di  $\lambda$  come radice del polinomio caratteristico dell'equazione; se in particolare  $\lambda$  non è radice, sarà  $h = 0$ . Similmente, se  $f(t) = P_n(t)e^{\alpha t}(a \cos \beta t + b \sin \beta t)$ , con  $P_n$  polinomio di grado  $n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $a, b$  costanti, si cercherà  $u_f$  della forma

$$u_f(t) = t^h Q_n(t) e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t),$$

ove  $Q_n$  è un polinomio dello stesso grado  $n$ ,  $A$  e  $B$  sono costanti e  $h$  è la molteplicità di  $\alpha \pm i\beta$  come radici del polinomio caratteristico.

Questo metodo funziona sempre (quando il secondo membro è del tipo prescritto) ed è spesso meno laborioso dal punto di vista dei calcoli.

**Esempio 2.4.7** Consideriamo nuovamente l'equazione  $u'''(t) + u'(t) = e^{it}$ , già analizzata nell'esempio 2.4.1, e cerchiamone una soluzione particolare. Dato che  $i$  e  $-i$  sono radici del polinomio caratteristico (di molteplicità 1), e  $f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ , cerchiamo  $u_f$  del tipo

$$u_f(t) = t(A \cos t + B \sin t).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} u_f'(t) &= (A + Bt) \cos t + (B - At) \sin t, \\ u_f''(t) &= (2B - At) \cos t - (2A + Bt) \sin t, \\ u_f'''(t) &= -(3A + Bt) \cos t - (3B - At) \sin t; \end{aligned}$$

imponendo che  $u_f$  risolva l'equazione si ottiene

$$-(3A + Bt) \cos t - (3B - At) \sin t + (A + Bt) \cos t + (B - At) \sin t = \cos t + i \sin t,$$

ossia

$$-2A \cos t - 2B \sin t = \cos t + i \sin t,$$

da cui  $A = -1/2$  e  $B = -i/2$ . In definitiva

$$u_f(t) = -\frac{t}{2}(\cos t + i \sin t) = -\frac{1}{2}e^{it},$$

che è la stessa funzione ottenuta con il metodo di variazione delle costanti.

## Esercizi 2.4

1. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari:

(i)  $u'''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0,$

(ii)  $u'''(t) - u''(t) = 0,$

(iii)  $u'''(t) - 3u''(t) + 3u'(t) - u(t) = (t+1)e^t,$

(iv)  $u''''(t) - 16u(t) = 2\cos^2 t,$

(v)  $u''''(t) + u''(t) = \sin t,$

(vi)  $u'''(t) - u''(t) - u'(t) + u(t) = e^t,$

(vii)  $u'''(t) + u'(t) = (t-1)\sin t,$

(viii)  $u''''(t) + 2u'''(t) + u(t) = 0.$

2. Risolvere l'equazione differenziale

$$u''(t) - \frac{2t}{t^2+1}u'(t) + \frac{2}{t^2+1}u(t) = (t^2+1)^2,$$

cercando soluzioni dell'equazione omogenea del tipo  $u(t) = at^2 + bt + c$ .

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(i)  $\begin{cases} u'''(t) = t^{-2} \\ u(1) = 3, u'(1) = 2, u''(1) = -1; \end{cases}$

(ii)  $\begin{cases} u''''(t) + u''(t) = -\sin t \\ u(0) = 0, u'(0) = -1, u''(0) = 0, u'''(0) = 1; \end{cases}$

(iii)  $\begin{cases} u''''(t) + 2u''(t) + u(t) = 2 \\ u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = 0, u'''(0) = 2; \end{cases}$

(iv)  $\begin{cases} u''''(t) + u'''(t) = t \\ u(1) = 1, u'(1) = 0, u''(1) = 0, u'''(1) = 0, u''''(0) = 1. \end{cases}$

4. (*Riduzione dell'ordine*) Si provi che se si conosce una soluzione  $u_1(t)$  dell'equazione differenziale  $u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = 0$ , allora se ne può trovare un'altra, linearmente indipendente dalla prima, della forma  $u_2(t) = v(t)u_1(t)$ , riducendosi

ad un'equazione lineare del primo ordine nell'incognita  $v$ . Si applichi il metodo alla risoluzione dell'equazione

$$(1 - t^2)u''(t) - 2tu'(t) + 2u(t) = 0.$$

[**Traccia:** si osservi che  $u_1(t) = t$  è soluzione dell'equazione.]

5. Si generalizzi il metodo di riduzione dell'ordine, illustrato nell'esercizio precedente, al caso di equazioni lineari omogenee di ordine  $n$  qualunque.
6. (*Equazioni di Eulero*) Si provi che l'equazione

$$u^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{t^k} u^{(n-k)}(t) = 0, \quad t > 0,$$

si trasforma in un'equazione a coefficienti costanti mediante il cambiamento di variabile  $x = \ln t$ . Se ne deduca che tale equazione ha soluzioni del tipo  $u(t) = t^\alpha$ , ove  $\alpha$  è una radice dell'equazione algebrica

$$\alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \alpha \cdot \dots \cdot (\alpha - n + k + 1) + a_n = 0,$$

ed eventualmente altre soluzioni del tipo  $u(t) = t^\alpha (\ln t)^h$ ,  $1 \leq h \leq k - 1$ , quando la radice  $\alpha$  ha molteplicità  $k > 1$ .

7. Risolvere le seguenti equazioni lineari di Eulero:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & u'''(t) + \frac{3}{t}u''(t) + \frac{2}{t^2}u'(t) = 0, \\ \text{(ii)} \quad & u''''(t) + \frac{6}{t}u'''(t) + \frac{9}{t^2}u''(t) + \frac{3}{t^3}u'(t) + \frac{1}{t^4}u(t) = 0. \\ \text{(iii)} \quad & u'''(t) + \frac{6}{t}u''(t) + \frac{7}{t^2}u'(t) + \frac{1}{t^3}u(t) = t. \end{aligned}$$

8. (*Risoluzione per serie*) Data l'equazione differenziale

$$u''(t) + 2tu'(t) + u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

se ne cerchino due soluzioni linearmente indipendenti sotto forma di serie di potenze. Si verifichi che tali serie hanno raggio di convergenza infinito, e se ne determinino i coefficienti in funzione dei primi due,  $a_0$  e  $a_1$ , che fungono da costanti arbitrarie.

9. Risolvere per serie i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + 2tu'(t) + 2u(t) = 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u''(t) + tu'(t) + u(t) = 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

10. Trovare una serie di potenze che risolva l'equazione di Bessel di ordine 0

$$tu''(t) + u'(t) + tu(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

e trovarne poi una seconda col metodo di riduzione dell'ordine (esercizio 2.4.4).

11. Dato  $n \in \mathbb{N}^+$ , trovare una serie di potenze che risolva l'equazione di Bessel di ordine  $n$

$$t^2u''(t) + tu'(t) + (t^2 - n^2)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

e trovarne poi una seconda col metodo di riduzione dell'ordine.

12. Dato  $\nu \notin \mathbb{N}$ , trovare l'integrale generale dell'equazione di Bessel di ordine  $\nu$

$$t^2u''(t) + tu'(t) + (t^2 - \nu^2)u(t) = 0, \quad t > 0.$$

[**Traccia:** posto  $v(t) = t^\nu u(t)$ , si verifichi che  $v$  risolve

$$tv''(t) + (2\nu + 1)v'(t) + tv(t) = 0, \quad t > 0;$$

si cerchi una soluzione di questa equazione sotto forma di serie di potenze. Si mostri infine che l'analoga soluzione con  $\nu$  sostituito da  $-\nu$  è linearmente indipendente dalla precedente.]

13. Risolvere col metodo di eliminazione i seguenti sistemi:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \begin{cases} u'(t) = u(t) + 3v(t) \\ v'(t) = 3u(t) - v(t), \end{cases} & \text{(ii)} \quad & \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v''(t) = 3u(t) + v(t), \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad & \begin{cases} u'(t) = -2u(t) - 4v(t) \\ u'(t) - 2v'(t) = -2v(t), \end{cases} & \text{(iv)} \quad & \begin{cases} u'(t) - v'(t) = -u(t) \\ u''(t) - v''(t) = u(t) + v(t). \end{cases} \end{aligned}$$

14. Risolvere, se possibile, i seguenti problemi ai limiti:

$$\begin{cases} u'''(t) - u(t) = te^{-t} \\ u(0) = 3, \quad u(1) = 2, \quad u'(2) = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u'''(t) + u(t) = t \\ u(0) = u(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0. \end{cases}$$

## 2.5 Analisi qualitativa per sistemi $2 \times 2$

Non sempre è possibile scrivere esplicitamente le soluzioni di un sistema differenziale non lineare, e del resto non sempre un'espressione esplicita aiuta a comprendere l'andamento effettivo delle soluzioni. In questo paragrafo ci occuperemo dell'analisi qualitativa delle soluzioni di sistemi autonomi  $2 \times 2$  della forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)); \end{cases}$$

qui  $x$  e  $y$  sono le funzioni incognite e  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  sono funzioni assegnate, non dipendenti esplicitamente da  $t$ , che supporremo almeno differenziabili in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Una *soluzione* di questo sistema è una coppia  $(x(\cdot), y(\cdot))$  di funzioni definite su un dato intervallo. Si osservi che l'intervallo è in un certo senso arbitrario, poiché se  $(x(t), y(t))$  è una soluzione definita in  $]a, b[$ , anche  $(x(t+c), y(t+c))$ , definita nell'intervallo  $]a-c, b-c[$ , lo è. La curva descritta dalla coppia  $(x(t), y(t))$ , al variare di  $t$  nell'intervallo massimale di esistenza, si chiama *orbita*, o *traiettoria*, del sistema; un'orbita è dunque l'immagine in  $\mathbb{R}^2$  di una soluzione massimale. Possiamo anche *orientare* un'orbita pensando di percorrerla nel verso delle  $t$  crescenti. Si osservi che diverse soluzioni possono avere come immagine la stessa orbita: ad esempio, appunto,  $(x(\cdot), y(\cdot))$  e  $(x(\cdot + c), y(\cdot + c))$ . Notiamo che il vettore  $(x'(t), y'(t))$  è *tangente* all'orbita nel punto  $(x(t), y(t))$ .

Il sistema sopra scritto ha un'evidente interpretazione cinematica: se nell'aperto  $A$  è definito un campo di vettori  $\mathbf{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ , e se la variabile  $t$  denota il tempo, il nostro sistema descrive il moto piano di una particella che nel punto  $(x, y)$  ha una velocità pari a  $\mathbf{v}(x, y)$ ; il piano in cui si muove la particella è detto *piano delle fasi* e il sistema stesso prende il nome di *sistema dinamico*. L'analogia meccanica sarà sempre sotteraneamente presente nel linguaggio che adopereremo.

Per i sistemi autonomi vale questa importante proprietà:

**Proposizione 2.5.1** *Siano  $f, g \in C^1(A)$ . Allora per ogni  $(x_0, y_0) \in A$  passa una ed una sola orbita del sistema.*

**Dimostrazione** Per il teorema di esistenza relativo al problema di Cauchy, vi è certamente una soluzione  $(x, y)$  del sistema che verifica  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$  in un certo (arbitrario) istante  $t_0$ : esiste perciò almeno un'orbita che contiene il punto  $(x_0, y_0)$ . Se poi vi fossero due orbite

$$C_1 = \{(x_1(t), y_1(t)) : t \in I_1\}, \quad C_2 = \{(x_2(t), y_2(t)) : t \in I_2\}$$

con un punto  $(x_0, y_0)$  in comune, avremmo per certi istanti  $t_1 \in I_1$  e  $t_2 \in I_2$

$$(x_0, y_0) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2)).$$

Allora la coppia  $(\bar{x}, \bar{y})$ , data da

$$\bar{x}(t) = x_1(t + t_1 - t_2), \quad \bar{y}(t) = y_1(t + t_1 - t_2), \quad t \in I_1 - t_1 + t_2,$$

è una soluzione del sistema che ha per immagine l'orbita  $C_1$ ; ma essendo  $(\bar{x}(t_2), \bar{y}(t_2)) = (x_0, y_0) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$ , per unicità deve essere  $\bar{x} \equiv x_2$  e  $\bar{y} \equiv y_2$ , e dunque  $(\bar{x}, \bar{y})$  ha per immagine l'orbita  $C_2$ . Si conclude così che le due orbite coincidono.  $\square$

Per lo studio qualitativo dei sistemi è di fondamentale importanza la nozione di *punto critico*, o *stazionario*, del sistema: si tratta dei punti del piano per i quali risulta

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto critico, l'orbita passante per  $(x_0, y_0)$  coincide con il punto stesso. Come vedremo, le orbite nell'intorno di un punto critico possono essere delle forme più diverse. Un punto critico del sistema si dice *isolato* se in un suo opportuno intorno non ve ne sono altri. Di particolare rilevanza è la seguente classificazione dei punti critici isolati.

**Definizione 2.5.2** *Un punto critico isolato si dice stabile (per  $t \rightarrow +\infty$ ) se per ogni suo intorno  $U$  ne esiste un altro,  $U'$ , contenuto in  $U$ , tale che ogni soluzione  $(x(\cdot), y(\cdot))$ , che passi ad un dato istante  $t_0$  per un punto di  $U'$ , resta dentro  $U$  per ogni  $t > t_0$ . In particolare, un punto critico stabile  $(x_0, y_0)$  si dice asintoticamente stabile se vi è un suo intorno  $V$  tale che ogni soluzione  $(x(\cdot), y(\cdot))$ , che passi ad un dato istante  $t_0$  per un punto di  $V$ , converge, per  $t \rightarrow +\infty$ , a  $(x_0, y_0)$ . Un punto critico isolato si dice instabile se non è stabile.*

Definizioni del tutto analoghe di stabilità, stabilità asintotica e instabilità si possono dare per  $t \rightarrow -\infty$ .

## Sistemi lineari

Consideriamo sistemi della forma

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + bv(t) \\ v'(t) = cu(t) + dv(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ove  $a, b, c, d$  sono costanti reali. Il punto  $(0, 0)$  è ovviamente critico per questo sistema; se  $ad - bc \neq 0$ , non ve ne sono altri. Il caso  $ad - bc = 0$ , che dà luogo a famiglie di punti stazionari non isolati, è trattato nell'esercizio 2.5.1.

Cominciamo con l'osservare che, derivando una delle equazioni e utilizzando l'altra, si arriva facilmente a provare che se  $(u, v)$  è una soluzione del sistema allora le funzioni  $u$  e  $v$  sono entrambe soluzioni dell'equazione del secondo ordine

$$z''(t) - (a + d)z'(t) + (ad - bc)z(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La corrispondente equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

e coincide con il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$  della matrice dei coefficienti, cioè

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Dunque le radici dell'equazione caratteristica sopra scritta sono gli autovalori (non nulli a causa dell'ipotesi  $ad - bc \neq 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2}$$

della matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . A questo punto è molto facile scrivere esplicitamente le soluzioni del sistema (esercizio 2.2.5), ma a noi adesso interessa uno studio qualitativo delle soluzioni. A questo scopo sarà importante distinguere i casi in cui si ha una coppia di autovalori reali, un solo autovalore reale o due autovalori complessi coniugati, perché

queste caratteristiche determinano comportamenti molto diversi delle soluzioni. Per comodità, conviene operare un cambiamento di incognite della forma

$$\begin{cases} x = pu + qv \\ y = ru + sv, \end{cases}$$

con  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ : esso lascia fisso il punto  $(0, 0)$ , trasforma intorno di  $(0, 0)$  in intorno di  $(0, 0)$ , deforma le orbite ma non ne altera il comportamento qualitativo attorno all'origine. Sceglieremo i coefficienti di questa trasformazione in modo che il sistema trasformato prenda la forma più semplice possibile (*forma canonica*): laddove possibile, ciò corrisponderà a diagonalizzare la matrice dei coefficienti.

**Caso I:** gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono reali, distinti e non nulli, ovvero il discriminante  $(a - d)^2 + 4bc$  è positivo; supporremo  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

La matrice dei coefficienti è diagonalizzabile. In particolare, poiché  $ad - bc \neq 0$ , almeno uno fra  $d$  e  $c$  è non nullo: possiamo supporre che sia  $c \neq 0$  (altrimenti ci si riduce a questo caso scambiando fra loro  $x$  e  $y$ ). Allora è facile verificare che con la trasformazione

$$\begin{cases} x = cu + (\lambda_1 - a)v \\ y = cu + (\lambda_2 - a)v \end{cases}$$

si porta il sistema in forma diagonale, e dunque il nostro sistema canonico è

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda_1 x(t) \\ y'(t) = \lambda_2 y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

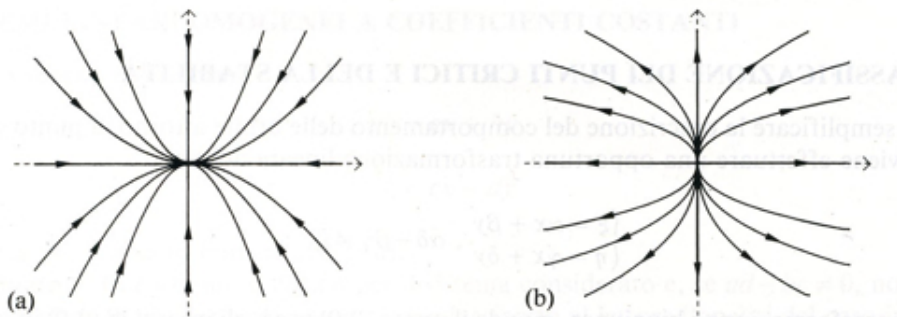
Le soluzioni, evidentemente, sono

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Distinguiamo due sottocasi.

**IA -**  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno lo stesso segno.

In questo caso la forma della traiettoria è determinata dal numero  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ , in quanto per ciascuna orbita vi è una costante  $K \geq 0$  tale che  $|y(t)|^{\lambda_1} = K|x(t)|^{\lambda_2}$ , mentre il verso di percorrenza è determinato dal segno di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .



Il punto critico si dice *nodo*; se le orbite sono orientate in direzione dell'origine (caso (a),  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ) il nodo è asintoticamente stabile; se le orbite hanno l'orientazione opposta

(caso (b),  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ ), il nodo è instabile. Vi sono quattro orbite particolari, che corrispondono alle scelte  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ , e percorrono le semirette dei due assi cartesiani; per le altre orbite, pensate come curve cartesiane  $y = y(x)$  (si veda l'osservazione 2.5.3 che segue), vale la relazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \gamma \frac{y}{x} = \gamma \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \gamma \frac{c_2}{c_1^\gamma} \frac{(c_1 e^{\lambda_1 t})^\gamma}{x} = \gamma \frac{c_2}{c_1^\gamma} x^{\gamma-1},$$

e dunque per  $x \rightarrow 0$  risulta

$$\frac{dy}{dx}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma > 1 \\ +\infty & \text{se } \gamma < 1. \end{cases}$$

Naturalmente  $\gamma$  nel nostro caso è positivo e diverso da 1.

**Osservazione 2.5.3** Un sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con  $f$  e  $g$  di classe  $C^1$  è equivalente, nei punti ove  $f(x, y)^2 + g(x, y)^2 \neq 0$ , all'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{oppure} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Infatti, se si ha  $f(x_0, y_0)^2 + g(x_0, y_0)^2 \neq 0$ , e se  $(x(t), y(t))$  passa per  $(x_0, y_0)$  all'istante  $t_0$ , in un intorno di  $t_0$  la funzione vettoriale  $(x(t), y(t))$  verifica le ipotesi del teorema del rango (teorema 1.9.12): quindi in un intorno di  $(x_0, y_0)$  possiamo ricavare  $t$  in funzione di  $x$  (se  $f(x_0, y_0) \neq 0$ ) oppure in funzione di  $y$  (se  $g(x_0, y_0) \neq 0$ ). Supponendo ad esempio di essere nel primo caso, si ha  $t = h(x)$  e  $\frac{dt}{dx} = h'(x(t)) = \frac{1}{x'(t)}$  in un intorno di  $t_0$ ; ne segue che in un intorno di  $x_0$  si ha  $y = y(t) = y(h(x))$  e la funzione  $u(x) = y(h(x))$  risolve

$$\frac{du}{dx} = y'(h(x))h'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{g(x(t), y(t))}{f(x(t), y(t))} = \frac{g(x, u(x))}{f(x, u(x))}.$$

Viceversa, se  $y = u(x)$  è soluzione di questa equazione differenziale, allora, fissato  $x_0$  e posto  $y_0 = u(x_0)$ , si ha necessariamente  $f(x_0, y_0) \neq 0$ : perciò se consideriamo la soluzione  $(x(t), y(t))$  del problema di Cauchy

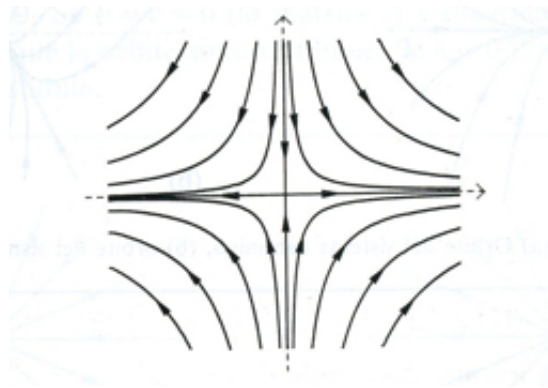
$$\begin{cases} x' = f(x, y), & y' = g(x, y) \\ x(t_0) = x_0, & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

per quanto provato prima possiamo ricavare  $t = h(x)$  ed otteniamo che  $y(h(x))$  è soluzione della stessa equazione risolta da  $u(x)$ , e per di più risulta  $y(h(x_0)) = y(t_0) = y_0 = u(x_0)$ : dunque, per unicità,  $y \circ h = u$ , ovvero  $u(x(t)) = y(t)$ . In definitiva i punti  $(x, u(x))$  coincidono con i punti  $(x(t), y(t))$ : cambia solo il parametro di riferimento.



**IB** -  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno segno opposto.

In questo caso,  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , le orbite si avvicinano all'origine per poi allontanarsene. Il punto critico si dice *punto di sella* ed è instabile. Ciascuno degli assi coordinati contiene due orbite, orientate verso l'origine o al contrario a seconda che l'autovalore della corrispondente equazione sia quello negativo o quello positivo: esse si dicono *separatrici*. Ogni altra orbita ha come asintoti per  $t \rightarrow \pm\infty$  due delle separatrici.



**Esempi 2.5.4 (1)** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} u' = -2u + \frac{1}{2}v \\ v' = 2u - 2v. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 + \lambda)^2 - 1 = 0$$

e gli autovalori sono  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ . L'origine è dunque un nodo asintoticamente stabile. La trasformazione per portare il nostro sistema in forma canonica è data da

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = 2u - v; \end{cases}$$

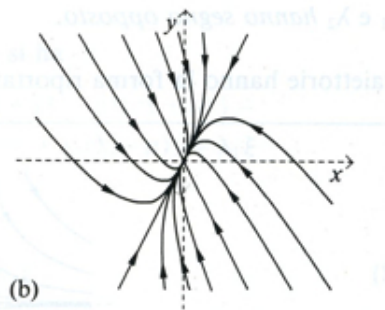
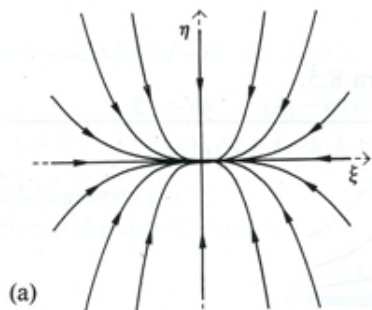
essa manda la retta  $v = 2u$  nell'asse delle ascisse  $y = 0$  e la retta  $v = -2u$  nell'asse delle ordinate  $x = 0$ . Il sistema canonico è

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -3y \end{cases}$$

ed ha per soluzioni

$$x(t) = c_1 e^{-t}, \quad y(t) = c_2 e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

cosicché le orbite giacciono sulle curve  $y = cx^3$ . Dal comportamento delle orbite del sistema canonico (a) si deduce l'andamento di quelle del sistema originale (b).



(2) Il sistema

$$\begin{cases} u' = 2u - \frac{3}{2}v \\ v' = u - \frac{3}{2}v \end{cases}$$

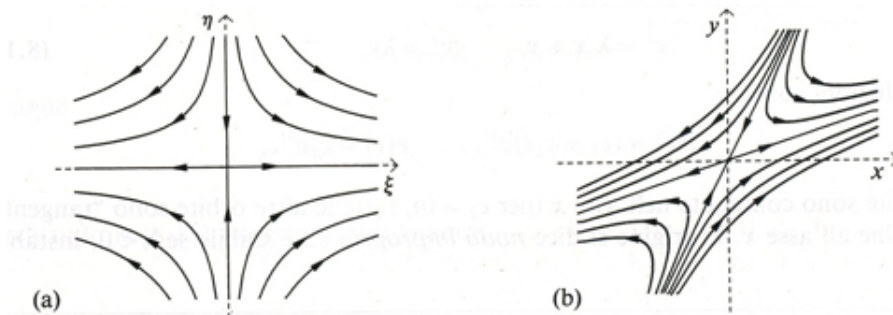
ha autovalori  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  e  $\lambda_2 = -1$ : l'origine è dunque un punto di sella. La trasformazione da applicare è

$$\begin{cases} x = u - \frac{1}{2}v \\ y = u - 3v \end{cases}$$

e con essa si ottiene il sistema canonico

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Le separatrici  $x = 0$ ,  $y = 0$  di questo sistema (a) corrispondono alle rette  $v = 2u$ ,  $v = \frac{1}{3}u$  del sistema originale (b).

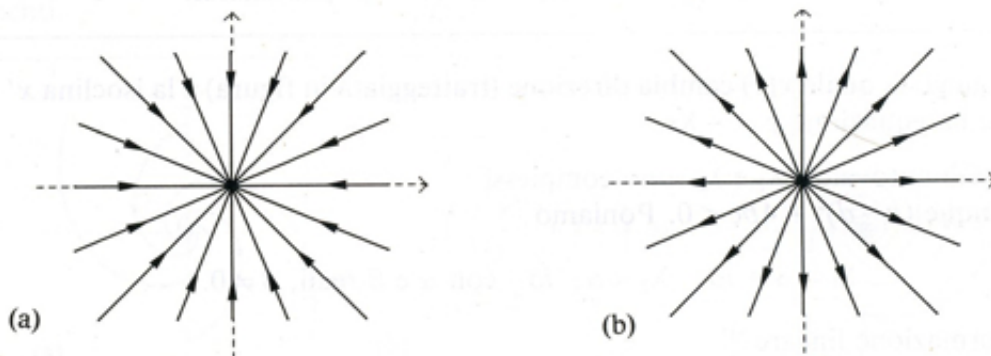


**Caso II:** vi è un solo autovalore reale  $\lambda = \frac{a+d}{2}$  non nullo, ovvero il discriminante  $(a-d)^2 + 4bc$  è nullo.

Si ha in particolare  $bc \leq 0$ . Se  $b = c = 0$ , la matrice dei coefficienti è diagonale con  $a = d = \lambda$  ed il sistema è già in forma diagonale, dunque canonica: dunque con  $x = u$  e  $y = v$  si ha

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

Le orbite sono rettilinee e l'origine è un *punto a stella*, asintoticamente stabile se  $\lambda < 0$  (a), instabile se  $\lambda > 0$  (b).



Se uno solo fra  $c$  e  $b$  è nullo, si ha ancora  $a = d = \lambda$ , ma la matrice non è diagonalizzabile: con la trasformazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b}u \\ y = v \end{cases} \quad \text{se } b \neq 0, \quad \begin{cases} x = u \\ y = \frac{1}{c}v \end{cases} \quad \text{se } c \neq 0,$$

si arriva al sistema canonico

$$\begin{cases} x' = ax + y \\ y' = ay, \end{cases} \quad \text{se } b \neq 0, \quad \begin{cases} x' = ax \\ y' = x + ay \end{cases} \quad \text{se } c \neq 0.$$

I due sistemi, naturalmente, sono uguali a meno di scambiare  $x$  con  $y$ .

Infine, se  $b, c$  sono entrambi non nulli, la trasformazione da utilizzare è, ad esempio,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b}u \\ y = \frac{a-d}{2b}u + v, \end{cases}$$

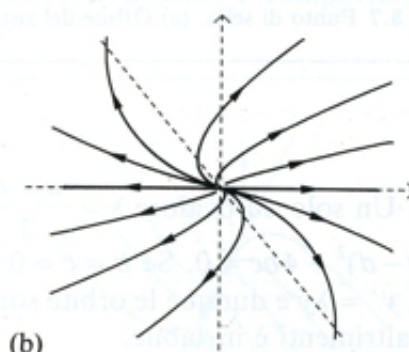
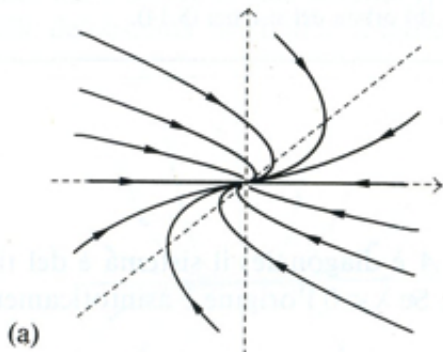
e il sistema canonico è

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y; \end{cases}$$

le soluzioni sono

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \quad y(t) = c_2 e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Due orbite sono contenute nell'asse  $x$ , per  $c_2 = 0$ ; le altre orbite sono tutte tangenti nell'origine all'asse  $x$ . L'origine è un *nodo improprio*, asintoticamente stabile se  $\lambda < 0$  (a), instabile se  $\lambda > 0$  (b). Derivando  $x(t)$  si vede che la retta lungo la quale  $x(t)$  cambia direzione, cioè l'isoclina  $x' = 0$ , ha equazione  $y = -\lambda x$ .



**Caso III:** vi sono due autovalori complessi coniugati  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\beta \neq 0$ , ovvero il discriminante  $(a - d)^2 + 4bc$  è negativo.

I coefficienti  $b$  e  $c$  sono necessariamente non nulli. La matrice è diagonalizzabile, ma poiché vogliamo un sistema canonico a coefficienti reali, utilizziamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = cu + (\alpha - a)v \\ y = \beta v \end{cases}$$

che porta il sistema, come si può verificare, alla forma canonica seguente:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

Per lo studio di questo sistema è utile passare a coordinate polari: posto

$$x(t) = r(t) \cos \vartheta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \vartheta(t),$$

cosicché

$$r(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2, \quad \tan \vartheta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{se } x(t) \neq 0,$$

derivando queste relazioni rispetto a  $t$  si trova

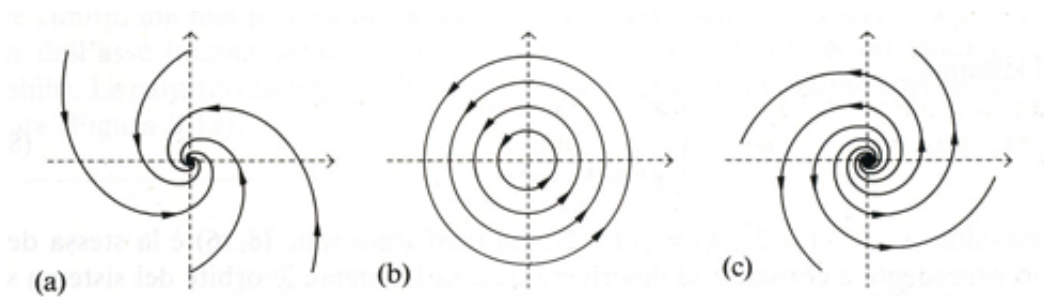
$$2rr' = 2xx' + 2yy', \quad (1 + \tan^2 \vartheta)\vartheta' = \frac{xy' - x'y}{x^2}.$$

Sostituendo in queste equazioni le espressioni di  $x'$  e  $y'$  fornite dal sistema, si arriva facilmente a

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ \vartheta' = \beta, \end{cases}$$

da cui

$$r(t) = c_1 e^{\alpha t}, \quad \vartheta(t) = \beta t + c_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$



La forma delle traiettorie dipende dal segno di  $\alpha$ : si hanno spirali che si stringono per  $\alpha < 0$  (a) e che si allargano per  $\alpha > 0$  (c), circonferenze per  $\alpha = 0$  (b). Invece il segno di  $\beta$  determina il verso di avvolgimento intorno al punto critico. Nel caso (a) l'origine si dice *fuoco* ed è asintoticamente stabile, nel caso (c) l'origine è un *fuoco instabile*, mentre nel caso (b) si dice che l'origine è un *centro*: le orbite hanno la forma

$$x(t) = c_1 \cos(\beta t + c_2), \quad y(t) = c_1 \sin(\beta t + c_2), \quad t \in \mathbb{R},$$

e sono periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\beta}$ ; il punto critico è stabile ma non asintoticamente stabile. Si noti che questo è il solo caso in cui un sistema lineare ha traiettorie periodiche.

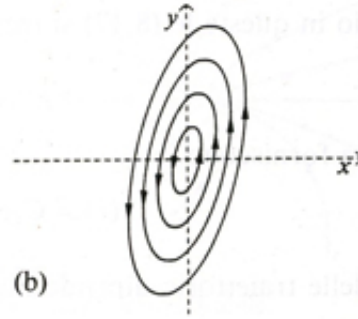
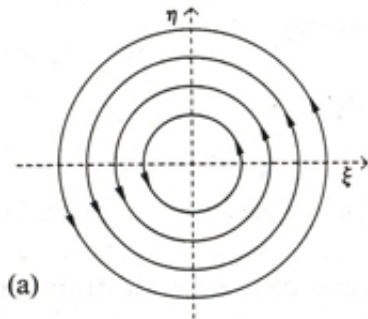
**Esempi 2.5.5 (1)** Il sistema

$$\begin{cases} u' = u - v \\ v' = 5u - v \end{cases}$$

ha autovalori  $\lambda_1 = 2i$ ,  $\lambda_2 = -2i$ . Con la trasformazione  $x = 5u - v$ ,  $y = 2v$  il sistema diventa

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

e le sue orbite (a) sono circonferenze  $x^2 + y^2 = C^2$ , corrispondenti alle traiettorie ellittiche (b), di equazione  $(5x - y)^2 + 4y^2 = C^2$ , del sistema originario.

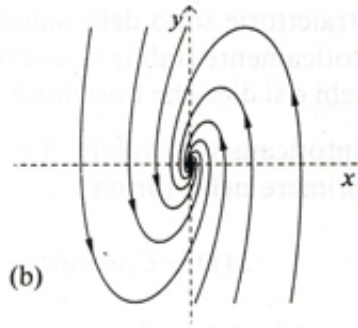
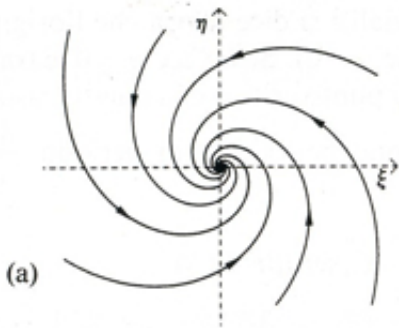


(2) Il sistema

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = 5u - 2v \end{cases}$$

ha autovalori  $\lambda_1 = -1 + 2i$ ,  $\lambda_2 = -1 - 2i$ . Con la stessa trasformazione di prima si ha il sistema canonico

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$



Le orbite di questo sistema (a), come quelle del sistema originario (b), sono spirali che si avvolgono in verso antiorario. L'origine è un fuoco asintoticamente stabile.

Possiamo riassumere tutti i risultati ottenuti nell'enunciato seguente:

**Teorema 2.5.6** Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matrice reale con determinante non nullo. Il sistema

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases}$$

ha l'origine come unico punto critico. Esso è:

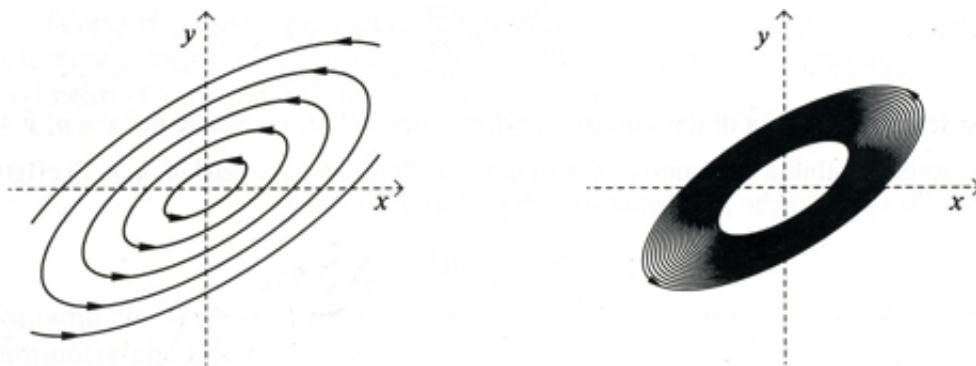
(i) stabile, se gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono immaginari puri;

(ii) *asintoticamente stabile, se gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono reali ed entrambi negativi, oppure complessi con parte reale negativa,*

(iii) *instabile negli altri casi.*  $\square$

Dalla discussione precedente segue che le caratteristiche qualitative e di stabilità del punto critico dipendono unicamente dagli autovalori di  $\mathbf{A}$ , i quali sono funzioni dei coefficienti  $a, b, c, d$  della matrice. È naturale allora chiedersi in che modo piccole perturbazioni dei coefficienti possano influire sulla stabilità delle soluzioni.

Vi sono due casi critici da questo punto di vista. Il primo riguarda il caso di autovalori immaginari puri: l'origine è un centro e le orbite sono curve chiuse, ma se una piccola perturbazione porta gli autovalori fuori dall'asse immaginario, l'origine diventa un fuoco e le traiettorie diventano spirali, stabili o instabili.



Nella figura sono disegnate le orbite dei sistemi

$$(a) \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 1.01x - 2y \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Il secondo caso critico si riferisce al caso di due autovalori (reali) uguali: l'origine è un nodo improprio. Anche in questo caso, una piccola perturbazione dei coefficienti può renderli, ad esempio, complessi coniugati, alterando radicalmente la forma delle orbite e rendendo l'origine un fuoco (ma non modificandone, in questo caso, l'instabilità o la asintotica stabilità).

## Sistemi non lineari

Abbiamo visto come il comportamento di un sistema lineare a coefficienti costanti dipenda dagli autovalori della matrice dei coefficienti. Nel caso di sistemi non lineari del tipo

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

la situazione naturalmente è molto più complicata e ci limiteremo allo studio del comportamento *locale* delle orbite del sistema attorno ad un punto stazionario *isolato*; l'aggettivo "locale" si riferisce al fatto che, a differenza che nel caso lineare, per i sistemi non lineari la convergenza delle orbite verso un punto critico stabile avviene solo per

quelle che partono “abbastanza vicino” ad esso: questo insieme di punti iniziali si chiama *bacino di attrazione* del punto critico. A meno di traslazioni ci si può ridurre al caso in cui il punto critico sia  $(0, 0)$ : dunque supporremo che  $f, g$  siano funzioni di classe  $C^1$  definite su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , tali che

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0, \quad f(x, y)^2 + g(x, y)^2 \neq 0 \quad \text{per } 0 < x^2 + y^2 < r^2,$$

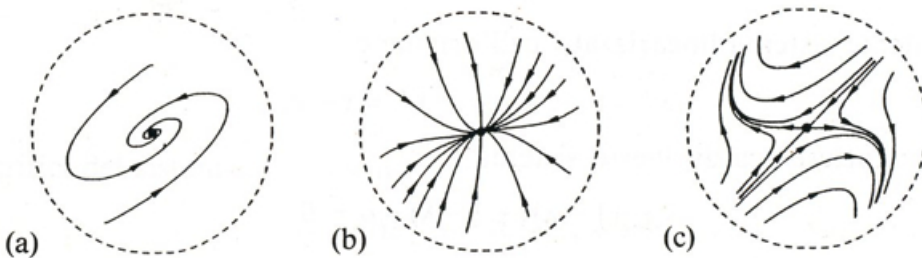
per un opportuno  $r > 0$ .

La nomenclatura che occorre per descrivere il comportamento delle orbite è simile a quella utilizzata per i sistemi lineari. Sia  $C$  un'orbita del sistema sopra scritto, descritta dalle funzioni  $(x(t), y(t))$ : passando a coordinate polari, si ha

$$x(t) = r(t) \cos \vartheta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \vartheta(t).$$

Supponiamo che esista un intorno  $U$  di  $(0, 0)$  tale che

- tutte le traiettorie passanti per punti di  $U$  siano definite per  $t \in \mathbb{R}$ ,
- si abbia  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$ , oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ ;



se per ciascuna traiettoria si ha anche  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vartheta(t)| = \infty$  oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\vartheta(t)| = \infty$ , diremo che  $(0, 0)$  è un *fuoco* (a), asintoticamente stabile nel primo caso, instabile nel secondo; se vi è una costante  $c$  tale che, per ciascuna traiettoria salvo due sole, si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vartheta(t) = c$  oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vartheta(t) = c$ , il punto  $(0, 0)$  si dice *nodo* (b), asintoticamente stabile o instabile. Se invece vi sono due traiettorie per le quali  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$ , due altre per cui  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ , mentre tutte le altre transitano in  $U$  solo durante un intervallo limitato  $]t_1, t_2[$ , allora diremo che  $(0, 0)$  è *punto di sella* (c).

Un metodo molto naturale per studiare le orbite attorno al punto stazionario  $(0, 0)$  è quello di “linearizzare” il problema, utilizzando lo sviluppo di Taylor delle funzioni  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  nell’origine. Posto  $a = f_x(0, 0)$ ,  $b = f_y(0, 0)$ ,  $c = g_x(0, 0)$ ,  $d = g_y(0, 0)$ , il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

si dice *sistema linearizzato* relativo al sistema originale, il quale potrà essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + \varphi(x, y) \\ y' = cx + dy + \psi(x, y), \end{cases}$$

con  $\varphi(x, y)$  e  $\psi(x, y)$  infinitesimi di ordine superiore a  $\sqrt{x^2 + y^2}$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Il comportamento locale delle orbite del sistema non lineare risulta, in molti casi ma non in tutti, strettamente collegato a quello delle orbite del sistema linearizzato. Vale infatti il seguente risultato:

**Teorema 2.5.7 (di linearizzazione)** *Supponiamo che  $(0, 0)$  sia un punto critico isolato per il sistema non lineare sopra scritto. Se il sistema linearizzato ha in  $(0, 0)$  un fuoco, o un nodo, o un punto di sella, allora  $(0, 0)$  è un punto dello stesso tipo anche per il sistema non lineare; se inoltre  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile, o instabile, per il sistema linearizzato, tale resta anche per il sistema non lineare.*

Si noti che il teorema non considera il caso in cui il sistema linearizzato ha un centro o un nodo improprio, in accordo col fatto che in tali casi, come sappiamo, una piccola perturbazione dei coefficienti modifica radicalmente la natura del punto critico. In tutti gli altri casi, però, i termini non lineari aggiuntivi  $\varphi(x, y)$  e  $\psi(x, y)$  non alterano né la stabilità, né la natura del punto critico, consentendo di determinare le caratteristiche qualitative delle orbite attraverso l'esame del sistema linearizzato, il che è assai più semplice.

**Dimostrazione** Proviamo anzitutto la seconda parte dell'enunciato: supponiamo che l'origine sia asintoticamente stabile per il sistema linearizzato. Scriviamo i due sistemi in forma vettoriale:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}), \quad \text{con} \quad \lim_{|\mathbf{u}| \rightarrow 0} \frac{|\Phi(\mathbf{u})|_2}{|\mathbf{u}|_2} = 0.$$

Il fatto che  $(0, 0)$  sia asintoticamente stabile per il sistema linearizzato significa che gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  hanno parte reale strettamente negativa; in particolare la matrice  $e^{t\mathbf{A}}$  decade esponenzialmente a 0 per  $t \rightarrow +\infty$  (esercizio 2.5.8): dunque esistono  $M, \nu > 0$  tali che  $\|e^{t\mathbf{A}}\|_{\mathcal{M}_2} \leq M e^{-\nu t}$  per ogni  $t \geq 0$ . Sia allora  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  un'orbita del sistema non lineare, che per  $t = t_0$  si trovi nel punto  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ . Possiamo scrivere, nell'intervallo temporale  $I$  in cui  $\mathbf{x}(t)$  è definita,

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{x}(s)) ds,$$

da cui, posto  $r_0 = |\mathbf{x}_0|_2$ ,

$$|\mathbf{x}(t)|_2 \leq r_0 e^{-\nu(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\Phi(\mathbf{x}(s))|_2 ds \quad \forall t \in I.$$

Fissiamo adesso  $\delta \in ]0, 1[$  tale che si abbia

$$|\Phi(x)|_2 \leq \frac{\nu}{2} r \quad \text{per} \quad |\mathbf{x}|_2 = r \leq 2\delta.$$

Se prendiamo  $|\mathbf{x}_0|_2 = r_0 \leq \delta$ , per continuità esiste  $T_0 \in I$ ,  $T_0 > t_0$  tale che  $|\mathbf{x}(t)|_2 \leq 2\delta$  per ogni  $t \in [t_0, T_0]$ . Ponendo allora

$$T = \sup\{T_0 > t_0 : |\mathbf{x}(t)|_2 \leq 2\delta \forall t \in [t_0, T_0]\},$$



si ottiene che vale la disuguaglianza

$$|\mathbf{x}(t)|_2 \leq e^{-\nu(t-t_0)}\delta + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} \frac{\nu}{2} \cdot 2\delta ds \quad \forall t \in [t_0, T],$$

ossia, calcolando l'integrale,

$$|\mathbf{x}(t)|_2 \leq \delta \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Per definizione, si deduce che  $T = \sup I$ . Da questa maggiorazione a priori segue che  $\sup I = +\infty$ , e quindi otteniamo

$$|\mathbf{x}(t)|_2 \leq e^{-\nu(t-t_0)}\delta + \frac{\nu}{2} \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\mathbf{x}(s)|_2 ds \quad \forall t \geq t_0,$$

ovvero, posto  $v(t) = e^{\nu(t-t_0)} |\mathbf{x}(t)|_2$  e ricordando che  $\delta < 1$ ,

$$v(t) \leq 1 + \frac{\nu}{2} \int_{t_0}^t v(s) ds \quad \forall t \geq t_0.$$

Dal lemma di Grönwall, dimostrato in Analisi 1, segue allora

$$v(t) \leq e^{\frac{\nu}{2}(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0,$$

ossia

$$|\mathbf{x}(t)|_2 \leq e^{-\nu t} v(t) \leq e^{-\frac{\nu}{2}(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 :$$

dunque  $|\mathbf{x}(t)|_2 \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Ciò prova che  $(0,0)$  è asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Se avessimo supposto l'origine instabile per il sistema linearizzato, avremmo ottenuto analogamente  $|\mathbf{x}(t)|_2 \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Proviamo adesso la prima parte dell'enunciato, limitandoci al caso in cui  $(0,0)$  è un fuoco: il caso del nodo e del punto di sella sono molto più laboriosi e li tralasciamo.

Come sappiamo, il sistema linearizzato si porta in forma canonica con la sostituzione  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ , ove  $\mathbf{B}$  è un'opportuna matrice invertibile. Consideriamo dunque i sistemi equivalenti

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{B}\Phi(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}),$$

ove, ponendo  $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\Phi(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x})$ , si ha

$$\lim_{|\mathbf{x}|_2 \rightarrow 0} \frac{|\Psi(\mathbf{x})|_2}{|\mathbf{x}|_2} = 0.$$

Se  $(0,0)$  è un centro per il sistema linearizzato, la matrice dei coefficienti ha due autovalori complessi coniugati  $\alpha \pm i\beta$  e

$$\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

Il sistema non lineare, in forma canonica, è

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + \gamma(x, y) \\ y' = \beta x + \alpha y + \eta(x, y), \end{cases}$$

ove  $\gamma$  e  $\eta$  sono infinitesime per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  di ordine superiore a  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Sia  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  un'orbita del sistema non lineare, che per  $t = t_0$  si trovi in  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ . Scriviamo  $x(t) = r(t) \cos \vartheta(t)$  e  $y(t) = r(t) \sin \vartheta(t)$ : derivando l'equazione  $\tan \vartheta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$  si ricava l'equazione differenziale

$$(1 + \tan^2 \vartheta) \vartheta' = \frac{xy' - x'y}{x^2}, \quad \text{ovvero} \quad \vartheta' = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2},$$

da cui, facilmente,

$$\vartheta' = \beta + \frac{1}{r}(\eta(x, y) \cos \vartheta - \gamma(x, y) \sin \vartheta) = \beta + \varphi(x, y),$$

ove

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(x, y) = 0.$$

Si ricava allora

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \beta(t - t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(x(s), y(s)) ds,$$

ove  $\vartheta_0$  è legato a  $(x_0, y_0)$  dalle relazioni  $x_0 = r_0 \cos \vartheta_0$  e  $y_0 = r_0 \sin \vartheta_0$ . Supponiamo, per fissare le idee, che  $\alpha < 0$  (ossia che  $(0, 0)$  sia un fuoco asintoticamente stabile per il sistema linearizzato). Fissiamo  $\delta \in ]0, 1[$  tale che si abbia

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{|\beta|}{2} \quad \text{per} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \leq 2\delta.$$

Se prendiamo  $r_0 \leq \delta$ , come nella dimostrazione del secondo enunciato deduciamo che  $r(t) \leq 2\delta$  per ogni  $t > t_0$ ; ne segue

$$|\vartheta(t) - \vartheta_0| \geq |\beta(t - t_0)| - \int_{t_0}^t \frac{|\beta|}{2} ds$$

e in particolare

$$|\vartheta(t)| \geq \frac{(t - t_0)|\beta|}{2} - |\vartheta_0| \quad \forall t > t_0.$$

Dunque  $|\vartheta(t)| \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ . L'orbita tende verso l'origine lungo una spirale che gira in verso antiorario se  $\beta > 0$ , orario se  $\beta < 0$ . Naturalmente, se avessimo supposto  $\alpha > 0$ , con calcoli analoghi avremmo ottenuto

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\vartheta(t)| = +\infty,$$

con spirali orarie o antiorarie a seconda del segno di  $\beta$ . Ciò prova che  $(0, 0)$  è un fuoco (asintoticamente stabile oppure instabile) anche per il sistema non lineare.  $\square$

**Esempi 2.5.8 (1)** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -x + e^{\alpha y} - 1 \\ y' = e^{x-y} - 1. \end{cases}$$

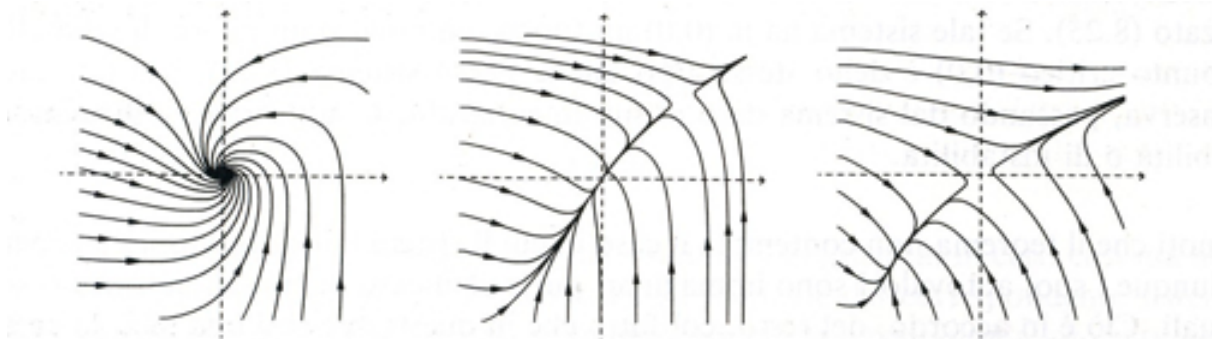
L'unico punto stazionario è  $(0, 0)$ . Il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' = -x + \alpha y \\ y' = x - y, \end{cases}$$

la corrispondente equazione caratteristica è  $(-1 - \lambda)^2 - \alpha = 0$ , gli autovalori sono

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{\alpha} \quad \text{se } \alpha \geq 0, \quad \lambda = -1 \pm i\sqrt{-\alpha} \quad \text{se } \alpha < 0.$$

In virtù del teorema di linearizzazione, se  $\alpha < 0$  l'origine è un fuoco asintoticamente stabile, se  $0 < \alpha < 1$  l'origine è invece un nodo asintoticamente stabile, e infine se  $\alpha > 1$  l'origine è un punto di sella. Non possiamo concludere nulla quando  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ . Nella figura sottostante sono disegnate le orbite del sistema nei casi  $\alpha = -1$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $\alpha = 2$ .



**(2)** Un *pendolo semplice* è costituito da una massa  $m$  ancorata ad un punto  $O$  per mezzo di un'asta di lunghezza  $\ell$  e di peso trascurabile. Se questo sistema si muove in un piano verticale, la sua posizione è individuata dall'angolo  $x$  che l'asta forma con la verticale, e lo stato del sistema al tempo  $t$  è completamente descritto dalle funzioni  $x(t)$  e  $x'(t)$ , che denotano posizione e velocità angolare all'istante  $t$ . Supponendo che sul pendolo agisca una forza viscosa proporzionale alla velocità, in base al secondo principio della dinamica si ricavano le equazioni del *pendolo smorzato*:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky - \frac{g}{\ell} \sin x. \end{cases}$$

I punti critici di questo sistema sono  $(n\pi, 0)$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Nell'origine il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{\ell}x - ky, \end{cases}$$

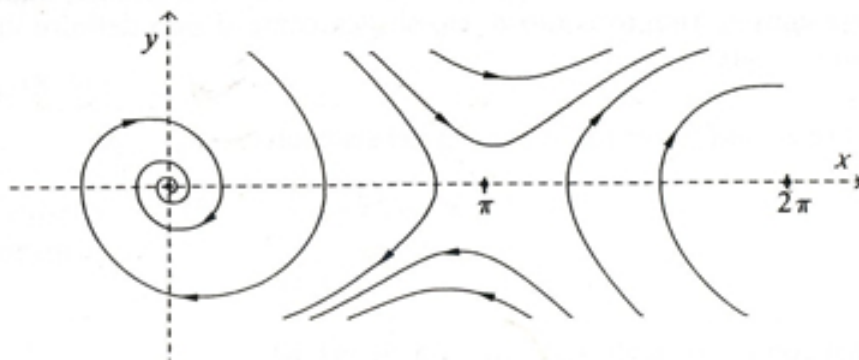
ed i suoi autovalori sono  $\frac{1}{2} \left( -k \pm \sqrt{k^2 - 4g/\ell} \right)$ . Se supponiamo  $k^2 < 4g/\ell$  otteniamo che  $(0, 0)$  è un fuoco asintoticamente stabile per il sistema linearizzato e dunque anche

per il sistema originario.

Utilizzando il cambiamento di variabile  $z = x - \pi$  si può scrivere il sistema linearizzato nel punto critico  $(\pi, 0)$ :

$$\begin{cases} z' = y \\ y' = \frac{g}{\ell}z - ky; \end{cases}$$

un'analisi simile alla precedente mostra che  $(0, 0)$  è punto di sella per questo sistema, cosicché  $(\pi, 0)$  è punto di sella per il sistema del pendolo smorzato. Il comportamento qualitativo delle orbite nell'intorno dei due punti critici esaminati è descritto nella figura sottostante.



## Integrali primi

Il teorema di linearizzazione, se applicabile, fornisce un'accurata descrizione *locale* delle orbite, ma non può essere d'aiuto nella ricerca di una descrizione qualitativa *globale* delle orbite. Per questi scopi è utile la nozione di “integrale primo” di un sistema differenziale.

**Definizione 2.5.9** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Una funzione  $U \in C^1(A)$  si dice integrale primo del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

se il gradiente di  $U$  non si annulla in  $A$ , salvo al più nei punti critici del sistema, e se per ogni orbita non costante  $(x(t), y(t))$  contenuta in  $A$  si ha

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = 0.$$

Vediamo alcune conseguenze di questa definizione. Se  $U$  è un integrale primo, consideriamo una curva di livello  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \{(x, y) \in A : U(x, y) = k\}.$$

Se  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ , allora dalla definizione segue che l'intera orbita passante per  $(x_0, y_0)$  è contenuta in  $\Gamma$ . Quindi  $\Gamma$  è unione (disgiunta, per unicità) di orbite. Inoltre è facile

verificare che una funzione  $U \in C^1(A)$ , con gradiente non nullo salvo al più nei punti critici di  $A$ , è un integrale primo se e solo se risulta

$$f(x, y)U_x(x, y) + g(x, y)U_y(x, y) = 0$$

in ogni punto  $(x, y) \in A$  che non sia critico. Infatti, se  $U$  è un integrale primo allora, fissato un punto  $(x, y) \in A$  non critico e detta  $(x(t), y(t))$  l'orbita che per  $t = 0$  passa per tale punto, si ha per ogni  $t$

$$0 = \frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = U_x x' + U_y y' = U_x f + U_y g,$$

e scelto  $t = 0$  si trova  $f(x, y)U_x(x, y) + g(x, y)U_y(x, y) = 0$ . Viceversa, se vale questa relazione in ogni punto non critico di  $A$ , allora lungo ogni orbita non costante si ha

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = U_x x' + U_y y' = U_x f + U_y g = 0,$$

e dunque  $U$  è un integrale primo.

La denominazione “integrale primo” nasce dal fatto che per determinarlo si può utilizzare una delle equazioni differenziali

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad \text{se } f(x, y) \neq 0, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad \text{se } g(x, y) \neq 0.$$

Infatti, se  $U$  è un integrale primo allora  $U_x f + U_y g = 0$ ; quindi ogni funzione  $y(x)$  definita implicitamente dall'equazione  $U(x, y) = k$  soddisfa, per il teorema del Dini,

$$y'(x) = -\frac{U_x}{U_y} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Viceversa, una soluzione  $y(x)$  dell'equazione  $y' = g/f$  sarà espressa, generalmente in forma implicita, tramite un'espressione della forma  $U(x, y) = k$ ; ne segue

$$0 = \frac{d}{dx}U(x, y(x)) = U_x + U_y y' = U_x + U_y \frac{g}{f} = \frac{1}{f}(fU_x + gU_y),$$

cosicché  $U$  è un integrale primo. Il discorso è del tutto analogo se si considera una soluzione  $x(y)$  di  $x' = f/g$ .

**Esempio 2.5.10** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3, \end{cases}$$

i cui punti critici sono  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ . L'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + x^3}{y}, \quad y \neq 0,$$

è a variabili separabili e si integra con facilità. La soluzione, in forma implicita, è

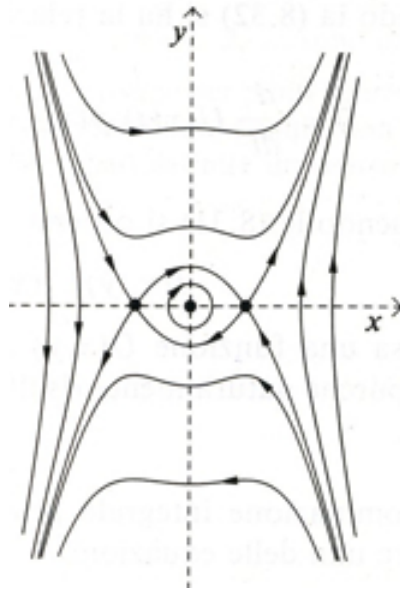
$$x^2 - \frac{x^4}{2} + y^2 = c.$$

Ne segue che  $U(x, y) = x^2 - \frac{x^4}{2} + y^2$  è un integrale primo del sistema, definito su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Le curve di livello sono i grafici delle funzioni  $y = \pm\sqrt{c - x^2(1 - x^2/2)}$ ; su queste curve giacciono le orbite del sistema, l'orientazione delle quali si determina sulla base della prima equazione  $x' = y$  (la  $x$  cresce nei punti del semipiano superiore). In particolare, la curva di livello  $c = 1/2$  si può scrivere nella forma

$$(x^2 - 1 - \sqrt{2}y)(x^2 - 1 + \sqrt{2}y) = 0,$$

e quindi è costituita da due parabole, di equazioni  $y = \pm\frac{x^2-1}{\sqrt{2}}$ . Essa contiene i punti critici  $(\pm 1, 0)$  ed è formata da 8 orbite disgiunte.

Il comportamento del sistema nelle vicinanze di  $(0, 0)$  non può essere dedotto dal teorema di linearizzazione, perché il sistema linearizzato ha in  $(0, 0)$  un centro. Tuttavia un'analisi diretta mostra che per  $c \in ]0, 1/2[$  le curve di livello  $c$  sono curve chiuse, ossia orbite *periodiche*: vale a dire, ogni soluzione  $(x(t), y(t))$  passante per un punto di una di esse vi rimane per ogni  $t$ , ha per immagine l'intera curva e ripassa in quel punto dopo un tempo finito.



A proposito delle orbite periodiche vale in generale un importante risultato, la cui dimostrazione, seppure geometricamente intuitiva, richiede qualche attenzione.

**Teorema 2.5.11** *Se  $U$  è un integrale primo del sistema*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

*e  $\Gamma = \{(x, y) \in A : U(x, y) = k\}$  è una curva chiusa sulla quale non vi sono punti critici del sistema, allora  $\Gamma$  è un'orbita periodica.*

Precisiamo cosa significa “curva chiusa”: è un sottoinsieme limitato, chiuso e connesso di  $A$ , che in ogni punto è localmente grafico di una funzione di classe  $C^1$ .

**Dimostrazione** Sia  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto di  $\Gamma$ : per esso certamente passa un'orbita non costante del sistema (perché in  $\Gamma$  non vi sono punti critici). Dato che  $U$  è un integrale primo, in ogni punto  $(x(t), y(t))$  dell'orbita si ha  $U(x(t), y(t)) = U(\bar{x}, \bar{y}) = k$ , e quindi l'intera orbita  $C$  contenente  $(\bar{x}, \bar{y})$  è inclusa in  $\Gamma$ .

Proviamo che  $C = \Gamma$ . Anzitutto osserviamo che  $C$  è un chiuso: infatti se  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è un punto di  $\overline{C} \setminus C$  (e in particolare, per quanto già provato, esso appartiene al chiuso  $\Gamma$ ), allora esiste una successione  $(x(t_n), y(t_n)) \subset C$  tale che  $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$  per  $t \rightarrow \tilde{t}$  oppure per  $t \rightarrow +\infty$ . Ma nel primo caso avremmo  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\tilde{t}), y(\tilde{t})) \in C$ , contro l'ipotesi, mentre nel secondo caso dedurremmo che  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  sarebbe un punto critico (esercizio 2.5.9), mentre  $\Gamma$  non ne contiene.

Supponiamo adesso, per assurdo, che esista un punto  $(x_0, y_0) \in \Gamma \setminus C$ . Poniamo

$$r_0 = \inf\{r > 0 : \overline{B((x_0, y_0), r)} \cap \overline{C} \neq \emptyset\},$$

e notiamo che  $r_0$  è in effetti un minimo. Quindi vi è un punto  $(x^*, y^*) \in \partial B((x_0, y_0), r_0) \cap \overline{C}$  (nel caso in cui  $r_0 = 0$  si ha  $(x^*, y^*) = (x_0, y_0)$ ). Consideriamo l'orbita  $C^*$  passante per  $(x^*, y^*)$ : essa è inclusa in  $\Gamma$  e interseca necessariamente sia la palla aperta  $B((x_0, y_0), r_0)$ , sia  $C$ ; di conseguenza  $C' \subseteq C$  e dunque  $C$  interseca  $B((x_0, y_0), r_0)$ . Ciò è assurdo per definizione di  $r_0$ .

Adesso proviamo che  $C$  è un'orbita periodica. Fissiamo  $(x(t_0), y(t_0)) \in C$  e supponiamo che sia  $(x(t), y(t)) \neq (x(t_0), y(t_0))$  per ogni  $t > t_0$ : per compattezza, possiamo estrarre una successione  $\{(x(t_n), y(t_n))\} \subset C$ , ove  $t_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ , tale che  $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma$  per  $n \rightarrow \infty$ . Ma ciò è impossibile, perché  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  sarebbe un punto critico (esercizio 2.5.9), mentre  $\Gamma$  non ne contiene. Dunque deve esistere un  $T > 0$  tale che  $(x(t_0 + T), y(t_0 + T)) = (x(t_0), y(t_0))$ , e ciò implica che  $C$  è un'orbita periodica.  $\square$

**Esempi 2.5.12 (1)** Il sistema

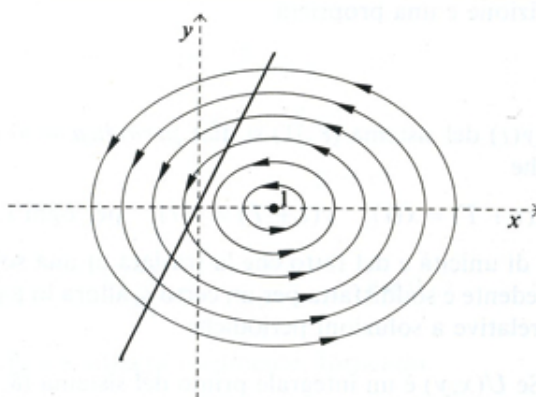
$$\begin{cases} x' = 2y(y - 2x) \\ y' = (1 - x)(y - 2x) \end{cases}$$

ha come punti critici tutti i punti della retta  $y = 2x$  e il punto  $(1, 0)$ . L'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)(y-2x)}{2y(y-2x)} = \frac{1-x}{2y} \quad \text{se } y \neq 2x, y \neq 0$$

ha come soluzione, in forma implicita,  $(1-x)^2 + 2y^2 = c$ ; si tratta di ellissi centrate in  $(1, 0)$ , curve di livello dell'integrale primo  $U(x, y) = (1-x)^2 + 2y^2$ .

Per  $0 < k < \frac{8}{9}$  tali ellissi non incontrano la retta  $y = 2x$ , quindi non vi sono punti critici su di esse e pertanto sono orbite periodiche. Per  $k \geq \frac{8}{9}$ , invece, le ellissi contengono punti critici e sono costituite da più di un'orbita (due se  $k = \frac{8}{9}$ , quattro se  $k > \frac{8}{9}$ ). Il verso di percorrenza si determina analizzando il segno di  $x'$  e  $y'$ .



**(2)** Consideriamo il *modello preda-predatore* di Lotka-Volterra: supponiamo che in una

stessa nicchia ecologica siano presenti una specie di prede che al tempo  $t$  conta  $x(t)$  esemplari ed una specie di predatori che al tempo  $t$  conta  $y(t)$  esemplari, ed ipotizziamo che:

- il tasso (relativo) di crescita delle prede sia pari ad una costante positiva in assenza di predatori, ma decresca linearmente come funzione di  $y$ ;
- il tasso (relativo) di crescita dei predatori sia pari ad una costante negativa in assenza di prede, ma cresca linearmente come funzione di  $x$ .

Sotto queste condizioni il sistema che ne risulta è del tipo seguente:

$$\begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -c + dx, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy, \end{cases}$$

con  $a, b, c, d$  numeri positivi.

Supponiamo per semplicità che sia  $a = b = c = d = 1$ ; il sistema diventa

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = -y(1 - x). \end{cases}$$

I punti critici sono  $(0, 0)$  e (più significativamente)  $(1, 1)$ . Dal teorema di linearizzazione segue facilmente che  $(0, 0)$  è un punto di sella, mentre tale teorema è inefficace per quanto riguarda il punto  $(1, 1)$ , che è un centro per il sistema linearizzato. Però si può facilmente trovare un integrale primo: dall'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 1)y}{x(1 - y)},$$

separando le variabili e integrando, si trova

$$\ln y - y = x - \ln x + c,$$

ovvero  $(x e^{-x})(y e^{-y}) = k$ ; possiamo equivalentemente scrivere l'integrale primo nella forma

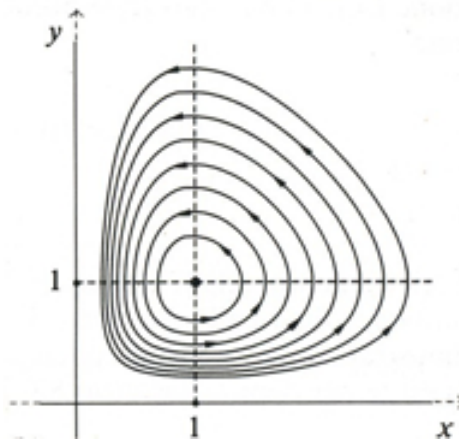
$$U(x, y) = (x e^{-x+1})(y e^{-y+1}).$$

La funzione  $\varphi(x) = x e^{-x+1}$  ha massimo nel punto 1, con  $\varphi(1) = 1$ : quindi  $U(x, y)$  ha massimo in  $(1, 1)$  e ciò suggerisce che le curve di livello  $c$ , con  $c < 1$  sufficientemente vicino a 1, siano curve chiuse.

In effetti, notiamo che tali curve sono tutte simmetriche rispetto alla bisettrice del primo quadrante. Poi, fissato  $c \in ]0, 1[$  e detta  $\Gamma_c$  la curva di livello  $c$ , siano  $x_1$  e  $x_2$  i due numeri tali che  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = c$ , con  $0 < x_1 < 1 < x_2$ ; allora i quattro punti  $(x_1, 1)$ ,  $(x_2, 1)$ ,  $(1, x_1)$  e  $(1, x_2)$  appartengono a  $\Gamma_c$ .



Inoltre, per ogni  $x \in ]x_1, x_2[$  esistono esattamente due numeri  $y_1(x), y_2(x)$ , tali che  $\varphi(x)\varphi(y_1(x)) = \varphi(x)\varphi(y_2(x)) = c$ , con  $0 < y_1(x) < 1 < y_2(x)$ : ne segue che i quattro punti  $(x, y_1(x)), (x, y_2(x)), (y_1(x), x), (y_2(x), x)$  appartengono a  $\Gamma_c$ . Si vede subito che le quantità  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  dipendono con continuità da  $x$ , e tendono a 1 quando  $x \rightarrow x_1$  e  $x \rightarrow x_2$ . Con queste considerazioni è facile concludere che  $\Gamma_c$  è una curva chiusa e quindi un'orbita periodica per ogni  $c \in ]0, 1[$ .



Un sistema che, come quello del modello di Lotka-Volterra, ha un integrale primo su tutto il piano, si dice *conservativo*. Il nome viene dalla meccanica: per una particella di posizione  $x$  e quantità di moto  $y$  le equazioni del moto hanno la forma

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y),$$

ove  $H(x, y)$  è l'*Hamiltoniana* del sistema. Tale funzione è un integrale primo delle equazioni, poiché lungo una traiettoria si ha

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = H_x x' + H_y y' = -y'x' + x'y' = 0.$$

Dunque  $H$  è una costante del moto, ossia è una quantità che *si conserva*. Ad esempio, la legge di Newton unidimensionale dà luogo all'equazione differenziale  $x'' = f(x)$ , che equivale al sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x). \end{cases}$$

La somma dell'*energia cinetica*  $T(y) = \frac{y^2}{2}$  e dell'*energia potenziale*  $U(x) = -\int_0^x f(\xi) d\xi$  fornisce l'*energia meccanica*  $E(x, y) = T(y) + U(x)$ ; essa è un integrale primo del sistema, dato che lungo una traiettoria  $(x(t), y(t))$  si ha

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}T(y(t)) + \frac{d}{dt}U(x(t)) = yy' - f(x)x' = 0.$$

Dunque l'energia meccanica si conserva durante il moto.

## Cicli limite

Nello studio delle orbite di un sistema non lineare può comparire un fenomeno nuovo rispetto al caso lineare: la presenza di orbite periodiche "isolate". Per capire come ciò sia possibile, analizziamo subito un esempio.

**Esempio 2.5.13** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\ y' = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} :$$

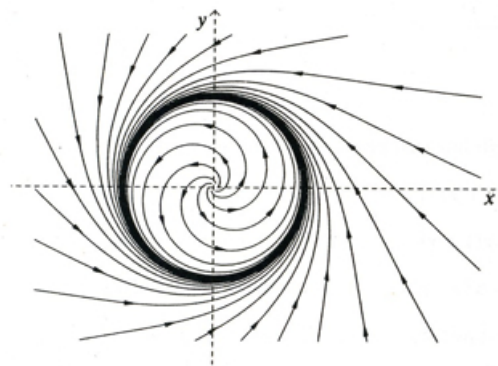
utilizzando le coordinate polari  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  esso prende la semplice forma

$$\begin{cases} r' = r(1 - r) \\ \vartheta' = 1. \end{cases}$$

Chiaramente,  $(r(t), \vartheta(t)) = (1, t)$  è una soluzione del sistema la cui orbita è la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ . Per  $0 < r < 1$  si ha  $r' > 0$ , quindi le orbite interne a tale circonferenza, essendo  $\vartheta' = 1$ , vi si avvicinano lungo spirali antiorarie; al contrario, per  $r > 1$  è  $r' < 0$ , e pertanto anche le orbite esterne si avvicinano alla circonferenza secondo spirali antiorarie. Si dice che l'orbita  $x^2 + y^2 = 1$  è un *ciclo limite* del sistema.

In generale, si chiama *ciclo limite* di un sistema differenziale un'orbita chiusa tale che in un suo intorno "tubolare" non vi siano altre orbite chiuse. Un ciclo limite può essere *stabile*, se, come nell'esempio precedente, le orbite vicine si avvicinano ad esso per  $t \rightarrow +\infty$ , o *instabile*, se se ne allontanano, oppure *semistabile*, se le orbite interne e quelle esterne hanno comportamenti diversi.

**Esempio 2.5.14** Il sistema  $r' = r(r - 1)(r - 2)$ ,  $\vartheta' = 1$  ha due cicli limite:  $r = 1$  è stabile,  $r = 2$  è instabile, in quanto  $r' > 0$  per  $0 < r < 1$  e per  $r > 2$ . Invece il sistema  $r' = r(r - 1)^2$ ,  $\vartheta' = 1$  ha il ciclo limite  $r = 1$  che è semistabile, in quanto  $r' > 0$  per  $0 < r < 1$  e per  $r > 1$ .



Naturalmente i cicli limite non sono sempre circolari, né è sempre possibile determinarli passando a coordinate polari.

**Esempio 2.5.15** Consideriamo l'equazione di Van der Pol, che governa l'intensità di corrente in certi circuiti elettrici:

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0,$$

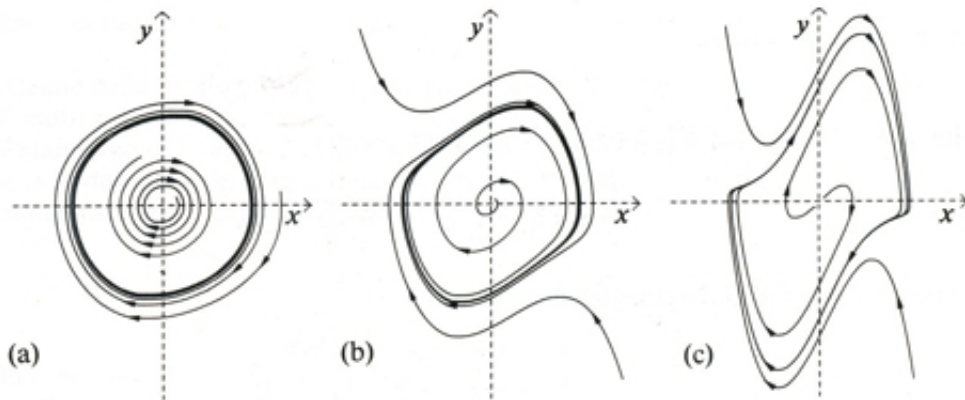
ove  $\mu$  è un parametro positivo. Il sistema corrispondente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu y(1 - x^2) \end{cases}$$

ha il punto critico  $(0, 0)$ , dove la linearizzazione porta a

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu y. \end{cases}$$

In quest'ultimo sistema non ci sono orbite periodiche: gli autovalori o sono positivi (se  $\mu^2 \geq 4$ ), o hanno parte reale positiva (se  $\mu^2 < 4$ ), cosicché le soluzioni si allontanano dall'origine per  $t \rightarrow \infty$ . Però nell'equazione non lineare vi è un termine di “resistenza”  $-\mu(1-x^2)x'$  che ha coefficiente negativo per  $|x| < 1$  (la corrente viene amplificata) e positivo per  $|x| > 1$  (la corrente viene indebolita). Questa azione alternata del termine resistivo fa sperare che il sistema possa avere soluzioni periodiche, che sono di grande importanza dal punto di vista ingegneristico; in effetti, un ciclo limite esiste, ma non è affatto banale dimostrarlo. Le figure sottostanti mostrano le orbite del sistema quando  $\mu = 0.1$  (a),  $\mu = 1$  (b),  $\mu = 5$  (c).



Il problema della determinazione dei cicli limite è in generale molto difficile. Vale in proposito il teorema seguente, non dimostrabile coi nostri mezzi:

**Teorema 2.5.16 (di Poincaré-Bendixon)** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , siano  $f, g \in C^1(A)$  e sia  $(x(\cdot), y(\cdot))$  una soluzione del sistema non lineare*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

*Supponiamo che l'insieme  $\{(x(\cdot), y(\cdot)) : t \geq t_0\}$  sia contenuto in una regione  $D \subset A$  chiusa e limitata, non contenente punti critici del sistema. Allora  $(x(\cdot), y(\cdot))$  o è periodica, oppure tende ad un ciclo limite del sistema.  $\square$*

## Esercizi 2.5

1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$$

ove  $a, b, c, d$  sono costanti reali tali che  $ad - bc = 0$ . Si provi che si verifica una delle seguenti tre situazioni:

- (a) quando almeno due fra  $a, b, c, d$  sono non nulli, o quando  $b = c = 0$  e  $a = 0$ ,  $d \neq 0$  oppure  $a \neq 0$ ,  $d = 0$ , vi è un'intera retta di punti critici, le orbite sono rettilinee e trasversali a tale retta e tendono ad essa per  $t \rightarrow +\infty$  oppure per  $t \rightarrow -\infty$ ;

- (b) quando  $a = d = 0$  e  $b = 0$ ,  $c \neq 0$  oppure  $b \neq 0$ ,  $c = 0$ , vi è una retta di punti critici e le orbite sono parallele ad essa;
- (c) quando  $a = b = c = d = 0$ , ogni punto del piano è critico.
2. Descrivere la natura del punto critico  $(0, 0)$  dei seguenti sistemi lineari, tracciandone approssimativamente le orbite:

$$(a) \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -y/4, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y. \end{cases}$$

3. Si consideri l'equazione delle *oscillazioni smorzate*

$$mu''(t) + \mu u'(t) + ku = 0 :$$

si scriva un sistema di due equazioni del primo ordine nelle incognite  $x = u$ ,  $y = u'$  e si studi la stabilità del punto critico  $(0, 0)$  in funzione dei parametri  $m, \mu, k$ .

4. Si effettui la stessa analisi dell'esercizio precedente per l'equazione del *circuito oscillante*

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = 0.$$

5. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

si ponga  $p = a + d$ ,  $q = ad - bc$  e  $\Delta = p^2 - 4q$ . Si verifichi che il punto critico  $(0, 0)$  è:

- (i) un nodo, se  $q > 0$  e  $\Delta \geq 0$ ;
- (ii) un punto di sella, se  $q < 0$ ;
- (iii) un fuoco, se  $p \neq 0$  e  $\Delta < 0$ ;
- (iv) un centro, se  $p = 0$  e  $q > 0$ ,

e che tale punto è asintoticamente stabile se e solo se  $q > 0$  e  $p < 0$ .

6. Determinare un sistema lineare che abbia come soluzioni

$$x(t) = e^t(\cos t + 2 \sin t), \quad y(t) = e^{-t} \cos t$$

e descriverne qualitativamente le orbite.

7. Trovare i punti critici dei sistemi sotto elencati, scriverne i corrispondenti sistemi linearizzati e, quando possibile, analizzare il comportamento qualitativo delle orbite in un intorno dei punti critici:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = 2x + 2, \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - y, \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad \begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = y^2 - 2y, \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x' = 2x - y^2 \\ y' = -y + xy. \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad \begin{cases} x' = 2x - x^2 \\ y' = -y + xy, \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x^5. \end{cases}
 \end{array}$$

8. Sia  $(x(\cdot), y(\cdot))$  una soluzione non costante del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

con  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Si dimostri che se in un istante  $t_0$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R},$$

allora  $(x_0, y_0)$  non è un punto critico del sistema; se ne deduca che per raggiungere, o abbandonare, un punto critico occorre un tempo infinito.

9. Sia  $(x(\cdot), y(\cdot))$  una soluzione non costante del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

con  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Si dimostri che se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0 \in \mathbb{R},$$

e se  $(x_0, y_0) \in A$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto critico del sistema.

[**Traccia:** si osservi che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $\frac{x(t)-x(n)}{t} \rightarrow 0$  e  $\frac{y(t)-y(n)}{t} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ ; si provi che ciò implica  $x'(t) \rightarrow 0$  e  $y'(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , e se ne deduca la tesi.]

10. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = -y + \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

si verifichi che  $(0, 0)$  è un punto critico isolato, e che tale punto è un fuoco per il sistema originale ma è un punto a stella per il sistema linearizzato.

11. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è il solo punto critico e che le circonferenze  $C_n$  di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\frac{1}{n}$  sono orbite periodiche. Passando a coordinate polari si provi che le orbite passanti fra  $C_n$  e  $C_{n+1}$  sono a spirale, mentre quelle esterne a  $C_1$  sono illimitate, cosicché non vi sono altre orbite chiuse.

12. Determinare gli integrali primi dei sistemi seguenti, provando poi a disegnarne le orbite:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{cases} x' = x(1 + y) \\ y' = -y(1 + x), \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x' = x(x e^y - \cos y) \\ y' = \sin y - 2x e^y, \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \begin{cases} x' = y - x^2 y - y^3 \\ y' = x^2 + y^2 - 1, \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x' = 2x^2 y \\ y' = (y^2 + 1)x. \end{cases} \end{array}$$

13. Determinare le orbite periodiche dei sistemi

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \begin{cases} x' = -y(x^2 + y^2 - 4) \\ y' = 4(x - 1)(x^2 + y^2 - 4), \end{cases} \\ \text{(b)} \quad \begin{cases} x' = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2) \\ y' = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2). \end{cases} \end{array}$$

14. Si provi che i seguenti sistemi non hanno soluzioni periodiche non costanti:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x' = -2x - 3y - xy^2 \\ y' = y + x^3 - x^2 y, \end{cases} \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} x' = x + y + x^3 - y^2 \\ y' = -x + 2y + x^2 y + \frac{1}{3}y^3. \end{cases}$$

15. Si provi che il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + y(1 - 3x^2 - 2y^2) \end{cases}$$

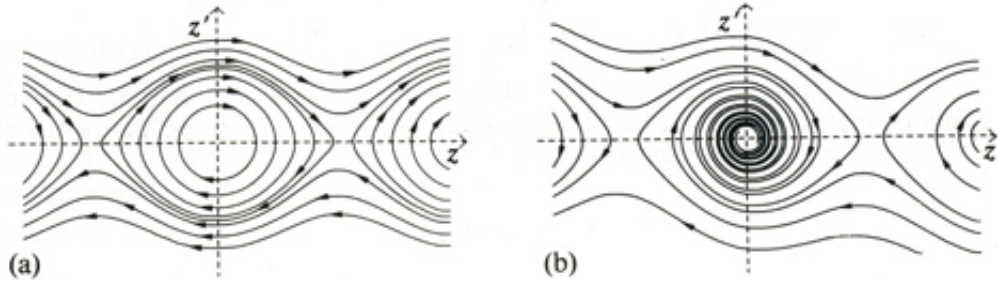
ha un ciclo limite nella regione

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

16. Si consideri l'equazione del pendolo

$$z'' - kz' - \frac{g}{\ell} \sin z = 0.$$

Nel caso  $k = 0$  (pendolo senza smorzamento) si determini un integrale primo del corrispondente sistema e si dimostri che esistono orbite periodiche, giustificando così il comportamento delle orbite (a) riportato qui sotto. Si studi anche il caso  $k > 0$  (oscillazioni smorzate) e si giustifichi il comportamento delle orbite (b).



# Capitolo 3

## Integrazione secondo Lebesgue

### 3.1 Motivazioni

Questo capitolo è dedicato alla teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue in una o più variabili. Si potrebbe, più semplicemente, estendere la nozione di integrale di Riemann, descritta nei corsi del primo anno, al caso di più variabili; tuttavia la teoria di Riemann, seppure concettualmente semplice e soddisfacente per molti aspetti, non è abbastanza flessibile da consentire certe operazioni che pure appaiono naturali: ad esempio, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A f(x) dx$$

solo se  $A$  è un insieme misurabile limitato (ad esempio un intervallo) e se vi è convergenza uniforme delle funzioni  $f_n$  a  $f$ , ossia quando risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Inoltre, se  $\{A_n\}$  è una successione di insiemi misurabili disgiunti, la loro unione non è necessariamente misurabile (esercizio 3.1.2) né, tanto meno, vale in generale la relazione

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$$

(qui la misura di  $A$  è data dall'integrale della funzione caratteristica, cioè  $m(A) = \int_a^b I_A(x) dx$ , essendo  $[a, b]$  un arbitrario intervallo contenente  $A$ ). Infine, le quantità

$$\int_A |f(x)| dx, \quad \left[ \int_A |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

non sono norme sullo spazio  $\mathcal{R}(A)$  delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $A$ , ma solo - quando  $A$  è compatto - sullo spazio  $C(A)$  delle funzioni continue su  $A$ ; tuttavia, tale spazio, munito di una qualunque di tali norme, non è completo.

Vi sono poi altre, e più importanti, motivazioni "a posteriori": la teoria dell'integrazione



secondo Lebesgue ha dato l'avvio ad enormi sviluppi nell'analisi funzionale, nella teoria della probabilità, ed in svariatissime applicazioni (risoluzione di equazioni differenziali, calcolo delle variazioni, ricerca operativa, fisica matematica, matematica finanziaria, biomatematica, ed altre ancora).

Esporremo la teoria della misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , seguendo la presentazione introdotta da Carathéodory, la quale, pur dando poco spazio all'intuizione, semplifica la trattazione.

### Esercizi 3.1

1. Esibire una successione di funzioni  $\{f_n\}$  definite su  $[a, b]$ , Riemann integrabili in  $[a, b]$ , puntualmente convergenti in  $[a, b]$ , e tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

2. Esibire una successione di sottoinsiemi  $\{A_n\}$  di  $\mathbb{R}$ , misurabili secondo Riemann e disgiunti, tali che la loro unione non sia misurabile secondo Riemann.

## 3.2 Volume dei parallelepipedi

L'integrazione secondo Riemann di funzioni di una variabile si fa usualmente sugli intervalli limitati, o anche sugli intervalli illimitati nel caso di integrali impropri. Per gli integrali di funzioni di più variabili, la scelta degli insiemi sui quali fare l'integrale, che chiameremo insiemi "misurabili", è molto più varia: già nel caso di due variabili è del tutto naturale richiedere che fra essi figurino, ad esempio, poligoni, circonferenze, ellissi, nonché intersezioni ed unioni di questi. Prima di definire l'integrale, quindi, conviene individuare una classe, il più possibile vasta, di insiemi misurabili, ed attribuire ad essi una "misura": la misura secondo Lebesgue. Questa misura dovrà essere dotata di certe proprietà basilari: l'insieme vuoto avrà misura nulla, ci sarà monotonia rispetto all'inclusione, e additività sugli insiemi disgiunti. Come vedremo, non si potrà attribuire una misura a *tutti* i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ , ma la classe dei sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue sarà comunque molto ricca: ad esempio, per  $N = 1$  essa risulterà molto più ampia di quella degli insiemi misurabili secondo Riemann.

I "mattoni" con i quali si costruisce la misura di Lebesgue sono i parallelepipedi  $N$ -dimensionali (intervalli, quando  $N = 1$ ) con facce parallele agli assi coordinati.

Un *parallelepipedo* in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) è un insieme  $P$  della forma

$$P = \prod_{i=1}^N I_i = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N,$$

ove  $I_1, \dots, I_N$  sono intervalli limitati di  $\mathbb{R}$ . Ricordando che la lunghezza  $\ell(I)$  di un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  è la differenza fra i due estremi, ossia

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } ]a, b[ \subseteq I \subseteq [a, b], \\ +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato,} \end{cases}$$

è naturale porre la seguente

**Definizione 3.2.1** Il volume  $N$ -dimensionale di un parallelepipedo  $P = \prod_{i=1}^N I_i$  è il numero

$$v_N(P) = \prod_{i=1}^N \ell(I_i).$$

Possiamo estendere la definizione ora data anche ai parallelepipedi illimitati di  $\mathbb{R}^N$ , ossia quelli in cui uno o più degli intervalli  $I_i$  è una semiretta o tutto  $\mathbb{R}$ : occorre solo fare la convenzione  $0 \cdot \infty = 0$ , che è necessaria nel caso che uno degli  $I_i$  sia illimitato ed un altro sia invece costituito da un solo punto: in  $\mathbb{R}^2$ , ad esempio, è naturale che alla retta  $\{1\} \times \mathbb{R}$  venga attribuita area nulla. Denoteremo con  $\mathcal{P}_N$  la famiglia dei parallelepipedi, limitati o illimitati, di  $\mathbb{R}^N$ .

Ricordiamo che se  $E$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ , la *parte interna*  $\overset{\circ}{E}$  di  $E$  è l'insieme dei punti *interni* di  $E$ , ossia gli  $\mathbf{x}$  tali che vi è un'opportuna palla  $B(\mathbf{x}, r)$  contenuta in  $E$ ; la *chiusura*  $\overline{E}$  di  $E$  è l'insieme dei punti *aderenti* ad  $E$ , ossia gli  $\mathbf{x}$  tali che ogni palla  $B(\mathbf{x}, r)$  interseca  $E$ ; infine, la *frontiera*  $\partial E$  di  $E$  è l'insieme degli  $\mathbf{x}$  tali che ogni palla  $B(\mathbf{x}, r)$  interseca sia  $E$  che  $E^c$ .

Dalla definizione 3.2.1 segue subito che per ogni parallelepipedo  $P \subset \mathbb{R}^N$  si ha

$$v_N(P) = v_N(\overline{P}) = v_N(\overset{\circ}{P}).$$

Vale inoltre il seguente lemma, semplice ma basilare.

**Lemma 3.2.2** Sia  $P \in \mathcal{P}_N$  della forma  $P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ . Fissato un indice  $i \in \{1, \dots, N\}$  e scelto  $c \in ]a_i, b_i[$ , siano

$$P_1 = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^i < c\}, \quad P_2 = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^i > c\};$$

allora si ha

$$v_N(P) = v_N(P_1) + v_N(P_2).$$

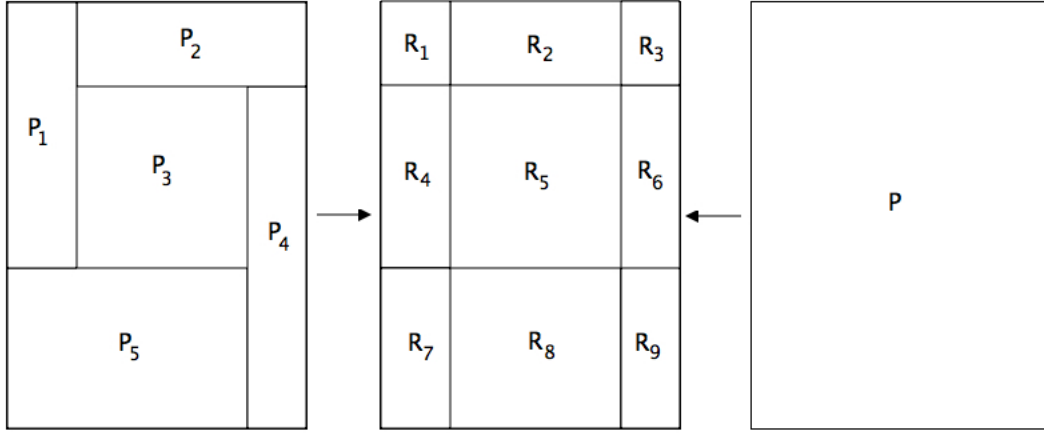
**Dimostrazione** Basta osservare che

$$\begin{aligned} v_N(P_1) + v_N(P_2) &= \\ &= \left[ \prod_{j \neq i} (b_j - a_j) \right] (c - a_i) + \left[ \prod_{j \neq i} (b_j - a_j) \right] (b_i - c) = \prod_{j=1}^N (b_j - a_j) = v_N(P). \quad \square \end{aligned}$$

Da questo lemma segue facilmente la seguente

**Proposizione 3.2.3** Se un parallelepipedo  $P$  è unione finita di parallelepipedi  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , privi di punti interni comuni, allora

$$v_N(P) = \sum_{i=1}^k v_N(P_i).$$



**Dimostrazione** Con un numero finito di tagli del tipo descritto nel lemma, tanto  $P$  quanto l'unione  $\bigcup_{i=1}^k P_i$  si possono ridurre ad una stessa unione  $\bigcup_{j=1}^m R_j$  di sotto-parallelepipedi, privi di punti interni comuni, i quali hanno l'ulteriore proprietà di formare una “decomposizione coordinata” di  $P$ : con ciò si intende che, posto  $P = \prod_{i=1}^N I_i$ , ciascun intervallo  $I_i$  è decomposto in  $q_i$  sottointervalli adiacenti  $I_{i,h}$ , con  $h = 1, \dots, q_i$ , e gli  $R_j$  sono tutti e soli i parallelepipedi della forma  $I_{1,h_1} \times \dots \times I_{N,h_N}$  con  $h_1 \in \{1, \dots, q_1\}, \dots, h_N \in \{1, \dots, q_N\}$  (e in particolare  $m = \prod_{i=1}^N q_i$ ). Pertanto, utilizzando il lemma 3.2.2,

$$\sum_{i=1}^k v_N(P_i) = \sum_{j=1}^m v_N(R_j),$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m v_N(R_j) &= \sum_{h_1=1}^{q_1} \sum_{h_2=1}^{q_2} \dots \sum_{h_N=1}^{q_N} \prod_{i=1}^N \ell(I_{i,h_i}) = \\ &= \sum_{h_1=1}^{q_1} \ell(I_{1,h_1}) \sum_{h_2=1}^{q_2} \ell(I_{2,h_2}) \dots \sum_{h_N=1}^{q_N} \ell(I_{N,h_N}) = \\ &= \ell(I_1)\ell(I_2) \dots \ell(I_N) = v_N(P). \quad \square \end{aligned}$$

La funzione  $v_N$  associa ad ogni parallelepipedo di  $\mathbb{R}^N$  un numero in  $[0, +\infty]$ ; si noti che, in particolare,  $v_N(\emptyset)$  e  $v_N(\{\mathbf{a}\})$  valgono 0. Vogliamo estendere tale funzione a sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$  più generali, in modo da poterli “misurare”. Sarebbe auspicabile poter definire una funzione di insieme  $m_N$  che verifichi le seguenti proprietà:

1.  $m_N(E)$  è definita per ogni  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ;
2.  $m_N(P) = v_N(P)$  per ogni parallelepipedo  $P$ ;
3. (numerabile additività) se  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti, allora

$$m_N \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(E_n);$$

4. (*invarianza per traslazioni*) per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  e per ogni  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  si ha  $m_N(\mathbf{x} + E) = m_N(E)$ , ove  $\mathbf{x} + E = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{y} - \mathbf{x} \in E\}$ .

Sfortunatamente si può dimostrare che non è possibile soddisfare simultaneamente queste richieste: se si vogliono mantenere le proprietà 2, 3 e 4 non si potranno misurare tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ ; se, al contrario, si vuole mantenere la proprietà 1, occorrerà indebolire qualcuna delle altre, ad esempio sostituire la 3 con la seguente:

- 3'. (*numerabile subadditività*) se  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ , allora

$$m_N \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(E_n).$$

Considerazioni geometriche ci inducono a considerare irrinunciabili le proprietà 2, 3 e 4: di conseguenza, come si vedrà, la classe degli insiemi “misurabili” sarà un sottoinsieme proprio di  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ .

**Osservazione 3.2.4** In seguito sarà utile considerare la famiglia costituita dalle unioni finite di parallelepipedi di  $\mathbb{R}^N$  aperti a destra, la quale è un’*algebra*, ossia è una classe contenente l’insieme vuoto e chiusa rispetto all’unione ed al passaggio al complementare (esercizio 3.2.1). Possiamo denominare gli elementi di questa famiglia *pluri-parallelepipedi*. Si noti che, per la proposizione 3.2.3, ogni pluri-parallelepipedo è unione finita di parallelepipedi aperti a destra e disgiunti.

### Esercizi 3.2

1. Si provi che la famiglia delle unioni finite di parallelepipedi di  $\mathbb{R}^N$  aperti a destra è un’*algebra*.
2. Si verifichi che la famiglia delle unioni finite di parallelepipedi aperti di  $\mathbb{R}^N$  non è un’*algebra*.

## 3.3 Misura esterna di Lebesgue

Cominciamo ad attribuire ad ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$  una “misura esterna” che goda delle proprietà 1, 2, 3’ e 4 del paragrafo 3.2.

**Definizione 3.3.1** Se  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ , la misura esterna  $m_N^*(E)$  è data da

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n) : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n, P_n \text{ parallelepipedi aperti} \right\}.$$

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

**Proposizione 3.3.2** Si ha:

- (i)  $m_N^*(E) \geq 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$ ;
- (ii)  $m_N^*(\emptyset) = m_N^*(\{\mathbf{x}\}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ;
- (iii) (monotonia) se  $E \subseteq F$  allora  $m_N^*(E) \leq m_N^*(F)$ .

**Dimostrazione (i)** Evidente.

**(ii)** Per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $\emptyset \subset \{\mathbf{x}\} \subset \prod_{i=1}^N ]x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon[$ ; questo parallelepipedo ha volume  $(2\varepsilon)^N$  e ricopre  $\{\mathbf{x}\}$  e  $\emptyset$ . Quindi, per definizione,

$$0 \leq m_N^*(\emptyset) \leq m_N^*(\{\mathbf{x}\}) \leq (2\varepsilon)^N \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.

**(iii)** Se  $E \subseteq F$ , ogni ricoprimento  $\{P_n\}$  di  $F$  costituito da parallelepipedi aperti è anche un ricoprimento di  $E$ , da cui

$$m_N^*(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n);$$

per l'arbitrarietà del ricoprimento di  $F$ , si ottiene  $m_N^*(E) \leq m_N^*(F)$ .  $\square$

Verifichiamo ora la proprietà 2:

**Proposizione 3.3.3** Se  $P \subseteq \mathbb{R}^N$  è un parallelepipedo, allora  $m_N^*(P) = v_N(P)$ .

**Dimostrazione** Supponiamo dapprima  $P = \prod_{i=1}^N ]a_i, b_i[$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  il parallelepipedo  $\prod_{i=1}^N ]a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon[$  ricopre  $P$ , e quindi per definizione si ha

$$m_N^*(P) \leq v_N \left( \prod_{i=1}^N ]a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon[ \right) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i + 2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui  $m_N^*(P) \leq \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) = v_N(P)$ .

Per provare la disuguaglianza opposta, sia  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ricoprimento di  $P$  costituito da parallelepipedi aperti; poiché  $P$  è compatto, esisterà un sottoricoprimento finito  $\{P_{n_1}, \dots, P_{n_m}\}$ . Definiamo  $Q_i = P_{n_i} \cap P$ , cosicché si ha

$$P = \bigcup_{i=1}^m Q_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_{n_i}.$$

Dato che i  $Q_i$  non sono disgiunti, con un numero finito di tagli paralleli agli assi isoliamo le parti "ridondanti" e costruiamo una decomposizione coordinata  $\{R_h\}_{1 \leq h \leq s}$ , tale che

$$P = \bigcup_{i=1}^m Q_i = \bigcup_{h=1}^s R_h \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{R}_h \cap \overset{\circ}{R}_{h'} = \emptyset \quad \text{per} \quad h \neq h';$$

in virtù della proposizione 3.2.3 ricaviamo allora

$$v_N(P) = \sum_{h=1}^s v_N(R_h) \leq \sum_{i=1}^m v_N(Q_i) \leq \sum_{i=1}^m v_N(P_{n_i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_n).$$

Per l'arbitrarietà del ricoprimento  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  concludiamo che  $v_N(P) \leq m_N^*(P)$ , e pertanto si ha  $v_N(P) = m_N^*(P)$  quando  $P$  è un parallelepipedo compatto.

Sia ora  $P$  tale che  $\bar{P} = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ . Poiché per ogni  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo si ha  $\prod_{i=1}^N [a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon] \subset P \subseteq \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ , dalla monotonia di  $m_N^*$  e da quanto già dimostrato segue

$$\prod_{i=1}^N (b_i - a_i - 2\varepsilon) \leq m_N^*(P) \leq \prod_{i=1}^N (b_i - a_i),$$

e usando nuovamente l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si ottiene  $m_N^*(P) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) = v_N(P)$ .

Infine, se  $P$  è illimitato, ci sono due casi: esso è il prodotto di  $N$  intervalli tutti di lunghezza positiva (nel qual caso  $v_N(P) = +\infty$ ), oppure esso è il prodotto di  $N$  intervalli, almeno uno dei quali ha lunghezza nulla (e dunque  $v_N(P) = 0$ ). Nel primo caso, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste un parallelepipedo limitato  $Q_n$  di volume  $n$  contenuto in  $P$ : quindi, per monotonia,

$$m_N^*(P) \geq m_N^*(Q_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè  $m_N^*(P) = +\infty = v_N(P)$ . Nel secondo caso, possiamo supporre ad esempio che si abbia  $P = \prod_{i=1}^{N-1} I_i \times \{\mathbf{a}\}$ ; osserviamo allora che, grazie all'esercizio 3.3.2,

$$\begin{aligned} m_N^*(P) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_n) : P \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n, P_n \text{ parallelepipedi chiusi} \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v_N(Q_n) : Q_n = R_n \times \{\mathbf{a}\}, \prod_{i=1}^{N-1} I_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n, R_n \text{ parallelepipedi chiusi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ciò prova che  $m_N^*(P) = v_N(P) = 0$ .  $\square$

Verifichiamo ora che  $m_N^*$  gode della proprietà 3' del paragrafo 3.2.

**Proposizione 3.3.4** *La misura esterna  $m_N^*$  è numerabilmente subadditiva.*

**Dimostrazione** Sia  $\{E_n\}$  una successione di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ : dobbiamo provare che

$$m_N^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N^*(E_n).$$

Ciò è ovvio se la serie a secondo membro è divergente; supponiamo quindi che essa sia convergente, cosicché in particolare  $m_N^*(E_n) < \infty$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per definizione di misura esterna, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento  $\{P_{kn}\}_{k \in \mathbb{N}}$  di  $E_n$  costituito da parallelepipedi aperti, tale che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} v_N(P_{kn}) < m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

La famiglia  $\{P_{kn}\}_{k,n \in \mathbb{N}}$  è allora un ricoprimento di  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  costituito da parallelepipedi aperti, e si ha

$$m_N^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{k,n \in \mathbb{N}} v_N(P_{kn}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N^*(E_n) + \varepsilon;$$

dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue la tesi.  $\square$

Infine osserviamo che  $m_N^*$  verifica anche la proprietà 4 del paragrafo 3.2: infatti il volume dei parallelepipedi è ovviamente invariante per traslazioni; ne segue facilmente, usando la definizione, che anche  $m_N^*$  è invariante per traslazioni.

Come vedremo in seguito, la misura esterna *non* verifica invece la proprietà 3 del paragrafo 3.2, ed anzi non è nemmeno finitamente additiva su  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  (esercizio 3.8.4). Sarà però numerabilmente additiva su una sottoclasse molto vasta di  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ .

### Esercizi 3.3

1. Sia  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Posto  $tE = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \frac{\mathbf{x}}{t} \in E\}$ , si provi che

$$m_N^*(tE) = |t|^N m_N^*(E).$$

2. Dimostrare che la funzione di insieme  $m_N^*$  non cambia se nella definizione 3.3.1 si fa uso, anziché di parallelepipedi  $P_n$  aperti, di parallelepipedi  $P_n$  di uno dei seguenti tipi:
  - (a) parallelepipedi  $P_n$  chiusi;
  - (b) parallelepipedi  $P_n$  aperti sui lati destri;
  - (c) parallelepipedi  $P_n$  qualunque;
  - (d) parallelepipedi  $P_n$  con vertici di coordinate razionali.
3. Si dimostri che ogni intervallo di  $\mathbb{R}$  è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.
4. Si provi che ogni aperto non vuoto di  $\mathbb{R}^N$  ha misura esterna strettamente positiva.
5. Si provi che ogni sottoinsieme numerabile di  $\mathbb{R}^N$  ha misura esterna nulla.
6. Per ogni  $\varepsilon > 0$  si costruisca un aperto  $A \subset \mathbb{R}^N$ , denso in  $\mathbb{R}^N$ , tale che  $m_N^*(A) < \varepsilon$ .

## 3.4 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

Introduciamo adesso una classe di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$  sulla quale la funzione  $m_N^*$  è numerabilmente additiva (proprietà 3 del paragrafo 3.2).

**Definizione 3.4.1** *Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  è detto misurabile (secondo Lebesgue) se per ogni insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  si ha*

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c).$$

Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^N$  è dunque misurabile se, fissato un arbitrario “insieme test”  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ , esso viene “decomposto bene” da  $E$ , nel senso che la misura esterna di  $A$  è

additiva sulle due parti  $A \cap E$  e  $A \cap E^c$ . Si noti che per la subadditività di  $m_N^*$  si ha sempre

$$m_N^*(A) \leq m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c),$$

quindi la disuguaglianza significativa è quella opposta. Indicheremo con  $\mathcal{M}_N$  la classe dei sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ .

**Osservazione 3.4.2** Dalla definizione segue subito che  $E$  è misurabile se e solo se lo è  $E^c$ ; quindi la classe  $\mathcal{M}_N$  è chiusa rispetto al passaggio al complementare. Inoltre è facile vedere che  $\mathbb{R}^N$  e  $\emptyset$  sono insiemi misurabili.

Più in generale:

**Proposizione 3.4.3** *Se  $E \subset \mathbb{R}^N$  e  $m_N^*(E) = 0$ , allora  $E$  è misurabile.*

**Dimostrazione** Per ogni insieme test  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  si ha

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c)$$

in quanto  $m_N^*(A \cap E) \leq m_N^*(E) = 0$ . Ne segue la tesi.  $\square$

La classe  $\mathcal{M}_N$  è chiusa anche rispetto all'unione; si ha infatti:

**Proposizione 3.4.4** *Se  $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$  sono misurabili, allora  $E \cup F$  è misurabile.*

**Dimostrazione** Sia  $A$  un insieme test. Poiché  $E$  è misurabile,

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c);$$

poiché  $F$  è misurabile, scelto come insieme test  $A \cap E^c$  si ha

$$\begin{aligned} m_N^*(A \cap E^c) &= m_N^*(A \cap E^c \cap F) + m_N^*(A \cap E^c \cap F^c) = \\ &= m_N^*(A \cap E^c \cap F) + m_N^*(A \cap (E \cup F)^c), \end{aligned}$$

e dunque

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c \cap F) + m_N^*(A \cap (E \cup F)^c);$$

d'altra parte, essendo

$$(A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F) = A \cap (E \cup F),$$

la subadditività di  $m_N^*$  implica che

$$m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c \cap F) \geq m_N^*(A \cap (E \cup F)),$$

da cui finalmente

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap (E \cup F)) + m_N^*(A \cap (E \cup F)^c).$$

Ciò prova la misurabilità di  $E \cup F$ .  $\square$



**Corollario 3.4.5** Se  $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$  sono misurabili, allora  $E \cap F$  ed  $E \setminus F$  sono misurabili.

**Dimostrazione** Se  $E, F \in \mathcal{M}_N$ , allora  $E^c, F^c \in \mathcal{M}_N$ ; per la proposizione precedente,  $E^c \cup F^c \in \mathcal{M}_N$  e quindi  $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{M}_N$ . Di qui segue  $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}_N$ .  
□

La classe  $\mathcal{M}_N$  contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto alle operazioni di unione, intersezione e differenza; in particolare,  $\mathcal{M}_N$  è un'algebra (v. esercizio 3.2.1).

**Osservazione 3.4.6** Se  $E, F$  sono insiemi misurabili e disgiunti, si ha

$$m_N^*(E \cup F) = m_N^*(E) + m_N^*(F),$$

come si verifica applicando la definizione 3.4.1 ad  $E$  e scegliendo come insieme test  $E \cup F$ . Di conseguenza, se  $E, F \in \mathcal{M}_N$  ed  $E \subseteq F$ , vale l'uguaglianza

$$m_N^*(F \setminus E) + m_N^*(E) = m_N^*(F),$$

e, se  $m_N^*(E) < \infty$ ,

$$m_N^*(F \setminus E) = m_N^*(F) - m_N^*(E).$$

Nel caso di  $N$  insiemi misurabili disgiunti si ha, più generalmente:

**Lemma 3.4.7** Siano  $E_1, \dots, E_n$  misurabili e disgiunti. Allora per ogni insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  si ha

$$m_N^* \left( A \cap \bigcup_{h=1}^n E_h \right) = \sum_{h=1}^n m_N^*(A \cap E_h).$$

**Dimostrazione** Ragioniamo per induzione. Se  $n = 1$  non c'è niente da dimostrare. Supponiamo che la tesi sia vera per  $n$  insiemi misurabili disgiunti, e consideriamo  $n + 1$  insiemi  $E_1, \dots, E_{n+1} \in \mathcal{M}_N$  fra loro disgiunti. Poiché  $E_{n+1}$  è misurabile, scegliendo come insieme test  $A \cap \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h$ , si ha

$$\begin{aligned} m_N^* \left( A \cap \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h \right) &= m_N^* \left( A \cap \left( \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h \right) \cap E_{n+1} \right) + m_N^* \left( A \cap \left( \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h \right) \cap E_{n+1}^c \right) = \\ &= m_N^*(A \cap E_{n+1}) + m_N^* \left( A \cap \bigcup_{h=1}^n E_h \right); \end{aligned}$$

ma, per ipotesi induttiva,

$$m_N^* \left( A \cap \bigcup_{h=1}^n E_h \right) = \sum_{h=1}^n m_N^*(A \cap E_h),$$

da cui

$$m_N^* \left( A \cap \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h \right) = m_N^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{h=1}^n m_N^*(A \cap E_h) = \sum_{h=1}^{n+1} m_N^*(A \cap E_h). \quad \square$$

Grazie al lemma precedente, siamo in grado di provare che la classe  $\mathcal{M}_N$  è chiusa rispetto all'unione numerabile (e quindi rispetto all'intersezione numerabile).

**Proposizione 3.4.8** Se  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$ , allora  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_N$ .

**Dimostrazione** Anzitutto, scriviamo  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  come unione numerabile di insiemi misurabili e *disgiunti*: basta porre

$$F_0 = E_0, \quad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^n F_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per avere che gli  $F_n$  sono disgiunti, appartengono a  $\mathcal{M}_N$  e verificano

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un insieme test: per ogni  $p \in \mathbb{N}$  possiamo scrivere, grazie al lemma precedente,

$$\begin{aligned} m_N^*(A) &= m_N^* \left( A \cap \bigcup_{n=0}^p F_n \right) + m_N^* \left( A \cap \left( \bigcup_{n=0}^p F_n \right)^c \right) = \\ &= \sum_{n=0}^p m_N^*(A \cap F_n) + m_N^* \left( A \cap \bigcap_{n=0}^p F_n^c \right) \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^p m_N^*(A \cap F_n) + m_N^* \left( A \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n^c \right) = \\ &= \sum_{n=0}^p m_N^*(A \cap F_n) + m_N^* \left( A \cap \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \right)^c \right). \end{aligned}$$

Se  $p \rightarrow \infty$ , in virtù della numerabile subadditività di  $m_N^*$  otteniamo

$$\begin{aligned} m_N^*(A) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(A \cap F_n) + m_N^* \left( A \cap \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \right)^c \right) \geq \\ &\geq m_N^* \left( A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \right) + m_N^* \left( A \cap \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \right)^c \right). \end{aligned}$$

Ciò prova che  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  è misurabile.  $\square$

Dunque la classe  $\mathcal{M}_N$  contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto all'unione numerabile ed al passaggio al complementare. Una famiglia di insiemi dotata di queste proprietà si chiama  $\sigma$ -algebra, o *tribù*;  $\mathcal{M}_N$  è pertanto una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ .

Proviamo finalmente che  $m_N^*$  è numerabilmente additiva su  $\mathcal{M}_N$ .

**Proposizione 3.4.9** Se  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$  e gli  $E_n$  sono fra loro disgiunti, allora si ha

$$m_N^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N^*(E_n).$$

**Dimostrazione** Poiché  $m_N^*$  è numerabilmente subadditiva, la disuguaglianza ( $\leq$ ) è evidente; proviamo l'altra. Per ogni  $p \in \mathbb{N}$  si ha, utilizzando la monotonia di  $m_N^*$  ed il lemma 3.4.7 con  $A = \mathbb{R}^N$ ,

$$m_N^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \geq m_N^* \left( \bigcup_{n=0}^p E_n \right) = \sum_{n=0}^p m_N^*(E_n),$$

da cui per  $p \rightarrow \infty$

$$m_N^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n). \quad \square$$

### Esercizi 3.4

1. Per ogni  $\alpha \in [0, \infty]$  si determini una successione di aperti  $\{A_n\}$  di  $\mathbb{R}^N$  tali che

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \quad m_N^*(A_n) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m_N^* \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \alpha.$$

2. Sia  $E \subset \mathbb{R}$  con  $m_1^*(E) = 0$  e sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile con derivata limitata. Si provi che  $f(E)$  ha misura esterna nulla. Si provi poi lo stesso risultato supponendo  $f \in C^1(\mathbb{R})$ .
3. Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . La *densità di  $E$  nel punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$*  è il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m_N^*(E \cap B(\mathbf{x}, h))}{m_N^*(B(\mathbf{x}, h))}.$$

- (i) Tale limite esiste sempre?
- (ii) Si provi che per  $N = 1$  l'insieme

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \cos \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \right\}$$

ha densità  $\frac{1}{3}$  nel punto  $x = 0$ .

[**Traccia:** per (i) si consideri, con  $N = 1$ ,  $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2^{-2n-1}, 2^{-2n}]$ ; per (ii), detto  $E$  l'insieme in questione, si verifichi che  $\frac{1}{h} m_1^*(E \cap [0, h[)$  è uguale a  $\frac{1}{6h\pi} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1/36}$  quando  $\frac{3}{\pi(6k+5)} < h < \frac{3}{\pi(6k+1)}$ , mentre è uguale a  $\frac{1}{6h\pi} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1/36} + 1 - \frac{3}{h\pi(6k+1)}$  quando  $\frac{3}{\pi(6k+1)} \leq h \leq \frac{3}{\pi(6k-1)}$ . Se  $h \rightarrow 0^+$  (e quindi  $k \rightarrow \infty$ ), si provi che il termine con la serie tende a  $\frac{1}{3}$ .]

4. Sia  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che  $\mathcal{F}$  è finita, oppure  $\mathcal{F}$  contiene una infinità più che numerabile di elementi.

[**Traccia:** se, per assurdo, fosse  $\mathcal{F} = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con gli  $E_n$  tutti distinti, si costruisca una successione  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  di insiemi disgiunti; dopodiché, posto  $\mathcal{F}' = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , si metta  $\mathcal{P}(\mathcal{F}')$  in corrispondenza biunivoca con  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .]

### 3.5 Misurabilità dei parallelepipedi

La classe degli insiemi misurabili non avrebbe l'importanza che ha, se non contenesse i parallelepipedi di  $\mathbb{R}^N$ : questo è ciò che andiamo a dimostrare.

**Proposizione 3.5.1** *I parallelepipedi di  $\mathbb{R}^N$  sono misurabili secondo Lebesgue.*

**Dimostrazione** Sappiamo già che  $\mathbb{R}^N = \emptyset^c$  è misurabile. Osserviamo poi che ogni parallelepipedo *non* aperto è l'unione di un parallelepipedo aperto e di un numero finito di sottoinsiemi di facce  $(N - 1)$ -dimensionali, dunque di misura nulla, e pertanto esso è misurabile se lo sono tutti i parallelepipedi *aperti*. Sia dunque  $P$  un parallelepipedo aperto e sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un insieme test. Se  $m_N^*(A) = \infty$ , la disuguaglianza da provare, ossia

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap P) + m_N^*(A \cap P^c),$$

è evidente. Se invece  $m_N^*(A) < \infty$ , per definizione, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un ricoprimento  $\{P_n\}$  di  $A$ , fatto di parallelepipedi aperti, tale che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n) < m_N^*(A) + \varepsilon.$$

Notiamo che la famiglia di parallelepipedi  $\{P_n \cap P\}$  è un ricoprimento aperto di  $A \cap P$ ; inoltre, ciascun insieme  $P_n$  può essere decomposto con un numero finito di tagli nell'unione di  $P_n \cap P$  con un numero finito di altri parallelepipedi  $R_{jn}$ ,  $j = 1, \dots, k_n$ , privi di punti interni comuni. Dunque per la proposizione 3.2.3 si ha

$$v_N(P_n) = v_N(P_n \cap P) + \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_{jn}).$$

Ne segue, dato che gli  $R_{jn}$  ricoprono  $A \setminus P$  al variare di  $j$  e  $n$ ,

$$\begin{aligned} m_N^*(A) &> -\varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n) = -\varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n \cap P) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_{jn}) = \\ &= -\varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n \cap P) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} m_N^*(R_{jn}) \geq \\ &\geq -\varepsilon + m_N^*(A \cap P) + m_N^*(A \setminus P), \end{aligned}$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .  $\square$

**Corollario 3.5.2** *Gli aperti ed i chiusi di  $\mathbb{R}^N$  sono misurabili secondo Lebesgue.*

**Dimostrazione** È sufficiente provare che ogni aperto non vuoto di  $\mathbb{R}^N$  è unione numerabile di parallelepipedi aperti. A questo scopo, definiamo per  $n \in \mathbb{N}^+$  gli insiemi

$$A_n = \left\{ \mathbf{x} \in A : d(\mathbf{x}, \partial A) > \frac{1}{n} \right\} \cap B(\mathbf{0}, n),$$

ove la distanza  $d(\mathbf{x}, \partial A)$  di  $\mathbf{x}$  da  $\partial A$  (esercizio 1.5.8) è definita, come sappiamo, da

$$d(\mathbf{x}, \partial A) = \inf_{\mathbf{y} \in \partial A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_N.$$

Gli  $A_n$  sono aperti limitati, con  $A_n \subseteq A_{n+1}$  e  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ . Consideriamo i compatti

$$\overline{A_1}, \overline{A_2} \setminus A_1, \dots, \overline{A_n} \setminus A_{n-1}, \dots,$$

la cui unione è ancora  $A$ . Indichiamo con  $Q(\mathbf{x}, r)$  il cubo di centro  $\mathbf{x}$  inscritto nella palla  $B(\mathbf{x}, r)$ : nel compatto  $\overline{A_1}$  il ricoprimento  $\{Q(\mathbf{x}, \frac{1}{2})\}_{\mathbf{x} \in \overline{A_1}}$  ha un sottoricoprimento finito  $\{Q_1^{(1)}, \dots, Q_{k_1}^{(1)}\}$ . Iterando, nel compatto  $\overline{A_n} \setminus A_{n-1}$  il ricoprimento  $\{Q(\mathbf{x}, \frac{1}{n+1})\}_{\mathbf{x} \in \overline{A_n} \setminus A_{n-1}}$  ha un sottoricoprimento finito  $\{Q_1^{(n)}, \dots, Q_{k_n}^{(n)}\}$ . La scelta dei lati dei cubi fa sì che tutti i cubi  $Q_j^{(n)}$  siano contenuti in  $A$ : pertanto

$$A = \overline{A_1} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (\overline{A_n} \setminus A_{n-1}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} Q_j^{(n)} \subseteq A$$

e pertanto  $A$  è l'unione dei cubi  $Q_j^{(n)}$ .  $\square$

Naturalmente, oltre agli aperti ed ai chiusi, la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}_N$  contiene molti altri insiemi: indicando con  $\mathcal{A}_N$  la famiglia degli aperti di  $\mathbb{R}^N$ , dovrà appartenere a  $\mathcal{M}_N$  tutto ciò che si ottiene da  $\mathcal{A}_N$  con unioni ed intersezioni numerabili. La *più piccola*  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{A}_N$  (esercizio 3.5.4) si indica con  $\mathcal{B}_N$  ed i suoi elementi si chiamano *boreliani*. Si dice che  $\mathcal{B}_N$  è la  $\sigma$ -algebra *generata* da  $\mathcal{A}_N$ . Vedremo in seguito che  $\mathcal{M}_N$  contiene propriamente  $\mathcal{B}_N$ .

### Esercizi 3.5

1. Si verifichi che l'insieme

$$\left\{ x \in \left] 0, \frac{1}{\pi} \right] : \sin \frac{1}{x} > 0 \right\}$$

è misurabile in  $\mathbb{R}$ ; se ne calcoli la misura esterna.

2. Sia  $E$  l'insieme dei numeri di  $[0, 1]$  che possiedono uno sviluppo decimale ove non compare mai la cifra 9. Si dimostri che  $E$  è misurabile in  $\mathbb{R}$  e se ne calcoli la misura esterna.
3. Per ogni  $x \in [0, 1]$  sia  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  la successione delle cifre decimali di  $x$  (scegliendo lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità). Si calcoli la misura esterna  $m_1^*$  dei seguenti insiemi:

- (a)  $E = \{x \in [0, 1] : \alpha_n \text{ è dispari per ogni } n \in \mathbb{N}^+\}$ ,
- (b)  $F = \{x \in [0, 1] : \alpha_n \text{ è definitivamente dispari}\}$ ,
- (c)  $G = \{x \in [0, 1] : \alpha_n \text{ è dispari per infiniti indici } n \in \mathbb{N}^+\}$ .

4. Sia  $X$  un insieme, e sia  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  un'arbitraria famiglia di  $\sigma$ -algebre di sottoinsiemi di  $X$ . Si provi che  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  è una  $\sigma$ -algebra. Se ne deduca che, data una famiglia qualunque  $\mathcal{G}$  di sottoinsiemi di  $X$ , esiste la *minima*  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{G}$  (essa si chiama la  $\sigma$ -algebra *generata* da  $\mathcal{G}$ ).
5. Sia  $f$  una funzione non negativa, integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ . Si provi che il sottografico di  $f$ , ossia l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

è misurabile secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}^2$ , con  $m_2^*(A) = \int_a^b f(x) dx$ . Si provi inoltre che il grafico di  $f$  è anch'esso misurabile in  $\mathbb{R}^2$  con misura esterna nulla.

6. (i) Si provi che ogni aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^N$  è approssimabile dall'interno con una successione crescente di pluri-parallelepipedi, ossia esiste una successione di pluri-parallelepipedi  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tale che  $P_n \subseteq P_{n+1}$  e  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = A$ .
- (ii) Si provi che ogni compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^N$  è approssimabile dall'esterno con una successione decrescente di pluri-parallelepipedi, ossia esiste una successione di pluri-parallelepipedi  $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tale che  $Q_n \supseteq Q_{n+1}$  e  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n = K$ .

## 3.6 Insieme di Cantor

Per rendersi conto di quanto la nozione di misurabilità secondo Lebesgue sia generale, e di quanto la misura esterna si discosti dall'idea intuitiva di "estensione" di un insieme, è utile considerare l'esempio che segue.

Sia  $\xi \in ]0, \frac{1}{3}]$ . Dall'intervallo  $[0, 1]$  togliamo i punti dell'intervallo aperto  $I_1^1$  di centro  $\frac{1}{2}$  e ampiezza  $\xi$ ; dai due intervalli chiusi rimasti togliamo i due intervalli aperti  $I_1^2, I_2^2$  che hanno come centri i punti medi e ampiezza  $\xi^2$ ; dai quattro intervalli chiusi residui togliamo i quattro intervalli aperti  $I_1^3, I_2^3, I_3^3, I_4^3$  con centri nei punti medi ed ampiezza  $\xi^3$ ; al passo  $k$ -simo toglieremo dai  $2^{k-1}$  intervalli chiusi residui le  $2^{k-1}$  parti centrali aperte di ampiezza  $\xi^k$ . Procedendo in questa maniera per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ , ciò che resta "alla fine" è l'insieme

$$C_\xi = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_j^k,$$

il quale è chiuso, quindi misurabile; la sua misura esterna è (proposizione 3.4.9)

$$m_1^*(C_\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \xi^k = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\xi)^k = \frac{1 - 3\xi}{1 - 2\xi}.$$

Si noti che  $C_\xi$  è privo di punti interni: infatti per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$  esso non può contenere intervalli di ampiezza superiore a  $2^{-k}$  (perché con il solo passo  $k$ -simo si lasciano  $2^k$  intervalli disgiunti di uguale ampiezza che non ricoprono  $[0, 1]$ : tale ampiezza quindi è minore di  $2^{-k}$ ). In particolare,  $C_\xi$  è totalmente sconnesso, cioè la componente connessa di ogni punto  $x \in C_\xi$  è  $\{x\}$ . Inoltre  $C_\xi$  è perfetto, ossia tutti i suoi punti sono punti

d'accumulazione per  $C_\xi$ : infatti se  $x \in C_\xi$  allora per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$  il punto  $x$  sta in uno dei  $2^k$  intervalli residui del passo  $k$ -simo, per cui gli estremi di tale intervallo sono punti di  $C_\xi$  che distano da  $x$  meno di  $2^{-k}$ .

Per  $\xi = 1/3$ , l'insieme  $C_{1/3}$  (che è quello effettivamente introdotto da Cantor) ha misura nulla. Esso si può costruire anche nel modo seguente: per ogni  $x \in [0, 1]$  consideriamo lo sviluppo ternario

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \quad \alpha_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Tale sviluppo non è sempre unico: ad esempio,  $\frac{1}{3}$  si scrive come  $0.0\bar{2}$  oppure come  $0.1$ . È facile verificare che  $C_{1/3}$  è costituito dai numeri  $x \in [0, 1]$  che ammettono uno sviluppo ternario in cui non compare mai la cifra 1. Così,  $\frac{1}{3} \in C_{1/3}$  mentre  $\frac{1}{2} = 0.\bar{1} \notin C_{1/3}$  (perché lo sviluppo di  $\frac{1}{2}$  è unico).

L'insieme  $C_{1/3}$ , pur avendo misura esterna nulla, è più che numerabile: se infatti si avesse  $C_{1/3} = \{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{3^k}, \quad \alpha_k^{(n)} \in \{0, 2\},$$

allora scegliendo

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \quad \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 2 \\ 2 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

avremmo  $y \in C_{1/3}$  ma  $y \neq x^{(n)}$  per ogni  $n$ , dato che la  $n$ -sima cifra ternaria di  $y$  è diversa da quella di  $x^{(n)}$  (per una stima della distanza  $|y - x^{(n)}|$  si veda l'esercizio 3.6.1). Ciò è assurdo.

Una versione  $N$ -dimensionale dell'insieme ternario di Cantor, che ne eredita le stesse proprietà, si ottiene togliendo dal cubo  $N$ -dimensionale  $[0, 1]^N$  il cubo centrale di lato  $\frac{1}{3}$ , poi togliendo dai  $3^N - 1$  cubi residui di lato  $\frac{1}{3}$  il cubo centrale di lato  $\frac{1}{9}$ , e iterando il procedimento. Si ottiene alla fine un chiuso di misura esterna  $m_N^*$  nulla.

### Esercizi 3.6

1. Con riferimento all'argomentazione che mostra la non numerabilità di  $C_{1/3}$ , si provi che  $|y - x^{(n)}| \geq 3^{-n}$ .
2. Si costruisca un insieme misurabile  $E \subset \mathbb{R}^N$ , tale che

$$0 < m_N^*(E) < \infty, \quad m_N^*(E \cap P) < v_N(P)$$

per ogni parallelepipedo aperto non vuoto  $P$ .

3. Si mostri che  $\mathcal{M}_N$  ha la stessa cardinalità di  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ .

## 3.7 Misura di Lebesgue

Definiamo la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ :

**Definizione 3.7.1** *La funzione di insieme*

$$m_N = m_N^*|_{\mathcal{M}_N} : \mathcal{M}_N \rightarrow [0, +\infty]$$

si chiama misura di Lebesgue.

Dalle proposizioni 3.3.2 e 3.4.9 segue che  $m_N$  è monotona, numerabilmente additiva ed invariante per traslazioni, con  $m_N(\emptyset) = 0$ .

Vediamo adesso come si comporta la misura di Lebesgue rispetto alle successioni monotone di insiemi misurabili.

**Proposizione 3.7.2** *Sia  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di insiemi misurabili.*

(i) *Se  $E_n \subseteq E_{n+1}$ , allora*

$$m_N \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_N(E_n).$$

(ii) *Se  $E_n \supseteq E_{n+1}$  e se esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $m_N(E_{n_0}) < \infty$ , allora*

$$m_N \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_N(E_n).$$

**Dimostrazione** (i) Poniamo

$$F_0 = E_0, \quad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha

$$E_p = \bigcup_{n=0}^p F_n \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

e gli  $F_n$  sono misurabili e disgiunti. Quindi, usando la numerabile additività di  $m_N$ ,

$$\begin{aligned} m_N \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) &= m_N \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(F_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p m_N(F_n) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} m_N \left( \bigcup_{n=0}^p F_n \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} m_N(E_p). \end{aligned}$$

(ii) Poniamo  $F_n = E_{n_0} \setminus E_n$  per ogni  $n > n_0$ . Allora gli  $F_n$  sono misurabili e  $F_n \subseteq F_{n+1}$ ; inoltre

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n = E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n.$$



Per (i) e per l'osservazione 3.4.6 abbiamo

$$\begin{aligned} m_N(E_{n_0}) - m_N\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) &= m_N\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_N(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [m_N(E_{n_0}) - m_N(E_n)] = m_N(E_{n_0}) - \lim_{n \rightarrow \infty} m_N(E_n). \end{aligned}$$

Ne segue la tesi poiché, ovviamente,

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n. \quad \square$$

Osserviamo che l'ipotesi che esista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $m_N(E_{n_0}) < \infty$  è essenziale nell'enunciato (ii): se ad esempio  $N = 1$  e  $E_n = [n, \infty[$ , si ha  $E_n \supset E_{n+1}$ ,  $m_1(E_n) = \infty$  per ogni  $n$ , ma l'intersezione degli  $E_n$ , essendo vuota, ha misura nulla.

**Osservazione 3.7.3** La misura di Lebesgue è l'unica misura su  $\mathcal{M}_N$  che sia invariante per traslazioni e valga 1 sul cubo  $[0, 1]^N$ . Infatti, sia  $\mu$  un'altra misura definita su una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{N}$  contenente i parallelepipedi di  $\mathbb{R}^N$ , che sia invariante per traslazioni e valga 1 sul cubo  $[0, 1]^N$ . Per finita additività, risulta  $\mu = m_N$  su tutti i parallelepipedi del tipo  $R = \prod_{i=1}^N [0, k_i]$ , con  $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ ; per finita additività e invarianza per traslazioni, risulta  $\mu = m_N$  su tutti i parallelepipedi del tipo  $R = \prod_{i=1}^N [0, 1/k_i]$ , con  $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}^+$ , e ancora per finita additività si ottiene  $\mu = m_N$  su tutti i parallelepipedi del tipo  $R = \prod_{i=1}^N [0, r_i]$  con  $r_1, \dots, r_N \in \mathbb{Q}^+$ . Poiché un parallelepipedo della forma  $R = \prod_{i=1}^N [0, d_i]$ , con  $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{R}^+$  è unione numerabile di parallelepipedi crescenti  $R_n = \prod_{i=1}^N [0, r_{i,n}]$  con  $r_{1,n}, \dots, r_{N,n} \in \mathbb{Q}^+$ , utilizzando la proposizione precedente si ottiene che  $\mu = m_N$  su tutti questi parallelepipedi. Infine, il generico parallelepipedo  $P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$  si esprime come traslazione  $P = \mathbf{a} + R$ , ove  $R = \prod_{i=1}^N [0, b_i - a_i]$ ; quindi si ha  $\mu(P) = m_N(P)$  per ogni parallelepipedo  $P$ . A questo punto, la misura esterna  $\mu^*$  generata da  $\mu$  coincide necessariamente con  $m_N^*$ : ne segue  $\mu = m_N$  su  $\mathcal{M}_N$ .

Diamo ora un'importante caratterizzazione degli insiemi misurabili: sono quegli insiemi  $E$  che differiscono poco, in termini di  $m_N^*$ , sia dagli aperti (contenenti  $E$ ), sia dai chiusi (contenuti in  $E$ ).

**Proposizione 3.7.4** *Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . Sono fatti equivalenti:*

- (i)  $E \in \mathcal{M}_N$ ;
- (ii) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un aperto  $A \supseteq E$  tale che  $m_N^*(A \setminus E) < \varepsilon$ ;
- (iii) esiste un boreliano  $B \supseteq E$  tale che  $m_N^*(B \setminus E) = 0$ ;
- (iv) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un chiuso  $C \subseteq E$  tale che  $m_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$ ;
- (v) esiste un boreliano  $D \subseteq E$  tale che  $m_N^*(E \setminus D) = 0$ .

**Dimostrazione** Proveremo le due catene di implicazioni

$$(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i), \quad (i) \implies (iv) \implies (v) \implies (i).$$

**(i)  $\implies$  (ii)** Supponiamo dapprima  $m_N(E) < \infty$ . Per definizione di  $m_N^*$ , fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento  $\{P_n\}$  di  $E$  fatto di parallelepipedi aperti, tale che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n) < m_N^*(E) + \varepsilon = m_N(E) + \varepsilon;$$

dunque, posto  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ , l'aperto  $A$  verifica, per subadditività numerabile,

$$m_N(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n) < m_N(E) + \varepsilon,$$

e dal fatto che  $m_N(E) < \infty$  segue allora (osservazione 3.4.6)

$$m_N(A \setminus E) = m_N(A) - m_N(E) < \varepsilon.$$

Sia ora  $m_N(E) = \infty$ . Scriviamo  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E \cap Q_n$ , ove  $\{Q_n\}$  è una famiglia di parallelepipedi privi di punti interni comuni, la cui unione sia  $\mathbb{R}^N$ . Dato che  $m_N(E \cap Q_n) < \infty$ , per quanto già dimostrato esistono degli aperti  $A_n \supseteq E \cap Q_n$  tali che

$$m(A_n \setminus (E \cap Q_n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'insieme  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  è un aperto contenente  $E$ , e poiché

$$A \setminus E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E \cap Q_k) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus (E \cap Q_n)),$$

si conclude che

$$m_N(A \setminus E) < \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(A_n \setminus (E \cap Q_n)) < \varepsilon.$$

**(ii)  $\implies$  (iii)** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $A_n$  un aperto contenente  $E$ , tale che

$$m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1};$$

l'insieme  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  è un boreliano contenente  $E$  e si ha, per monotonia,

$$m_N^*(B \setminus E) \leq m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè  $m_N^*(B \setminus E) = 0$ .

**(iii)  $\implies$  (i)** Scrivendo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ , la tesi segue dal fatto che l'insieme  $B$  è misurabile perché boreliano, mentre l'insieme  $B \setminus E$  è misurabile avendo, per ipotesi, misura esterna nulla (proposizione 3.4.3). Dunque  $E$  è misurabile.

**(i)  $\implies$  (iv)  $\implies$  (v)  $\implies$  (i)** Queste implicazioni si dimostrano facilmente applicando ad  $E^c$  gli enunciati già dimostrati.  $\square$

Le proprietà **(ii)  $\leftrightarrow$  (v)** della proposizione precedente si sintetizzano dicendo che la misura di Lebesgue è una misura *regolare*.

### Esercizi 3.7

1. Dimostrare che se  $E, F$  sono sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ , si ha

$$m_N(A \cup B) + m_N(A \cap B) = m_N(A) + m_N(B).$$

2. Si provi che per ogni successione  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  tale che  $E_n \subseteq E_{n+1}$  risulta

$$m_N^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_N^*(E_n).$$

[**Traccia:** una disuguaglianza è banale. Per l'altra, possiamo senz'altro supporre che  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_N^*(E_n) < \infty$ ; scelto un aperto  $A_n \supseteq E_n$  in modo che  $m_N(A_n) < m_N^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$ , sia  $F_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ ; si mostri per induzione che  $m_N(F_n) < m_N^*(E_n) + \varepsilon \sum_{k=0}^n 2^{-k-1}$ . Poiché  $m_N(F_n) \rightarrow m_N(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k)$ , se ne deduca che  $m_N^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m_N^*(E_n) + \varepsilon$ .]

3. Sia  $\{E_n\}$  una successione di insiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ . L'insieme  $E'$  degli  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  tali che  $\mathbf{x} \in E_n$  per infiniti valori di  $n$  si chiama *massimo limite* della successione  $\{E_n\}$  e si scrive  $E' = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ , mentre l'insieme  $E''$  degli  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  tali che  $\mathbf{x} \in E_n$  definitivamente si chiama *minimo limite* di  $\{E_n\}$  e si scrive  $E'' = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$ .

- (i) Si verifichi che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m.$$

- (ii) Si provi che

$$m_N \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_N(E_n),$$

e che se  $m_N(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n) < \infty$  allora

$$m_N \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} m_N(E_n).$$

- (iii) Si mostri che la seconda disuguaglianza è in generale falsa se  $m_N(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n) = \infty$ .

- (iv) Si verifichi che  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$  e si provi che se la successione  $\{E_n\}$  è monotona rispetto all'inclusione, allora  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ .

4. Provare che se  $E \in \mathcal{M}_N$  è un insieme di misura positiva, allora per ogni  $t \in [0, m_N(E)]$  esiste un insieme boreliano  $B_t \subseteq E$  tale che  $m_N(B_t) = t$ .
5. Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che esiste un boreliano  $B$ , intersezione numerabile di aperti, che contiene  $E$  ed è tale che  $m_N(B) = m_N^*(E)$ .

6. Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$  con  $m_N^*(E) < \infty$ . Si provi che  $E$  è misurabile secondo Lebesgue se e solo se

$$m_N^*(E) = \sup\{m_N(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq E\}.$$

Si mostri anche che se  $m_N^*(E) = \infty$  l'enunciato precedente è falso.

7. Sia  $N = 1$  e sia  $E \subset \mathbb{R}$  un insieme tale che  $m_1^*(E) < \infty$ . Si provi che  $E$  è misurabile secondo Lebesgue se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una famiglia finita di intervalli disgiunti  $I_1, \dots, I_p$  tali che

$$m_1^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^p I_i\right) < \varepsilon,$$

ove  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  è la *differenza simmetrica* fra gli insiemi  $A, B$ .

[**Traccia:** per la necessità, approssimare  $E$  con aperti dall'esterno e ricordare che ogni aperto è unione al più numerabile di intervalli disgiunti. Per la sufficienza: dapprima selezionare un aperto  $A \supseteq E$  tale che  $m_1(A) < m_1^*(E) + \varepsilon$ ; poi, posto  $F = A \cap (\bigcup_{i=1}^p I_i)$ , verificare che  $m_1^*(F \triangle E) < \varepsilon$ ; infine, utilizzando le inclusioni  $A \setminus E \subseteq (A \setminus F) \cup (F \setminus E)$  e  $E \subseteq F \cup (E \setminus F)$ , provare che  $m_1^*(A \setminus E) < 3\varepsilon$ .]

### 3.8 Un insieme non misurabile

La  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}_N$  degli insiemi Lebesgue misurabili è molto vasta, ma non esaurisce la classe di tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$ . Tuttavia, per esibire un insieme non misurabile non si può fare a meno del seguente

**Assioma della scelta** Per ogni insieme non vuoto  $X$  esiste una funzione di scelta  $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$  tale che  $f(E) \in E$  per ogni  $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ .

In altre parole, l'assioma della scelta dice che è possibile selezionare, per mezzo della funzione  $f$ , esattamente un elemento da ciascun sottoinsieme di  $X$ . La cosa sarebbe banale se  $X$  avesse cardinalità finita, e facile se  $X$  fosse numerabile (esercizio 3.8.6), ma per insiemi di cardinalità più alta questa proprietà non è altrimenti dimostrabile.

L'insieme che andiamo a costruire fu introdotto da Vitali. Sia  $N = 1$ . Consideriamo in  $[0, 1]$  la relazione di equivalenza

$$x \simeq y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi è un'infinità più che numerabile di classi di equivalenza, ognuna delle quali contiene un'infinità numerabile di elementi. Costruiamo un insieme  $V$  prendendo, grazie all'assioma della scelta, esattamente un elemento da ciascuna classe di equivalenza:  $V$  è un sottoinsieme più che numerabile di  $[0, 1]$ .

Sia ora  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una numerazione di  $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ , e sia  $V_n = V + q_n$ . Notiamo che  $V_n \cap V_m = \emptyset$  se  $n \neq m$ : infatti se  $x \in V_n \cap V_m$  allora  $x = a + q_n = b + q_m$  con  $a, b \in V$ ;

di qui segue  $a - b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$ , da cui (per come è stato costruito  $V$ )  $a = b$ . Ne deduciamo  $q_n = q_m$ , ed infine  $n = m$ . Notiamo anche che valgono le inclusioni

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \subseteq [-1, 2],$$

e quindi, per la monotonia di  $m_1^*$ ,

$$1 \leq m_1^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) \leq 3.$$

Se  $V$  fosse misurabile secondo Lebesgue, anche i suoi traslati  $V_n$  sarebbero misurabili ed avrebbero la stessa misura; per l'additività numerabile di  $m$  si ricaverebbe

$$m_1 \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1(V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m_1(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m_1(V) > 0, \end{cases}$$

e ciò contraddice il fatto che la misura di  $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$  è compresa fra 1 e 3. Pertanto  $V$  non può essere misurabile.

### Esercizi 3.8

1. Dimostrare che per ogni  $\lambda \in ]0, +\infty[$  esiste un sottoinsieme  $U \subset [0, \infty[$ , non misurabile secondo Lebesgue, tale che  $m_1^*(U) = \lambda$ .
2. Dato un insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}$  di misura positiva, si provi che esiste un sottoinsieme  $W \subset E$  che non è Lebesgue misurabile.
3. Sia  $V_n = V + q_n$ , come nella costruzione dell'insieme non misurabile di Vitali. Posto  $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m$ , si provi che

$$m_1^*(E_n) < \infty, \quad E_n \supset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_1^*(E_n) > m_1^* \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \right).$$

4. Siano  $V, W$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  non misurabili, disgiunti e tali che  $V \cup W$  sia misurabile. Si provi che se  $m_1(V \cup W) < \infty$  allora

$$m_1(V \cup W) < m_1^*(V) + m_1^*(W).$$

5. Si costruisca un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ ,  $N > 1$ , non misurabile secondo Lebesgue.
6. Dato un insieme numerabile  $X$ , si costruisca una funzione di scelta per  $X$ .

### 3.9 Funzioni misurabili

Ora che abbiamo costruito la misura di Lebesgue e conosciamo gli insiemi misurabili, sui quali potremo effettuare gli integrali, dobbiamo determinare la classe delle funzioni che potranno essere integrate, cioè per le quali l'integrale avrà senso. Considereremo funzioni  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , ove  $D$  è un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e  $\overline{\mathbb{R}}$  è la retta reale estesa, ossia  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ; ammetteremo dunque che le funzioni prendano i valori  $\pm\infty$ . In questo nuovo contesto sarà utile, nuovamente, fissare la convenzione

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0,$$

grazie alla quale potremo definire l'integrale senza ambiguità.

Cominciamo con la seguente proposizione, che introduce la proprietà caratteristica delle funzioni che ci interessano, e che riguarda gli insiemi di sopralivello e di sottolivello.

**Proposizione 3.9.1** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Per una qualunque funzione  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  i seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i)  $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\}$  è un insieme misurabile in  $\mathbb{R}^N$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$  è un insieme misurabile in  $\mathbb{R}^N$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < \alpha\}$  è un insieme misurabile in  $\mathbb{R}^N$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (iv)  $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$  è un insieme misurabile in  $\mathbb{R}^N$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Dimostrazione** (i)  $\implies$  (ii) Si ha per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha - 1/n\},$$

e quindi la tesi.

(ii)  $\implies$  (iii) Si ha per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < \alpha\} = D \setminus \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \geq \alpha\},$$

e quindi la tesi.

(iii)  $\implies$  (iv) Si ha per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < \alpha + 1/n\},$$

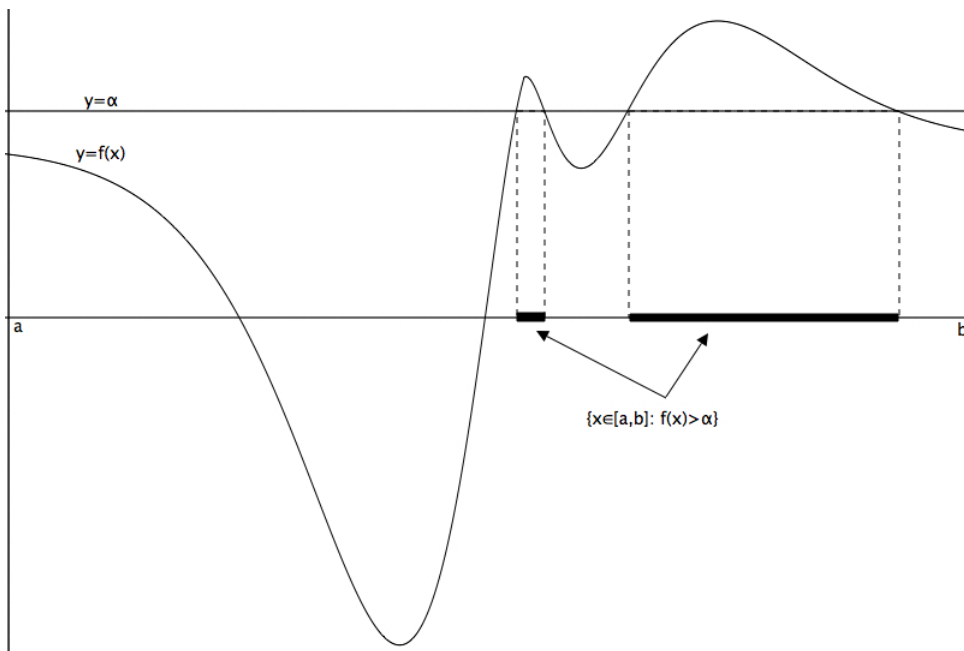
e quindi la tesi.

(iv)  $\implies$  (i) Si ha per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\} = D \setminus \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\},$$

e quindi la tesi.  $\square$

**Definizione 3.9.2** Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Diciamo che una funzione  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è misurabile (secondo Lebesgue) se vale una delle condizioni della proposizione precedente (e quindi valgono tutte).



**Esempi 3.9.3 (1)** Se  $E$  è un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , la *funzione caratteristica*, o *indicatrice*, di  $E$  è

$$I_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin E. \end{cases}$$

Questa funzione è misurabile perché per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\{\mathbf{x} \in D : I_E(\mathbf{x}) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1, \\ E & \text{se } 0 \leq \alpha < 1, \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

**(2)** Una *funzione semplice* in  $\mathbb{R}^N$  è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ , cioè è una funzione della forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{E_i}(\mathbf{x}),$$

dove  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sono numeri reali ed  $E_1, \dots, E_k$  sono sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ . Queste funzioni non si rappresentano in modo unico: ad esempio, se  $N = 1$ ,

$$I_{[0,2]}(x) = I_{[0,3]}(x) - I_{[2,3]}(x).$$

Però esse hanno una rappresentazione canonica: dato che assumono un numero finito di valori non nulli e distinti  $\beta_1, \dots, \beta_r$ , ponendo

$$A_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \varphi(\mathbf{x}) = \beta_j\}, \quad j = 1, \dots, r,$$

si può scrivere

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^r \beta_j I_{A_j}(\mathbf{x}),$$

ed in questo modo si ottiene la *forma canonica* della funzione semplice  $\varphi$ , che viene espressa come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi *disgiunti* e “massimali”, nel senso che ciascun  $A_j$  è il più grande insieme dove la  $\varphi$  assume il corrispondente valore  $\beta_j$ . Osserviamo che gli insiemi  $A_j$  sono misurabili, essendo ottenuti dagli  $E_i$  con un numero finito di unioni, intersezioni e differenze; quindi, supponendo (il che non è restrittivo) che sia  $\beta_1 < \dots < \beta_{q-1} < 0 < \beta_q < \dots < \beta_r$ , e posto per comodità

$$B = \{\mathbf{x} \in D : \varphi(\mathbf{x}) = 0\} = \left( \bigcup_{j=1}^r A_j \right)^c,$$

si ha

$$\{\mathbf{x} \in D : \varphi(\mathbf{x}) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \beta_r \\ \bigcup_{j=i}^r A_j & \text{se } \beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i, \quad q < i \leq r \\ \bigcup_{j=q}^r A_j & \text{se } 0 \leq \alpha < \beta_q \\ \bigcup_{j=q}^r A_j \cup B & \text{se } \beta_{q-1} \leq \alpha < 0 \\ \bigcup_{j=i}^r A_j \cup B & \text{se } \beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i, \quad 1 < i < q \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < \beta_1. \end{cases}$$

Ne segue che  $\varphi$  è misurabile.

**(3)** Le funzioni continue sono misurabili. Infatti in tal caso per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\}$  è un aperto, e dunque è misurabile.

**(4)** Se  $N = 1$ , le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  monotone sono misurabili: infatti per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$  è una semiretta e quindi è misurabile.

**Osservazione 3.9.4** Se  $D \subset \mathbb{R}^N$  è misurabile e  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una funzione misurabile, possiamo sempre estendere  $f$  a tutto  $\mathbb{R}^N$  ponendo

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in D, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin D; \end{cases}$$

l'estensione  $\bar{f}$  è ancora misurabile, in quanto per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\{\mathbf{x} \in D : \bar{f}(\mathbf{x}) > \alpha\} = \begin{cases} \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0, \\ \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\} \cup D^c & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Questo ci permette di lavorare esclusivamente con funzioni misurabili definite su tutto  $\mathbb{R}^N$ , rimpiazzando  $f$ , quando occorre, con  $\bar{f}$ .



## Proprietà delle funzioni misurabili

La classe delle funzioni misurabili è estremamente ampia: in effetti (esercizio 3.9.1), esibire una funzione non misurabile è equivalente a fornire un esempio di un insieme non misurabile, compito non banale, come abbiamo visto nel paragrafo precedente. Inoltre tale classe è stabile rispetto alle operazioni algebriche ed a quelle di passaggio al limite, come andremo a verificare. Utilizzeremo d'ora in avanti, per semplicità, la notazione più comoda  $\{f > \alpha\}$  per denotare l'insieme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) > \alpha\}$ .

**Proposizione 3.9.5** *Siano  $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funzioni misurabili. Se  $f$  e  $-g$  non valgono mai simultaneamente né  $+\infty$  né  $-\infty$ , allora la somma  $f + g$  è una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ .*

**Dimostrazione** Fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\{f + g > \alpha\} = \{f = +\infty\} \cup \{g = +\infty\} \cup \{\alpha < f + g < +\infty\} :$$

i primi due insiemi sono misurabili in virtù dell'esercizio 3.9.2; quindi basta dimostrare che il terzo insieme è misurabile. Ed infatti si può scrivere

$$\begin{aligned} \{\alpha < f + g < +\infty\} &= \{-\infty < \alpha - g < f < +\infty\} = \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{\alpha - r < g < +\infty\} \cap \{r < f < +\infty\}], \end{aligned}$$

e gli insiemi dell'ultimo membro sono misurabili, poiché

$$\{\alpha - r < g < +\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\{g < n\} \cap \{g > \alpha - r\}],$$

ed analogamente

$$\{r < f < +\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\{f < n\} \cap \{f > r\}].$$

Ne segue che  $f + g$  è misurabile.  $\square$

Il risultato che segue riguarda la misurabilità del prodotto  $f \cdot g$ . Ricordiamo che esso è sempre ben definito in virtù della convenzione  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ .

**Proposizione 3.9.6** *Siano  $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funzioni misurabili. Allora il prodotto  $f \cdot g$  è una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ .*

**Dimostrazione** Notiamo, per cominciare, che se  $f$  è misurabile allora, ovviamente, anche  $-f$  lo è, essendo  $\{-f > \alpha\} = \{f < -\alpha\}$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ciò premesso, supponiamo dapprima  $f$  e  $g$  non negative. Allora si ha

$$\{fg > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0, \\ \{f > 0\} \cap \{g > 0\} & \text{se } \alpha = 0, \\ \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} [\{f > r\} \cap \{g > \alpha/r\}] & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Ne segue che  $fg$  è misurabile quando  $f$  e  $g$  sono non negative.  
 Nel caso generale, poniamo

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\},$$

ed osserviamo che tali funzioni sono non negative e misurabili, dato che

$$\{f^+ > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0, \\ \{f > \alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0, \end{cases} \quad \{f^- > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0, \\ \{f < -\alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0; \end{cases}$$

inoltre si ha  $f = f^+ - f^-$ . Analoga decomposizione si può fare per  $g = g^+ - g^-$ . Ma allora  $fg$  si può scrivere come

$$fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ + f^-g^- + (-f^+g^-) + (-f^-g^+),$$

e quindi è misurabile per quanto già dimostrato e per la proposizione 3.9.5.  $\square$

Considereremo adesso *successioni* di funzioni misurabili definite su  $\mathbb{R}^N$ .

**Proposizione 3.9.7** *Se  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^N$ , allora le funzioni  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  sono misurabili.*

**Dimostrazione** Infatti per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n < \alpha \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n < \alpha\}, \quad \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n > \alpha \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > \alpha\},$$

il che prova la misurabilità di  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  e  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ; per le altre due basta osservare che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \inf_{m \geq n} f_m \right), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left( \sup_{m \geq n} f_m \right),$$

ed applicare quanto già dimostrato.  $\square$

**Corollario 3.9.8** *Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili che converge puntualmente ad una funzione  $f$  in  $\mathbb{R}^N$ . Allora  $f$  è misurabile.*

**Dimostrazione** Basta osservare che  $f = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  ed applicare la proposizione 3.9.7.  $\square$

Il corollario precedente individua una proprietà che in effetti *caratterizza* la misurabilità. Si ha infatti:

**Proposizione 3.9.9** *Sia  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione qualunque. Essa è misurabile su  $\mathbb{R}^N$  se e solo se esiste una successione  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di funzioni semplici, che converge puntualmente a  $f$  in  $\mathbb{R}^N$ .*

**Dimostrazione** ( $\Leftarrow$ ) Segue dal corollario 3.9.8.

( $\Rightarrow$ ) Costruiamo le  $\varphi_n$  nel modo seguente:

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} n & \text{se } f(\mathbf{x}) > n, \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \dots, n 2^n, \\ 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) = 0, \\ \frac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq f(\mathbf{x}) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 0, -1, \dots, -n 2^n + 1, \\ -n & \text{se } f(\mathbf{x}) < -n. \end{cases}$$

Le  $\varphi_n$  sono funzioni semplici, in quanto

$$\varphi_n = nI_{\{f>n\}} + \sum_{k=1}^{n 2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\{\frac{k-1}{2^n} < f \leq \frac{k}{2^n}\}} + \sum_{k=-n 2^n + 1}^0 \frac{k}{2^n} I_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} - nI_{\{f < -n\}},$$

e tutti gli insiemi coinvolti sono misurabili. Proviamo che  $\varphi_n \rightarrow f$  puntualmente in  $\mathbb{R}^N$ : se  $\mathbf{x}$  è tale che  $f(\mathbf{x}) = \pm\infty$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $\varphi_n(\mathbf{x}) = \pm n$ , quindi  $\varphi_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ ; se invece  $|f(\mathbf{x})| < \infty$ , allora, per costruzione, per ogni  $n > |f(\mathbf{x})|$  si ha  $|f(\mathbf{x}) - \varphi_n(\mathbf{x})| < \frac{1}{2^n}$  e dunque, nuovamente,  $\varphi_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ . Ciò prova la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.9.10** Le funzioni  $\varphi_n$  costruite nella dimostrazione precedente sono, per costruzione, *dominate* da  $f$ , ossia verificano

$$|\varphi_n(\mathbf{x})| \leq |\varphi_{n+1}(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Questa proprietà verrà usata nel seguito. Si noti inoltre che se  $f$  è limitata, allora la convergenza delle  $\varphi_n$  verso  $f$  è uniforme: infatti risulta

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \frac{1}{2^n} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n > \sup_{\mathbb{R}^N} |f|.$$

Infine notiamo che si può supporre, rimpiazzando  $\varphi_n$  con  $\varphi_n I_{B_n}$ , ove  $B_n$  è la palla di  $\mathbb{R}^N$  di centro  $\mathbf{0}$  e raggio  $n$ , che la successione  $\{\varphi_n\}$  sia costituita da funzioni nulle fuori da un compatto (che naturalmente varia da funzione a funzione); naturalmente con questa scelta si perde in generale la proprietà della convergenza uniforme.

### Esercizi 3.9

1. Si verifichi che una funzione indicatrice  $I_E$  è misurabile se e solo se  $E$  è un insieme misurabile.
2. Se  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una funzione misurabile, si provi che l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = \pm\infty\}$$

è misurabile.

3. Se  $f, g$  sono funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^N$ , si provi che l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\}$$

è misurabile.

4. Sia  $f$  una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ . Se  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è un'altra funzione, tale che l'insieme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$  sia misurabile con misura nulla, si provi che  $g$  è misurabile.

5. Se  $f$  è una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ , si provi che per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = \alpha\}$$

è misurabile. È vero il viceversa?

6. Sia  $f$  misurabile su  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che per ogni aperto  $A \subseteq \mathbb{R}$  l'insieme  $f^{-1}(A)$  è misurabile.

7. Sia  $b$  un intero maggiore di 1. Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si consideri lo sviluppo di  $x$  in base  $b$ :

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{b^n}$$

ove  $\varepsilon_n(x) \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Si osservi che tale sviluppo non è unico per certi valori di  $x$ , ma si provi che, qualunque sia lo sviluppo scelto nei casi di ambiguità, le funzioni  $\varepsilon_n$  sono tutte misurabili su  $\mathbb{R}$ .

8. Se  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione misurabile (a valori reali) e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, si provi che la composizione  $g \circ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione misurabile.

**Traccia:** si osservi che  $\{t \in \mathbb{R} : g(t) > \alpha\}$  è un aperto e si utilizzi l'esercizio 3.9.6.]

9. Si provi che se  $f$  è una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ , allora anche  $|f|$  è misurabile. È vero il viceversa?

10. Si provi che una funzione  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è misurabile se e solo se  $f^2$  è misurabile e se l'insieme  $\{f > 0\}$  è misurabile.

11. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Si provi che  $f'$  è una funzione misurabile su  $\mathbb{R}$ . Se ne deduca che, se  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile, le sue derivate parziali sono funzioni misurabili.

12. Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che l'insieme

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) \right\}$$

è misurabile.

### 3.10 L'integrale di Lebesgue

Ora che abbiamo identificato la classe delle funzioni misurabili, vogliamo costruire l'integrale per queste funzioni. Il primo passo consiste nel definire l'integrale per le funzioni semplici (esempio 3.9.3 (2)).

Cominciamo considerando l'importante sottofamiglia  $\mathcal{S}_0$  delle funzioni semplici che sono nulle fuori da un insieme di misura finita.

**Definizione 3.10.1** Sia  $\varphi \in \mathcal{S}_0$ , e supponiamo che la sua forma canonica sia

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i},$$

con gli  $\alpha_i$  numeri reali non nulli e  $A_i = \{\varphi = \alpha_i\}$  insiemi misurabili di misura finita. L'integrale di  $\varphi$  su  $\mathbb{R}^N$  è il numero reale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_N(A_i).$$

Si verifica facilmente che questa definizione è indipendente dal modo con cui si rappresenta la  $\varphi$  mediante insiemi misurabili *disgiunti* (esercizio 3.10.2).

Elenchiamo le principali proprietà di cui gode l'integrale di funzioni di  $\mathcal{S}_0$ .

**Proposizione 3.10.2** Siano  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ . Valgono le seguenti proprietà:

- (i) (monotonia) se  $\varphi \leq \psi$ , allora  $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \psi \, d\mathbf{x}$ ;
- (ii) (linearità) si ha  $\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha\varphi + \beta\psi) \, d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} + \beta \int_{\mathbb{R}^N} \psi \, d\mathbf{x}$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Si noti che, come facile conseguenza di (i) e (ii), si ha la relazione

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_0.$$

**Dimostrazione** (i) Consideriamo le rappresentazioni canoniche di  $\varphi$  e  $\psi$ :

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^h \beta_j I_{B_j}.$$

Ponendo  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  e

$$A_0 = \left[ \bigcup_{i=1}^k A_i \right]^c, \quad B_0 = \left[ \bigcup_{j=1}^h B_j \right]^c,$$

si può scrivere  $\varphi = \sum_{i=0}^k \alpha_i I_{A_i}$  e  $\psi = \sum_{j=0}^h \beta_j I_{B_j}$ . Essendo  $\varphi \leq \psi$ , si riconosce subito che, fissati  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  e  $j \in \{0, 1, \dots, h\}$ , se  $A_i \cap B_j$  non è vuoto allora  $\alpha_i \leq \beta_j$ , in quanto per  $\mathbf{x} \in A_i \cap B_j$  si ha  $\alpha_i = \varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) = \beta_j$ . Quindi, scrivendo

$$\varphi = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \alpha_i I_{A_i \cap B_j}, \quad \psi = \sum_{j=0}^h \sum_{i=0}^k \beta_j I_{A_i \cap B_j},$$

otteniamo rappresentazioni di  $\varphi$  e  $\psi$  mediante insiemi disgiunti: pertanto, in virtù dell'esercizio 3.10.2, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \alpha_i m_N(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \beta_j m_N(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi \, d\mathbf{x}.$$

(ii) Rappresentando  $\varphi$  e  $\psi$  come in (i), si ha

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h (\alpha\alpha_i + \beta\beta_j) I_{A_i \cap B_j};$$

la tesi segue allora dalla definizione di integrale.  $\square$

## Integrale di funzioni misurabili

Estenderemo adesso l'integrale ad una vasta sottoclasse delle funzioni misurabili; il risultato dell'operazione di integrazione potrà anche fornire i valori  $\pm\infty$ .

**Definizione 3.10.3** Sia  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione misurabile.

(i) Se  $f \geq 0$ , l'integrale di  $f$  su  $\mathbb{R}^N$  è la quantità (eventualmente infinita)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mathbf{x} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} : \varphi \in \mathcal{S}_0, 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

(ii) Se  $f$  assume valori negativi, posto  $f^+ = \max\{f, 0\}$  e  $f^- = -\min\{f, 0\}$ , diciamo che  $f$  è integrabile su  $\mathbb{R}^N$  se almeno uno fra gli integrali  $\int_{\mathbb{R}^N} f^+ \, d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^N} f^- \, d\mathbf{x}$  è finito; in tal caso, l'integrale di  $f$  su  $\mathbb{R}^N$  è la quantità (eventualmente uguale a  $\pm\infty$ )

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^N} f^- \, d\mathbf{x}.$$

(iii) Se l'integrale  $\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mathbf{x}$  è finito, diciamo che  $f$  è sommabile su  $\mathbb{R}^N$ .

(iv) Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Diciamo che  $f$  è integrabile su  $D$  se la funzione  $fI_D$  è integrabile su  $\mathbb{R}^N$ ; in tal caso si definisce

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} fI_D \, d\mathbf{x},$$

e diciamo che  $f$  è sommabile su  $D$  se tale integrale è finito.

Abbiamo così ottenuto un numero,  $\int_D f \, d\mathbf{x}$ , che dipende da  $D$  e da  $f$ . Analizziamo separatamente le due dipendenze.

**Proposizione 3.10.4** Sia  $f$  una funzione integrabile definita su un insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Se  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di insiemi misurabili e disgiunti, tale che  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = D$ , allora si ha

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f \, d\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione** Come già osservato, possiamo supporre che  $f$  sia definita su tutto  $\mathbb{R}^N$ . Se  $f = I_E$ , con  $E$  insieme misurabile, la tesi segue dalla numerabile additività della misura di Lebesgue, in quanto

$$\begin{aligned} \int_D I_E d\mathbf{x} &= m_N(E \cap D) = m_N\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap D_n)\right) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(E \cap D_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} I_E I_{D_n} d\mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} I_E d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Se  $f$  è un elemento di  $\mathcal{S}_0$ ,  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i}$ , si ha per linearità

$$\begin{aligned} \int_D f d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i m_N(A_i \cap D) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(A_i \cap D_n) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \alpha_i m_N(A_i \cap D_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Sia ora  $f$  misurabile e non negativa. Se  $f$  è anche sommabile, fissato  $\varepsilon > 0$ , dalla definizione 3.10.3 segue che esiste  $\varphi \in \mathcal{S}_0$  tale che

$$0 \leq \varphi \leq f I_D, \quad \int_D \varphi d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mathbf{x} > \int_D f d\mathbf{x} - \varepsilon.$$

Ne segue, essendo  $0 \leq \varphi I_{D_n} \leq f I_{D_n}$  ed utilizzando quanto già provato,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f d\mathbf{x} \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} \varphi d\mathbf{x} = \int_D \varphi d\mathbf{x} > \int_D f d\mathbf{x} - \varepsilon.$$

Dunque, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , vale la disuguaglianza  $\leq$ :

$$\int_D f d\mathbf{x} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f d\mathbf{x}.$$

Se invece  $f$  non è sommabile, per ogni  $M > 0$  esiste  $\varphi \in \mathcal{S}_0$  tale che

$$0 \leq \varphi \leq f I_D, \quad \int_D \varphi d\mathbf{x} > M,$$

e per l'arbitrarietà di  $M$  si ottiene analogamente la disuguaglianza  $\leq$ , che in questo caso dà direttamente l'uguaglianza  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f d\mathbf{x} = +\infty = \int_D f d\mathbf{x}$ .

Proviamo, sempre per  $f \geq 0$ , la disuguaglianza  $\geq$ , in cui si può chiaramente supporre  $f$  sommabile. Fissato  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $\varphi_n \in \mathcal{S}_0$  tale che

$$0 \leq \varphi_n \leq f I_{D_n}, \quad \int_{D_n} \varphi_n d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n d\mathbf{x} > \int_{D_n} f d\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Posto  $\psi_m = \sum_{n=0}^m \varphi_n$ , si ha ancora  $\psi_m \in \mathcal{S}_0$  ed inoltre  $0 \leq \psi_m \leq fI_D$ ; quindi, utilizzando la linearità dell'integrale su  $\mathcal{S}_0$  (proposizione 3.10.2),

$$\sum_{n=0}^m \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_m d\mathbf{x} \leq \int_D f d\mathbf{x}.$$

Ne segue, a maggior ragione,

$$\sum_{n=0}^m \left[ \int_{D_n} f d\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right] \leq \int_D f d\mathbf{x},$$

e per  $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f d\mathbf{x} - \varepsilon \leq \int_D f d\mathbf{x}.$$

L'arbitrarietà di  $\varepsilon$  porta alla disuguaglianza  $\geq$ .

Infine, se  $f$  è una funzione misurabile di segno variabile, basta fare la sottrazione fra le due uguaglianze

$$\int_D f^+ d\mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f^+ d\mathbf{x}, \quad \int_D f^- d\mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f^- d\mathbf{x},$$

almeno una delle quali coinvolge certamente quantità finite.  $\square$

**Corollario 3.10.5** *Sia  $f$  una funzione integrabile non negativa, definita su un insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Se  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di insiemi misurabili, tale che  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = D$ , allora si ha*

$$\int_D f d\mathbf{x} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f d\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione** Se i  $D_n$  sono disgiunti, la tesi segue dalla proposizione 3.10.4. Altrimenti, poniamo

$$E_0 = D_0, \quad E_n = D_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Chiaramente gli  $E_n$  sono misurabili e disgiunti, e si ha ancora  $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = D$ . Per la proposizione 3.10.4, essendo  $f \geq 0$ , possiamo scrivere

$$\int_D f d\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f d\mathbf{x} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} f d\mathbf{x},$$

che è la tesi.  $\square$



**Corollario 3.10.6** Sia  $f$  una funzione integrabile non negativa, definita su un insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Se  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di insiemi misurabili, tale che  $D_n \subseteq D_{n+1}$  e  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = D$ , allora si ha

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f \, d\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione** Posto  $E_0 = D_0$  e  $E_{n+1} = D_{n+1} \setminus D_n$ , gli  $E_n$  sono misurabili e disgiunti, con  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = D$ . La proposizione 3.10.4 ci dice allora che

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mathbf{x}.$$

D'altra parte, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\int_{E_{n+1}} f \, d\mathbf{x} = \int_{D_{n+1}} f \, d\mathbf{x} - \int_{D_n} f \, d\mathbf{x},$$

e quindi

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \int_{D_0} f \, d\mathbf{x} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[ \int_{D_n} f \, d\mathbf{x} - \int_{D_{n-1}} f \, d\mathbf{x} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{D_N} f \, d\mathbf{x}. \quad \square$$

Prima di esaminare come l'integrale dipende dall'integrando  $f$ , conviene fare una considerazione di carattere generale.

**Osservazione 3.10.7** Gli insiemi di misura nulla, altrimenti detti insiemi *trascurabili*, giocano nella teoria di Lebesgue un ruolo particolarmente importante. Anzitutto, sappiamo che se  $C$  è misurabile con  $m_N(C) = 0$  allora ogni sottoinsieme di  $C$  è a sua volta misurabile con misura nulla (proposizione 3.4.3). Poi, se  $f$  è integrabile su  $D$  e  $C \subseteq D$  ha misura nulla, allora si ha  $\int_C f \, d\mathbf{x} = 0$ , come facile conseguenza della definizione di integrale (definizione 3.10.3). Più in generale, se  $g$  è un'altra funzione definita su  $D$  tale che  $m_N(\{f \neq g\}) = 0$ , allora anche  $g$  è misurabile (esercizio 3.9.4) e si ha  $\int_E f \, d\mathbf{x} = \int_E g \, d\mathbf{x}$  per ogni sottoinsieme misurabile  $E \subseteq D$ : infatti,  $\{f \neq g\}$  risulta misurabile con misura nulla, da cui

$$\int_E g \, d\mathbf{x} = \int_{E \setminus \{f \neq g\}} g \, d\mathbf{x} + \int_{E \cap \{f \neq g\}} g \, d\mathbf{x} = \int_{E \setminus \{f \neq g\}} f \, d\mathbf{x} + 0 = \int_E f \, d\mathbf{x}.$$

Più importante ancora, come vedremo più avanti, è il ruolo degli insiemi di misura nulla nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue: si vedano a questo proposito la definizione 3.12.1 e gli esempi 3.12.2.

Una basilare conseguenza dell'osservazione precedente è il fatto che se una funzione  $f$  è sommabile su un insieme misurabile  $D$ , allora, modificandola sull'insieme dove essa vale  $\pm\infty$ , che per l'esercizio 3.10.4 è un insieme di misura nulla, possiamo sempre supporre che  $f$  assuma solo valori finiti, senza alterare il valore dell'integrale  $\int_D f \, dx$ .

**Proposizione 3.10.8** Siano  $f, g$  funzioni integrabili definite sull'insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Valgono i seguenti fatti:

- (i) (monotonia) se  $f \leq g$ , allora  $\int_D f \, d\mathbf{x} \leq \int_D g \, d\mathbf{x}$ ;
- (ii) (omogeneità) se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora  $\int_D \alpha f \, d\mathbf{x} = \alpha \int_D f \, d\mathbf{x}$ ;
- (iii) (additività) se non risulta né  $\int_D f \, d\mathbf{x} = -\int_D g \, d\mathbf{x} = +\infty$ , né  $\int_D f \, d\mathbf{x} = -\int_D g \, d\mathbf{x} = -\infty$ , allora si ha

$$\int_D (f + g) \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x} + \int_D g \, d\mathbf{x}.$$

Notiamo che l'integrale  $\int_D (f + g) \, d\mathbf{x}$  ha sempre senso, anche se in effetti  $f + g$  non è definita nell'insieme

$$M = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}) = \pm\infty\}.$$

Infatti l'insieme  $M$ , per le ipotesi fatte, ha misura nulla: dunque, per l'osservazione 3.10.7, possiamo ridefinire  $f = g = 0$  su  $M$ , senza alterare i due integrali  $\int_D f \, d\mathbf{x}$  e  $\int_D g \, d\mathbf{x}$ , e pertanto, nelle nostre ipotesi, l'integrale  $\int_D (f + g) \, d\mathbf{x}$  coincide con  $\int_{D \setminus M} (f + g) \, d\mathbf{x}$ .

**Dimostrazione (i)** Se si ha  $0 \leq f \leq g$ , la tesi è facile conseguenza della definizione 3.10.3.

Nel caso generale, si osservi che se  $f \leq g$  allora  $f^+ \leq g^+$  e  $f^- \geq g^-$ ; quindi

$$\int_D f^+ \, d\mathbf{x} \leq \int_D g^+ \, d\mathbf{x}, \quad \int_D f^- \, d\mathbf{x} \geq \int_D g^- \, d\mathbf{x},$$

e la tesi segue per sottrazione.

(ii) Sia  $\alpha \geq 0$ . Se  $f \geq 0$ , la tesi segue dalla definizione 3.10.3; altrimenti, essendo  $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$  e  $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ , si deduce la tesi anche per le  $f$  non sempre positive. Sia ora  $\alpha = -1$ : da  $(-f)^+ = f^-$  e  $(-f)^- = f^+$  segue che

$$\int_D (-f) \, d\mathbf{x} = \int_D f^- \, d\mathbf{x} - \int_D f^+ \, d\mathbf{x} = - \int_D f \, d\mathbf{x}.$$

Infine, se  $\alpha < 0$  basta combinare i due casi precedenti.

(iii) Distinguiamo quattro casi.

**I:**  $f, g \geq 0$ .

In questo caso la funzione  $f + g$  è sicuramente integrabile. Siano  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$  con  $0 \leq \varphi \leq f I_D$  e  $0 \leq \psi \leq g I_D$ ; allora  $0 \leq \varphi + \psi \leq (f + g) I_D$  e dunque

$$\int_D \varphi \, d\mathbf{x} + \int_D \psi \, d\mathbf{x} = \int_D (\varphi + \psi) \, d\mathbf{x} \leq \int_D (f + g) \, d\mathbf{x}.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varphi$  e  $\psi$  si ottiene

$$\int_D f \, d\mathbf{x} + \int_D g \, d\mathbf{x} \leq \int_D (f + g) \, d\mathbf{x}.$$

La disuguaglianza opposta è meno semplice. Sia  $\eta \in \mathcal{S}_0$  tale che  $0 \leq \eta \leq (f + g)I_D$  e sia  $\beta \in [0, 1[$ ; allora a maggior ragione  $0 \leq \beta\eta \leq (f + g)I_D$  e più precisamente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \beta\eta(x) < [f(x) + g(x)]I_D(x) && \text{se } f(x) + g(x) > 0 \\ 0 &= \beta\eta(x) = [f(x) + g(x)]I_D(x) && \text{se } f(x) + g(x) = 0. \end{aligned}$$

Siano ora  $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$  due successioni di funzioni semplici non negative che convergono crescendo a  $fI_D$  e  $gI_D$  rispettivamente; grazie alle due relazioni sopra scritte si ha definitivamente, per ogni  $x \in D$ ,

$$0 \leq \beta\eta(x) \leq \varphi_n(x) + \psi_n(x) \leq [f(x) + g(x)]I_D(x).$$

Ciò significa che, posto

$$A_n = \{x \in D : \beta\eta(x) \leq \varphi_n(x) + \psi_n(x)\},$$

risulta

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = D.$$

Pertanto, essendo per monotonia

$$\beta \int_{A_n} \eta \, dx \leq \int_{A_n} \beta\eta \, dx \leq \int_{A_n} (\varphi_n + \psi_n) \, dx = \int_{A_n} \varphi_n \, dx + \int_{A_n} \psi_n \, dx \leq \int_D f \, dx + \int_D g \, dx,$$

al limite per  $n \rightarrow \infty$  si trova, grazie al corollario 3.10.6,

$$\beta \int_D \eta \, dx \leq \int_D f \, dx + \int_D g \, dx.$$

Per  $\beta \rightarrow 1^-$  si ricava

$$\int_D \eta \, dx \leq \int_D f \, dx + \int_D g \, dx,$$

e infine, passando all'estremo superiore rispetto a  $\eta$ , otteniamo finalmente

$$\int_D (f + g) \, dx \leq \int_D f \, dx + \int_D g \, dx.$$

**II:**  $f, g \leq 0$ .

In questo caso basta applicare il risultato di I a  $-f$  e  $-g$ , e poi usare l'omogeneità.

**III:**  $f \geq 0, g \leq 0$ .

In questo caso non sappiamo a priori se  $f + g$  sia integrabile. Definiamo gli insiemi misurabili seguenti:

$$S^+ = \{(f + g)I_D \geq 0\}, \quad S^- = \{(f + g)I_D < 0\};$$

gli integrali di  $f + g$  su tali insiemi hanno certamente senso. Per quanto già dimostrato possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_{S^+} f \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^N} f I_{S^+} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} [(f + g)I_{S^+} + (-g)I_{S^+}] \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (f + g)I_{S^+} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^N} (-g)I_{S^+} \, d\mathbf{x} = \int_{S^+} (f + g) \, d\mathbf{x} - \int_{S^+} g \, d\mathbf{x},\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\int_{S^-} g \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^N} g I_{S^-} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} [(g + f)I_{S^-} + (-f)I_{S^-}] \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (g + f)I_{S^-} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^N} (-f)I_{S^-} \, d\mathbf{x} = \int_{S^-} (g + f) \, d\mathbf{x} - \int_{S^-} f \, d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Ora notiamo che, per ipotesi, non si ha  $\int_D f \, d\mathbf{x} = -\int_D g \, d\mathbf{x} = +\infty$ , e dunque uno almeno fra gli integrali  $\int_{S^+} f \, d\mathbf{x}$  e  $\int_{S^+} g \, d\mathbf{x}$  è finito: se ne deduce

$$\int_{S^+} f \, d\mathbf{x} + \int_{S^+} g \, d\mathbf{x} = \int_{S^+} (f + g) \, d\mathbf{x} = \int_D (f + g)^+ \, d\mathbf{x},$$

e per analogo motivo

$$\int_{S^-} f \, d\mathbf{x} + \int_{S^-} g \, d\mathbf{x} = \int_{S^-} (f + g) \, d\mathbf{x} = -\int_D (f + g)^- \, d\mathbf{x};$$

per somma si ha allora la tesi.

**IV:**  $f$  e  $g$  di segno qualunque.

Poniamo

$$F^+ = \{f I_D \geq 0\}, \quad F^- = \{f I_D \leq 0\}, \quad G^+ = \{g I_D \geq 0\}, \quad G^- = \{g I_D \leq 0\} :$$

allora  $F^+ \cap G^+$ ,  $F^+ \cap G^-$ ,  $F^- \cap G^+$  e  $F^- \cap G^-$  sono insiemi misurabili disgiunti, la cui unione è  $D$ , e su ciascuno di essi la tesi è vera in virtù di uno dei tre passi precedenti. Sommando le quattro uguaglianze (delle quali al più due sono tra quantità infinite, ma dello stesso segno) si ottiene la tesi per  $D$ .  $\square$

### Esercizi 3.10

1. Si verifichi che se  $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$  allora

$$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B, \quad I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B, \quad I_{A \setminus B} = I_A - I_A I_B.$$

2. Si verifichi che se  $\varphi \in \mathcal{S}_0$  e se risulta

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i} = \sum_{j=1}^h \beta_j I_{B_j},$$

con  $A_i$  e  $B_j$  insiemi misurabili disgiunti di misura finita, allora si ha

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i m_N(A_i) = \sum_{j=1}^h \beta_j m_N(B_j).$$

3. Siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  numeri reali distinti, e siano  $E_1, \dots, E_n$  sottoinsiemi arbitrari di  $\mathbb{R}^N$ , fra loro disgiunti. Si provi che la funzione  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{E_i}$  è misurabile su  $\mathbb{R}^N$  se e solo se gli insiemi  $E_i$  sono tutti misurabili.
4. Sia  $D$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$  di misura nulla. Provare che per ogni funzione misurabile  $f$  si ha  $\int_D f d\mathbf{x} = 0$ .
5. Si considerino le funzioni  $\{\varepsilon_n\}$  dell'esercizio 3.9.7. Si calcoli, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , l'integrale  $\int_{[0,1]} \varepsilon_n dx$ .
6. Si calcoli l'integrale  $\int_{[0,1]} f dx$ , ove  $f$  è definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ n & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ e la prima cifra decimale non nulla è l}'n\text{-esima.} \end{cases}$$

7. Sia  $f$  una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che  $f$  è sommabile su  $\mathbb{R}^N$  se e solo se  $|f|$  è sommabile su  $\mathbb{R}^N$ .
8. Sia  $f$  una funzione sommabile su  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che  $m_N(\{f = \pm\infty\}) = 0$ .
9. Sia  $f$  una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ . Posto  $F_n = \{|f| \geq n\}$ , si provi che se  $f$  è sommabile, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} n m_N(F_n) = 0$ . È vero il viceversa?
10. Siano  $f, g$  funzioni integrabili o sommabili su  $\mathbb{R}^N$ . Si provi che  $f \vee g, f \wedge g$  sono a loro volta rispettivamente integrabili o sommabili su  $\mathbb{R}^N$ .

### 3.11 Confronto con l'integrale di Riemann

Consideriamo il caso  $N = 1$ : vogliamo confrontare l'integrale di Lebesgue con quello di Riemann visto nel corso di Analisi 1.

Ricordiamo che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , *limitata*, è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$  se, posto per ogni suddivisione  $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  di  $[a, b]$

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^k \left[ \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right] (x_i - x_{i-1}), \quad S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^k \left[ \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right] (x_i - x_{i-1}),$$

risulta

$$\sup_{\sigma} s(f, \sigma) = \inf_{\sigma} S(f, \sigma);$$

in tal caso l'integrale di Riemann  $\int_a^b f dx$  è definito uguale a tale numero.

Ci proponiamo di dimostrare che se  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ , allora  $f$  è sommabile in  $[a, b]$  e il suo integrale secondo Lebesgue coincide con quello secondo Riemann.

Cominciamo col provare che se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  allora  $f$  è misurabile. Osserviamo che i numeri  $s(f, \sigma)$  e  $S(f, \sigma)$  sono gli integrali su  $[a, b]$  delle due funzioni semplici

$$\varphi_\sigma = \sum_{i=1}^k \left( \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) I_{[x_{i-1}, x_i]}, \quad \psi_\sigma = \sum_{i=1}^k \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) I_{[x_{i-1}, x_i]},$$

le quali, oltre che semplici, sono *costanti a tratti*: ciò significa che le funzioni caratteristiche coinvolte si riferiscono ad intervalli e non ad insiemi misurabili qualunque. Dunque, il fatto che  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  equivale a dire che per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  esistono due funzioni  $\varphi_n, \psi_n$  costanti a tratti, tali che

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ in } [a, b], \quad \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) dx < \frac{1}{n}.$$

Si può supporre, rimpiazzando  $\varphi_n$  con  $\max_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$  e  $\psi_n$  con  $\min_{1 \leq k \leq n} \psi_k$ , che si abbia  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$  e  $\psi_n \geq \psi_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Dunque esistono i limiti puntuali

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), \quad \psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x),$$

e si ha  $\varphi \leq f \leq \psi$  in  $[a, b]$ . Le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  sono misurabili (proposizione 3.9.9); quindi se dimostriamo che l'insieme  $N = \{\varphi < \psi\}$  ha misura nulla, otteniamo che  $f$  è misurabile: infatti per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  vale la relazione

$$\{f > \alpha\} = \{x \in N : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in N^c : \psi(x) > \alpha\}$$

nella quale il secondo insieme è misurabile perché tale è  $N$ , mentre il primo è misurabile essendo incluso in  $N$  che ha misura nulla (proposizione 3.4.3).

Per provare che  $m_1(N) = 0$ , osserviamo che la funzione  $\psi - \varphi$  è misurabile e

$$0 \leq \psi - \varphi \leq \psi_n - \varphi_n \text{ in } [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui, per monotonia,

$$0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi) dx \leq \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) dx \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue  $\int_a^b (\psi - \varphi) dx = 0$ . Ora, scrivendo  $[a, b] = N \cup N^c$  ed osservando che  $\psi - \varphi = 0$  su  $N^c$ , si ha per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$

$$0 = \int_N (\psi - \varphi) dx \geq \int_{\{\psi - \varphi \geq 1/k\}} (\psi - \varphi) dx \geq \frac{1}{k} m_1(\{\psi - \varphi \geq 1/k\}) :$$

ciò implica  $m_1(\{\psi - \varphi \geq 1/k\}) = 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ . Essendo poi  $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \{\psi - \varphi \geq 1/k\}$ , dalla proposizione 3.7.2 segue finalmente che  $m_1(N) = 0$  e pertanto ogni funzione

$f \in \mathcal{R}(a, b)$  è misurabile.

Veniamo alla dimostrazione della sommabilità di  $f$  e della coincidenza dei due integrali, che denoteremo con  $\int_a^b f dx$  (Riemann) e con  $\int_{[a,b]} f dx$  (Lebesgue). Supponiamo dapprima  $f \geq 0$ : allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f dx &= \sup \left\{ \int_a^b \varphi dx : \varphi \leq f, \varphi \text{ costante a tratti} \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \int_a^b \varphi dx : \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{S}_0 \right\} = \int_{[a,b]} f dx; \end{aligned}$$

d'altra parte, per ogni  $\psi$  costante a tratti tale che  $\psi \geq f$  (ne esistono, essendo  $f$  limitata) si ha, per monotonia,  $\int_{[a,b]} f dx \leq \int_{[a,b]} \psi dx$ , da cui

$$\int_{[a,b]} f dx \leq \inf \left\{ \int_a^b \psi dx : \psi \geq f, \psi \text{ costante a tratti} \right\} = \int_a^b f dx.$$

Dunque, gli integrali  $\int_{[a,b]} f dx$  e  $\int_a^b f dx$  coincidono. Se poi  $f$  cambia segno, si applica quanto detto sopra a  $f^+$  e  $f^-$ .

Dato che l'integrale di Riemann, se esiste, è uguale a quello di Lebesgue, d'ora in avanti scriveremo  $\int_a^b f dx$  anche per indicare l'integrale secondo Lebesgue.

In particolare, gli integrali di Riemann e di Lebesgue coincidono per ogni funzione continua, e pertanto continuano a valere per l'integrale di Lebesgue 1-dimensionale i teoremi sull'integrazione visti in Analisi 1, ed in particolare il teorema fondamentale del calcolo integrale: se  $f \in C[a, b]$  allora  $F(x) = \int_{[a,x]} f dt = \int_a^x f dt$  è derivabile in  $[a, b]$  con  $F' = f$ . Ciò implica la validità, anche nell'ambito della teoria di Lebesgue, delle formule di integrazione per parti e per sostituzione (sempre che gli integrandi verifichino le adeguate ipotesi di regolarità).

**Osservazione 3.11.1** Le funzioni sommabili sono più di quelle integrabili secondo Riemann: ad esempio, la funzione  $I_{\mathbb{Q}}$  non è integrabile secondo Riemann in alcun intervallo  $[a, b]$ , mentre è sommabile in ogni  $[a, b]$  con  $\int_a^b I_{\mathbb{Q}} dx = 0$ .

## Esercizi 3.11

1. Sia  $C_{\xi}$  l'insieme di Cantor di parametro  $\xi < \frac{1}{3}$  (si veda il paragrafo 3.6). La funzione  $I_{C_{\xi}}$  è integrabile secondo Riemann su  $[0, 1]$ ?
2. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si provi che  $f$  è integrabile secondo Riemann in senso improprio su  $\mathbb{R}$ , ma non è integrabile secondo Lebesgue su  $\mathbb{R}$ .

[**Traccia:** Si utilizzi l'esercizio 3.10.7.]

## 3.12 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Una delle più importanti proprietà dell'integrale di Lebesgue è il fatto di poter scambiare fra loro, in ipotesi molto blande, le operazioni di limite e di integrazione. Prima di dare i risultati principali, conviene introdurre una comoda locuzione, strettamente legata alle proprietà degli insiemi di misura nulla citate nell'osservazione 3.10.7.

**Definizione 3.12.1** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Diciamo che una proprietà  $p(\mathbf{x})$  è vera quasi ovunque in  $D$  (abbreviato: q.o. in  $D$ ) se, posto  $P = \{\mathbf{x} \in D : p(\mathbf{x})\}$ , l'insieme  $D \setminus P$  è misurabile con  $m_N(D \setminus P) = 0$ .*

**Esempi 3.12.2 (1)** Se  $f$  è misurabile su  $D$  e se  $g : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è un'altra funzione tale che  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  q.o., allora anche  $g$  è misurabile (esercizio 3.9.4).

**(2)** Se  $f$  è sommabile e non negativa su  $D$ , e se  $K \subseteq D$  è un insieme misurabile tale che  $\int_K f \, d\mathbf{x} = 0$  allora  $f = 0$  q.o. su  $K$ . Infatti, posto  $K_n = \{f I_K \geq \frac{1}{n}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , si ha

$$\frac{1}{n} m_N(K_n) \leq \int_{K_n} f \, d\mathbf{x} \leq \int_K f \, d\mathbf{x} = 0,$$

da cui  $m_N(K_n) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ . Poiché  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \{f I_K > 0\}$ , in virtù della subadditività della misura anche questo insieme ha misura nulla.

**Osservazione 3.12.3** La relazione  $f = g$  q.o. su  $D$  è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le funzioni misurabili su  $D$ , come è immediato verificare. Questo fatto è estremamente importante, perché ci permetterà di costruire spazi di Banach di funzioni sommabili dotati di norme integrali, a dispetto di quanto osservato nel paragrafo 3.1.

Veniamo ora ai teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il principale di questi, da cui discendono tutti gli altri, riguarda successioni crescenti di funzioni.

**Teorema 3.12.4 (di Beppo Levi o della convergenza monotona)** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , tali che  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  q.o. in  $D$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora il limite puntuale  $f(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x})$  esiste q.o. in  $D$ , e si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione** Posto  $P_n = \{f_n < 0\}$  e  $Q_n = \{f_{n+1} < f_n\}$ , gli insiemi  $P_n$  e  $Q_n$  hanno misura nulla per ipotesi; quindi anche  $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (P_n \cup Q_n)$  ha misura nulla, ed il limite puntuale  $f$  è ben definito e non negativo su  $D \setminus P$ . Possiamo poi estendere  $f$  a tutto  $D$  ponendola uguale a 0, il che come sappiamo preserva la misurabilità, e non altera ovviamente il valore dell'integrale, nel senso che  $\int_D f \, d\mathbf{x} = \int_{D \setminus P} f \, d\mathbf{x}$ .

Notiamo che il limite degli integrali su  $D$  di  $f_n$  esiste certamente, poiché

$$\int_D f_n \, d\mathbf{x} = \int_{D \setminus P} f_n \, d\mathbf{x} \leq \int_{D \setminus P} f_{n+1} \, d\mathbf{x} = \int_D f_{n+1} \, d\mathbf{x},$$



ed anzi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} \leq \int_D f \, d\mathbf{x}.$$

Dobbiamo provare la disuguaglianza opposta. Utilizziamo un metodo già adoperato per provare l'additività dell'integrale. Sia  $\beta \in ]0, 1[$  e sia  $\psi \in \mathcal{S}_0$  tale che  $0 \leq \psi \leq f$  in  $D$ . Posto  $A_n = \{f_n \geq \beta\psi\}$ , gli  $A_n$  sono misurabili, definitivamente non vuoti (essendo  $\beta < 1$ ), nonché crescenti rispetto all'inclusione; inoltre, dato che  $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in D$ , risulta  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Si ha allora

$$\beta \int_{A_n} \psi \, d\mathbf{x} \leq \int_{A_n} f_n \, d\mathbf{x} \leq \int_D f_n \, d\mathbf{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da qui ricaviamo, per il corollario 3.10.6,

$$\beta \int_D \psi \, d\mathbf{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x}.$$

Per l'arbitrarietà di  $\psi$ , ciò implica

$$\beta \int_D f \, d\mathbf{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x},$$

ed infine per  $\beta \rightarrow 1$  si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.12.5** Il teorema precedente è falso se si sopprime qualcuna delle ipotesi: ad esempio, in  $\mathbb{R}$  le funzioni  $f_n = -I_{[n, +\infty[}$  formano una successione crescente ma non positiva, che tende puntualmente a  $f = 0$ , e tuttavia risulta, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = -\infty < 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dx$ . Invece le funzioni  $f_n = I_{[n, n+1]}$  sono non negative ma non formano una successione crescente: il loro limite puntuale è  $f = 0$  ma, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = 1 > 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dx$ .

Per successioni di funzioni non puntualmente convergenti valgono due risultati molto generali. Il primo è il seguente:

**Lemma 3.12.6 (di Fatou)** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , tali che*

$$f_n(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}) \quad \text{q.o. in } D, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ove  $g$  è una fissata funzione sommabile su  $D$ . Posto

$$f(\mathbf{x}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D,$$

si ha

$$\int_D f \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione** La successione  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , definita da

$$h_n = \inf_{m \geq n} (f_m - g),$$

è crescente; inoltre le  $h_n$  sono q.o. non negative. Essendo, per definizione di minimo limite,  $f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in D$ , si ha dal teorema di Beppo Levi

$$\int_D (f - g) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D h_n d\mathbf{x};$$

d'altra parte, poiché  $h_n \leq f_m - g$  in  $D$  per ogni  $m \geq n$ , integrando su  $D$  troviamo

$$\int_D h_n d\mathbf{x} \leq \int_D (f_m - g) d\mathbf{x} \quad \forall m \geq n,$$

ovvero

$$\int_D h_n d\mathbf{x} \leq \inf_{m \geq n} \int_D (f_m - g) d\mathbf{x}.$$

Pertanto, ancora per definizione di minimo limite,

$$\int_D (f - g) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D h_n d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D (f_n - g) d\mathbf{x} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mathbf{x} - \int_D g d\mathbf{x}.$$

Sommando membro a membro la quantità finita  $\int_D g d\mathbf{x}$ , si ricava

$$\int_D f d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mathbf{x},$$

che è la tesi.  $\square$

Il secondo risultato è conseguenza del precedente:

**Corollario 3.12.7** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , tali che*

$$f_n(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } D, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ove  $g$  è una fissata funzione sommabile su  $D$ . Posto

$$f(\mathbf{x}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D,$$

si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mathbf{x} \leq \int_D f d\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione** La successione  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , definita da  $h_n = -f_n$ , verifica  $h_n \geq -g$  q.o. in  $D$ , con  $-g$  funzione ovviamente sommabile. Per il lemma di Fatou

$$\int_D (-f) d\mathbf{x} = \int_D \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D h_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

ossia, moltiplicando per  $-1$ ,

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \int_D \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

che è la tesi.  $\square$

Il risultato che segue è il più utile fra i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

**Teorema 3.12.8 (di Lebesgue o della convergenza dominata)** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , tali che:*

(i)  $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  q.o. in  $D$ ,

(ii)  $|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$  q.o. in  $D$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

ove  $g$  è una fissata funzione sommabile e non negativa su  $D$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x},$$

ed anzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |f_n - f| \, d\mathbf{x} = 0.$$

**Dimostrazione** La successione  $\{f_n\}$  soddisfa le relazioni  $-g \leq f_n \leq g$  q.o. in  $D$ , con  $g$  e  $-g$  funzioni sommabili: quindi essa verifica le ipotesi del lemma di Fatou e del corollario 3.12.7; dato che  $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  q.o. in  $D$ , ne segue

$$\int_D f \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} \leq \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Dunque si ha una catena di uguaglianze e ciò prova il primo enunciato.

La seconda parte della tesi segue applicando quanto già dimostrato alla successione  $\{|f_n - f|\}$ , il che è lecito poiché

$$|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ q.o. in } D, \quad |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq 2g(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } D. \quad \square$$

## Assoluta continuità dell'integrale

L'integrale di Lebesgue ha un'altra importante proprietà, vale a dire la cosiddetta *assoluta continuità*. Con ciò si intende il fatto che se  $f$  è una funzione sommabile allora l'integrale  $\int_E |f| \, d\mathbf{x}$ , come funzione dell'insieme  $E$ , è "piccolo" al tendere a 0 della misura di  $E$ . Precisamente, vale il seguente risultato:

**Teorema 3.12.9** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Se  $f$  è una funzione sommabile su  $D$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  per il quale risulta  $\int_E |f| \, d\mathbf{x} < \varepsilon$  per ogni insieme misurabile  $E \subseteq D$  con  $m_N(E) < \delta$ .*

**Dimostrazione** Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi non sia vera: dunque esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , scelto  $\delta = 2^{-n}$ , si può trovare un insieme misurabile  $E_n \subseteq D$  per cui risulta

$$m_N(E_n) < 2^{-n}, \quad \int_{E_n} |f| d\mathbf{x} \geq \varepsilon_0.$$

Ponendo allora

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \quad F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n,$$

abbiamo, per numerabile subadditività e per la proposizione 3.7.2(ii),

$$m_N(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}, \quad m_N(F) = 0.$$

Dunque  $\int_F |f| d\mathbf{x} = 0$ . D'altra parte, osservando che la successione di funzioni sommabili  $\{|f|I_{F_n}\}$  converge puntualmente, in modo decrescente, a  $|f|I_F$ , il teorema di Lebesgue ci permette di dedurre

$$0 = \int_F |f| d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} |f| d\mathbf{x} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mathbf{x} \geq \varepsilon_0,$$

il che è assurdo. Ciò prova la tesi.  $\square$

## Integrali dipendenti da parametro

Negli esercizi 3.12.15 e 3.12.17) si incontrano alcuni risultati sugli integrali dipendenti da parametro, dimostrabili tramite il teorema di convergenza dominata (teorema 3.12.8). I due teoremi che descriviamo qui, che riguardano in effetti l'integrazione secondo Riemann, sono di natura più specifica, e si riferiscono al caso in cui il parametro compare non solo nell'integrando, ma anche negli estremi di integrazione. Il primo risultato riguarda la continuità, il secondo la derivabilità.

**Teorema 3.12.10** *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un insieme della forma*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]\},$$

*ove  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni continue definite in  $[a, b]$  e tali che  $\alpha \leq \beta$ . Se  $f$  è una funzione continua su  $D$ , allora la funzione*

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

*è continua in  $[a, b]$ .*

**Dimostrazione** Poniamo  $M = \max_D |f|$  e fissiamo  $x_0 \in [a, b]$ . Distinguiamo due casi:  $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$  e  $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ .

Nel primo caso,  $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un intervallo chiuso  $I \subseteq [a, b]$ , intorno di  $x_0$  in  $[a, b]$ , tale che  $\beta(x) - \alpha(x) < \frac{\varepsilon}{M}$  per ogni  $x \in I$ . Ne segue

$$|G(x) - G(x_0)| = |G(x)| \leq \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} |f(x, y)| dy \leq \varepsilon \quad \forall x \in I,$$

e ciò prova la tesi in questo caso.

Nel secondo caso,  $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ , esiste un intervallo chiuso  $I \subseteq [a, b]$ , intorno di  $x_0$  in  $[a, b]$ , tale che  $\beta(x) - \alpha(x) > 0$  per ogni  $x \in I$ ; in particolare  $\min_I(\beta - \alpha) = \delta > 0$ . Per ogni  $n > \frac{2}{\delta}$  poniamo

$$G_n(x) = \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f(x, y) dy, \quad x \in I.$$

In virtù dell'uniforme continuità, per ogni  $n > \frac{2}{\delta}$  esiste  $\sigma_n > 0$  tale che

$$x, \xi \in I, |x - \xi| < \sigma_n \implies |\alpha(x) - \alpha(\xi)| < \frac{1}{2n}, |\beta(x) - \beta(\xi)| < \frac{1}{2n},$$

ed anche

$$(x, y), (\xi, \eta) \in D, |x - \xi| < \sigma_n, |y - \eta| < \sigma_n \implies |f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \frac{1}{n}.$$

Allora se  $x, \xi \in I$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_n(x) - G_n(\xi) &= \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} [f(x, y) - f(\xi, y)] dy + \\ &+ \left[ \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f(\xi, y) dy - \int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} f(\xi, y) dy \right], \end{aligned}$$

ove tutti gli integrali sono ben definiti poiché

$$\left[ \alpha(x) + \frac{1}{n}, \beta(x) - \frac{1}{n} \right] \subset ]\alpha(\xi), \beta(\xi)[.$$

Ne segue, se  $x, \xi \in I$  e  $|x - \xi| < \sigma_n$ ,

$$\begin{aligned} |G_n(x) - G_n(\xi)| &\leq \frac{1}{n} [\beta(x) - \alpha(x)] + M[|\alpha(x) - \alpha(\xi)| + |\beta(x) - \beta(\xi)|] < \\ &< \frac{1}{n} [\max_I(\beta - \alpha) + M]. \end{aligned}$$

Dunque  $G_n \in C(I)$  per ogni  $n > \frac{2}{\delta}$ . Inoltre per ogni  $x \in I$  si ha

$$|G_n(x) - G(x)| \leq \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x) + \frac{1}{n}} |f(x, y)| dy + \int_{\beta(x) - \frac{1}{n}}^{\beta(x)} |f(x, y)| dy \leq \frac{M}{n} \quad \forall n > \frac{2}{\delta},$$

e quindi  $G_n \rightarrow G$  uniformemente in  $I$ . Ne deriva  $G \in C(I)$ , e in particolare  $G$  è continua in  $x_0$ .  $\square$

**Teorema 3.12.11** Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un insieme della forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]\},$$

ove  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni di classe  $C^1$  definite in  $[a, b]$  e tali che  $\alpha \leq \beta$ . Se  $f$  è una funzione continua su  $D$ , con derivata parziale  $f_x$  definita nei punti interni di  $D$  e prolungabile con continuità a tutto  $D$ , allora per ogni  $x \in [a, b]$  risulta

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy.$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $x_0 \in [a, b]$  e proviamo la formula nel punto  $x_0$ . Come nella dimostrazione precedente, distinguiamo due casi:  $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$  e  $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ . Stavolta supponiamo dapprima che sia  $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ : allora, per continuità, esiste un intervallo chiuso  $I \subseteq [a, b]$ , intorno di  $x_0$  in  $[a, b]$ , tale che  $\beta(x) - \alpha(x) \geq \delta$  per ogni  $x \in I$ . Fissato  $n > \frac{2}{\delta}$ , definiamo nuovamente

$$G_n(x) = \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f(x, y) dy, \quad x \in I,$$

osservando che l'integrando è ben definito in un intorno dei grafici delle funzioni  $x \mapsto \beta(x) - \frac{1}{n}$  e  $x \mapsto \alpha(x) + \frac{1}{n}$ ,  $x \in I$ . Vogliamo provare che  $G_n$  è derivabile in  $I$ , con derivata

$$G'_n(x) = f\left(x, \beta(x) - \frac{1}{n}\right)\beta'(x) - f\left(x, \alpha(x) + \frac{1}{n}\right)\alpha'(x) + \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f_x(x, y) dy$$

in ogni punto  $x \in I$ . Per uniforme continuità, esiste  $\eta > 0$ , dipendente solo da  $n$ , tale che

$$\xi, x \in I, \quad |\xi - x| < \eta \quad \implies \quad |\alpha(\xi) - \alpha(x)| \leq \frac{1}{2n}, \quad |\beta(\xi) - \beta(x)| \leq \frac{1}{2n}.$$

Fissati ora  $x, \xi \in I$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{G_n(\xi) - G_n(x)}{\xi - x} &= \int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} \frac{f(\xi, y) - f(x, y)}{\xi - x} dy + \\ &+ \frac{1}{\xi - x} \left[ \int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} f(x, y) dy - \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f(x, y) dy \right], \end{aligned}$$

ove tutti gli integrali sono ben definiti.

Il primo integrale può essere riscritto come

$$\int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} \left[ \frac{f(\xi, y) - f(x, y)}{\xi - x} - f_x(x, y) \right] dy + \int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} f_x(x, y) dy.$$

Poiché l'intervallo di estremi  $(\xi, y)$  e  $(x, y)$  è contenuto in  $D$  qualunque sia  $y \in [\alpha(\xi) + \frac{1}{n}, \beta(\xi) - \frac{1}{n}]$ , utilizzando il teorema di Lagrange si vede facilmente, grazie all'uniforme

continuità di  $f_x$ , che il primo addendo tende a 0 per  $\xi \rightarrow x$ , mentre il secondo addendo, sempre per la continuità di  $f_x$ , è una funzione continua della variabile  $\xi$ . Pertanto

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} \left[ \frac{f(\xi, y) - f(x, y)}{\xi - x} - f_x(x, y) \right] dy = \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f_x(x, y) dy.$$

Se poi definiamo

$$F(s, t, x) = \int_s^t f(x, y) dy, \quad s, t \in [\alpha(x), \beta(x)],$$

l'ultimo termine che compone il rapporto incrementale di  $G_n$  è il rapporto incrementale nel punto  $\xi = x$  della funzione composta

$$\xi \mapsto F\left(\alpha(\xi) + \frac{1}{n}, \beta(\xi) - \frac{1}{n}, x\right).$$

Dato che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$F_s(s, t, x) = -f(x, s), \quad F_t(s, t, x) = f(x, t) \quad \forall s, t \in [\alpha(x), \beta(x)],$$

dal teorema di derivazione delle funzioni composte segue, per  $\xi \in I$ ,

$$\frac{d}{d\xi} F\left(\alpha(\xi) + \frac{1}{n}, \beta(\xi) - \frac{1}{n}, x\right) = -f\left(x, \alpha(\xi) + \frac{1}{n}\right) \alpha'(\xi) + f\left(x, \beta(\xi) - \frac{1}{n}\right) \beta'(\xi),$$

e dunque, per  $\xi = x$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{1}{\xi - x} \left[ \int_{\alpha(\xi) + \frac{1}{n}}^{\beta(\xi) - \frac{1}{n}} f(x, y) dy - \int_{\alpha(x) + \frac{1}{n}}^{\beta(x) - \frac{1}{n}} f(x, y) dy \right] = \\ = -f\left(x, \alpha(x) + \frac{1}{n}\right) \alpha'(x) + f\left(x, \beta(x) - \frac{1}{n}\right) \beta'(x). \end{aligned}$$

Ne segue finalmente che le funzioni  $G_n$  sono di classe  $C^1$  in  $I$ , e per ogni  $x \in I$  si ha per  $G'_n(x)$  la formula scritta all'inizio.

D'altra parte, come si è visto nella dimostrazione precedente,  $G_n \rightarrow G$  uniformemente in  $I$  per  $n \rightarrow \infty$  ed inoltre, per continuità,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(x) = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy$$

uniformemente in  $I$ . Dal teorema 1.2.4 segue allora che  $G$  è derivabile in  $I$  con

$$G'(x) = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy, \quad x \in I.$$

Dato che il secondo membro è una funzione continua su  $I$ , si ottiene che la tesi è provata nell'intorno di ogni punto  $x_0 \in [a, b]$  con  $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ .

Supponiamo ora che sia  $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ : in questo caso,  $x_0$  è un punto di minimo per la funzione  $\beta - \alpha$ , e quindi

$$\beta'(x_0) - \alpha'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x_0 = a \\ = 0 & \text{se } a < x_0 < b \\ \leq 0 & \text{se } x_0 = b. \end{cases}$$

Se  $x_0 \in ]a, b[$ , scrivendo il rapporto incrementale della funzione  $G$  in  $x_0$ , posto  $M = \sup_D |f|$  si ottiene per  $x > x_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \right| &= \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right| \leq M \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - x_0} = \\ &= M \frac{\beta(x) - \beta(x_0)}{x - x_0} + M \frac{\alpha(x_0) - \alpha(x)}{x - x_0}; \end{aligned}$$

similmente, per  $x < x_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \right| &= \frac{1}{x_0 - x} \left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right| \leq M \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x_0 - x} = \\ &= -M \frac{\beta(x) - \beta(x_0)}{x_0 - x} + M \frac{\alpha(x_0) - \alpha(x)}{x_0 - x}. \end{aligned}$$

Quindi, per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M |\beta'(x_0) - \alpha'(x_0)| = 0$$

e dunque  $G'(x_0) = 0$ ; ciò prova la tesi quando  $\beta(x_0) = \alpha(x_0)$  e  $x_0 \in ]a, b[$ .

Resta il caso in cui  $\beta(x_0) = \alpha(x_0)$  e  $x_0 = a$  oppure  $x_0 = b$ . Supponiamo  $x_0 = a$  e poniamo  $A = \alpha(a) = \beta(a)$ : dobbiamo provare che  $G'(a) = f(a, A)[\beta'(a) - \alpha'(a)]$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$0 < x - a < \delta \implies |\alpha(x) - A| < \varepsilon,$$

inoltre, detto  $R_\delta = [a, a + \delta] \times [A - \delta, A + \delta]$  e posto

$$M_\delta = \sup_{(x,y) \in R_\delta} f(x, y), \quad m_\delta = \inf_{(x,y) \in R_\delta} f(x, y),$$

per la continuità di  $f$  possiamo supporre, rimpicciolendo eventualmente  $\delta$ , che sia  $M_\delta - f(a, A) < \varepsilon$  e  $f(a, A) - m_\delta < \varepsilon$ . Allora per il rapporto incrementale della funzione  $G$  nel punto  $a$  si ha, notando che  $G(a) = 0$ ,

$$m_\delta \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \leq \frac{G(x)}{x - a} \leq M_\delta \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a}$$

ed anche

$$\frac{G(x)}{x - a} - f(a, A) \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \begin{cases} \leq [M_\delta - f(a, A)] \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \\ \geq [m_\delta - f(a, A)] \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \end{cases}$$



da cui

$$-\varepsilon \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \leq \frac{G(x)}{x - a} - f(a, A) \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \leq \varepsilon \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a}.$$

Pertanto si ricava

$$\left| \frac{G(x)}{x - a} - f(a, A) \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \right| \leq \varepsilon \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} = \varepsilon \left[ \frac{\beta(x) - A}{x - a} + \frac{A - \alpha(x)}{x - a} \right]$$

da cui, per  $x \rightarrow a$ ,

$$\limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{G(x)}{x - a} - f(a, A) \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{x - a} \right| \leq \varepsilon [\beta'(a) - \alpha'(a)],$$

il che implica, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,

$$G'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x)}{x - a} = f(a, A) [\beta'(a) - \alpha'(a)]$$

che è la tesi quando  $x_0 = a$ .

Il calcolo per  $x = b$  e  $\beta(b) = \alpha(b)$  è simile e lo omettiamo. Ciò prova il lemma.  $\square$

### Esercizi 3.12

1. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili non negative definite su  $D$ , e supponiamo che esista una funzione  $f : D \rightarrow [0, \infty]$  misurabile, tale che  $f_n \leq f$  q.o. per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  q.o. in  $D$  per  $n \rightarrow \infty$ . Si provi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mathbf{x} = \int_D f d\mathbf{x}.$$

2. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , tali che  $g \leq f_n \leq f_{n+1}$  q.o. in  $D$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ove  $g$  è una funzione sommabile su  $D$ . Si provi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mathbf{x} = \int_D f d\mathbf{x}.$$

3. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , q.o. non negative. Si provi che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_D f_n d\mathbf{x} = \int_D \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mathbf{x}.$$

4. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ , tali che la funzione  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$  sia sommabile su  $D$ . Si provi che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_D f_n d\mathbf{x} = \int_D \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mathbf{x}.$$

5. Sia  $f$  una funzione sommabile sull'insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Si provi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |f|^{1/n} d\mathbf{x} = m_N(\{f \neq 0\}).$$

6. Posto  $f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n$ ,  $x \geq 0$ , si dimostri che  $f_n \geq f_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si determini  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  e si dica se è possibile passare al limite sotto il segno di integrale nei due casi seguenti:

$$(i) \int_0^\infty f_n(x) e^{x/2} dx, \quad (ii) \int_0^\infty f_n(x) e^{-x/2} dx.$$

7. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $D$ . Supponiamo che:

- (i)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.o. in  $D$  per  $n \rightarrow \infty$ ;
- (ii) per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esista  $g_n$  sommabile su  $D$ , tale che  $|f_n(x)| \leq g_n(x)$  q.o. in  $D$ ;
- (iii)  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  q.o. in  $D$  per  $n \rightarrow \infty$ , con  $g$  funzione sommabile su  $D$ ;
- (iv)  $\int_D g_n(x) dx \rightarrow \int_D g(x) dx$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Si provi che

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

8. Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si esibisca una successione  $\{f_n\}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = \alpha.$$

9. Sia  $f$  una funzione sommabile su  $\mathbb{R}^N$ . Provare che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un compatto  $K \subset \mathbb{R}^N$  tale che  $\int_{K^c} |f| d\mathbf{x} < \varepsilon$ .

10. Esibire una funzione sommabile su  $\mathbb{R}$ , illimitata sul complementare di ogni compatto.

11. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$(i) \int_0^1 \frac{x^p}{1-x} |\ln x| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \quad \forall p > -1,$$

$$(ii) \int_0^1 \sin x \ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n)!},$$

$$(iii) \int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - t} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{1 + (n+1)^2} \quad \forall t \in [-1, 1],$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad & \int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x + 1} dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}, \\
\text{(v)} \quad & \int_0^\infty e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}, \\
\text{(vi)} \quad & \int_0^\infty e^{-x^2} \sin x dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2} \frac{n!}{(2n+1)!}, \\
\text{(vii)} \quad & \int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}, \\
\text{(viii)} \quad & \int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

12. Provare che

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq} \quad \forall p, q > 0,$$

e dedurre che

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

13. Provare che

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-ax^3} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)} \quad \forall a \in [-1, 1],$$

e dedurre che

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(6n+1)(6n+2)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3\sqrt{3}}.$$

14. Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{nx + x^2}{1 + nx^{3/2}} e^{-\sqrt{x}} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{x^{-n} + x^2} dx.$$

15. (*Continuità degli integrali dipendenti da parametro*) Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $t_0 \in \mathbb{R}$  e sia  $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione tale che:

- (i)  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})$  per q.o.  $\mathbf{x} \in D$ ;
- (ii) la funzione  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t)$  è misurabile su  $D$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ed esiste una funzione sommabile  $h : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $|f(\mathbf{x}, t)| \leq h(\mathbf{x})$  per q.o.  $\mathbf{x} \in D$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Si provi che allora

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \int_D f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

[**Traccia:** si applichi il teorema 3.12.8 ad una qualunque successione  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$  che converga a  $t_0$ .]

16. Sia  $f$  una funzione sommabile in  $[0, \infty[$ , tale che  $x^\alpha f(x)$  e  $x^\beta f(x)$  siano sommabili per certi  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $\alpha < \beta$ . Si provi che se  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  anche  $x^\gamma f(x)$  è sommabile e che la funzione  $F(\gamma) = \int_0^\infty x^\gamma |f(x)| dx$  è continua.
17. (*Derivabilità degli integrali dipendenti da parametro*) Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione tale che:

- (i)  $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$  per q.o.  $\mathbf{x} \in D$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) la funzione  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t)$  è sommabile su  $D$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ed esiste una funzione sommabile  $h : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $|\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)| \leq h(\mathbf{x})$  per q.o.  $\mathbf{x} \in D$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Si provi che allora

$$\exists \frac{d}{dt} \int_D f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

[**Traccia:** si verifichi che  $\frac{\partial f}{\partial t}$  è misurabile e si utilizzi il teorema 3.12.8.]

18. Stabilire se le funzioni

$$G(x) = \int_{-|x|}^{|x|} \cos \sin tx dt, \quad H(x) = \int_{-|x|}^{|x|} \sin \sin tx dt$$

sono derivabili su  $\mathbb{R}$ , e in tal caso calcolarne la derivata.

### 3.13 Calcolo degli integrali multipli

Conosciamo tutte le proprietà della misura e dell'integrale di Lebesgue, abbiamo confrontato quello 1-dimensionale con l'integrale di Riemann, ma quando  $N > 1$  non sappiamo ancora come calcolare esplicitamente gli integrali multipli. Come vedremo, si può ridurre il calcolo di un integrale  $N$ -dimensionale a  $N$  integrazioni semplici successive, con possibilità di modificare a piacere l'ordine di integrazione. Cominciamo con il legare le misure di Lebesgue  $m_k$  e  $m_h$  alla misura  $m_{k+h}$ .

**Lemma 3.13.1** *Fissati  $k, h \in \mathbb{N}^+$ , siano  $E \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $F \subseteq \mathbb{R}^h$  insiemi misurabili. Allora  $E \times F$  è misurabile in  $\mathbb{R}^{k+h}$  e  $m_{k+h}(E \times F) = m_k(E) \cdot m_h(F)$ , con l'usuale convenzione  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ .*

**Dimostrazione** (I) La tesi è ovvia se  $E, F$  sono parallelepipedi, dato che in tal caso anche  $E \times F$  è un parallelepipedo.

(II) Se  $E, F$  sono pluri-parallelepipedi, per l'osservazione 3.2.4 sarà  $E = \bigcup_{j=1}^p R_j$  e  $F = \bigcup_{i=1}^q S_i$ , con gli  $R_j$  parallelepipedi disgiunti e gli  $S_i$  parallelepipedi disgiunti. Quindi

$$E \times F = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{i=1}^q (R_j \times S_i)$$

e gli  $R_j \times S_i$  sono parallelepipedi disgiunti; quindi, per additività,

$$m_{k+h}(E \times F) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q m_{k+h}(R_j \times S_i) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q m_k(R_j) m_h(S_i) = m_k(E) m_h(F).$$

(III) Se  $E, F$  sono aperti, esistono due successioni di pluri-parallelepipedi,  $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (di  $\mathbb{R}^k$ ) e  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (di  $\mathbb{R}^h$ ), tali che  $R_n \subseteq R_{n+1} \subseteq E$ ,  $S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq F$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_k(R_n) = m_k(E), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_h(S_n) = m_h(F).$$

Possiamo anche supporre, grazie all'esercizio 3.5.6, che  $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$  e  $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$ , da cui

$$R_n \times S_n \subseteq R_{n+1} \times S_{n+1} \subseteq E \times F = \bigcup_{n=0}^{\infty} (R_n \times S_n).$$

Dunque, per la proposizione 3.7.2,

$$m_{k+h}(E \times F) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{k+h}(R_n \times S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_k(R_n) m_h(S_n) = m_k(E) m_h(F).$$

(IV) Se  $E$  è aperto e  $F$  è chiuso, allora  $E \times F = (E \times \mathbb{R}^h) \setminus (E \times F^c)$  è misurabile perchè differenza di aperti (misurabili per il passo III). Per provare la relazione tra le misure, sia  $\{Q_n\}$  una successione crescente di cubi aperti di  $\mathbb{R}^h$  la cui unione sia  $\mathbb{R}^h$ : allora per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  si ha per il passo III

$$\begin{aligned} m_k(E) m_h(F) &= m_k(E) \lim_{n \rightarrow \infty} m_k(F \cap Q_n) = m_k(E) \lim_{n \rightarrow \infty} [m_h(Q_n) - m_k(F^c \cap Q_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [m_N(E \times Q_n) - m_N(E \times (F^c \cap Q_n))] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_N(E \times (F \cap Q_n)) = m_N(E \times F). \end{aligned}$$

(V) Se  $E$  e  $F$  sono chiusi, allora  $E \times F$  è chiuso in  $\mathbb{R}^N$  e dunque misurabile. Inoltre, scelte due successioni crescenti di cubi aperti  $P_n \subset \mathbb{R}^k$  e  $Q_n \subset \mathbb{R}^h$  le cui unioni siano rispettivamente  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathbb{R}^h$ , si ha come sopra, usando il passo III,

$$\begin{aligned} m_k(E) m_h(F) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_h(E \cap P_n) m_k(F \cap Q_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [m_k(P_n) - m_k(E^c \cap P_n)] [m_h(Q_n) - m_h(F^c \cap Q_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [m_N(P_n \times Q_n) - m_N((E^c \cap P_n) \times Q_n) - \\ &\quad - m_N(P_n \times (F^c \cap Q_n)) + m_N((E^c \cap P_n) \times (F^c \cap Q_n))] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [m_N((E \cap P_n) \times Q_n) - m_N((E \cap P_n) \times (F^c \cap Q_n))] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_N((E \cap P_n) \times (F \cap Q_n)) = m_N(E \times F). \end{aligned}$$

(VI) Se  $E, F$  sono misurabili con misura finita, esistono due successioni di aperti  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (di  $\mathbb{R}^k$ ) e  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (di  $\mathbb{R}^h$ ), e due successioni di chiusi  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (di  $\mathbb{R}^k$ ) e  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (di  $\mathbb{R}^h$ ), tali che

$$A_n \supseteq E \supseteq C_n, \quad B_n \supseteq F \supseteq D_n, \\ m_k(A_n \setminus C_n) < \frac{1}{n}, \quad m_h(B_n \setminus D_n) < \frac{1}{n}.$$

Inoltre, essendo  $m_k(A_n) \leq 1 + m_k(E) < \infty$  e  $m_h(B_n) \leq 1 + m_h(F) < \infty$ , si ha

$$m_N((A_n \times B_n) \setminus (C_n \times D_n)) \leq m_N((A_n \setminus C_n) \times B_n) + m_N(C_n \times (B_n \setminus D_n)) \leq \frac{M}{n},$$

over  $M$  è una costante; dunque  $m_N((A_n \times B_n) \setminus (C_n \times D_n)) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Ne segue che  $E \times F$  è misurabile e, avendosi

$$m_N(C_n \times D_n) \leq m_N(E \times F) \leq m_N(A_n \times B_n), \\ m_N(C_n \times D_n) = m_k(C_n)m_h(D_n) \leq m_k(E)m_h(F) \leq m_k(A_n)m_h(B_n) = m_N(A_n \times B_n),$$

si deduce

$$|m_N(E \times F) - m_k(E)m_h(F)| \leq m_N((A_n \times B_n) \setminus (C_n \times D_n)) \leq \frac{M}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

cioè  $m_k(E)m_h(F) = m_N(E \times F)$ .

(VII) Infine, se  $E, F$  sono insiemi misurabili con, ad esempio,  $m_h(E) = \infty$ , considerando ancora una successione crescente di cubi  $Q_n$  la cui unione sia  $\mathbb{R}^h$ , si ha

$$E \times F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap Q_n) \times F$$

e quindi  $E \times F \in \mathcal{M}_N$ ; inoltre per il passo VI

$$m_h(E)m_k(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_h(E \cap Q_n)m_k(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_N((E \cap Q_n) \times F) = m_N(E \times F).$$

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Vediamo ora come il calcolo della misura di un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ ,  $N > 1$ , si possa ricondurre ad integrazioni iterate in dimensione più bassa. Ciò corrisponde geometricamente ad una integrazione “per fette”.

**Proposizione 3.13.2** *Siano  $k, h \in \mathbb{N}^+$  e sia  $E$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^{k+h}$ . Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$  e per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$  consideriamo le sezioni verticali ed orizzontali di  $E$  così definite:*

$$E_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}, \quad E^{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(i)  $E_{\mathbf{x}}$  è misurabile in  $\mathbb{R}^h$  per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$  ed  $E^{\mathbf{y}}$  è misurabile in  $\mathbb{R}^k$  per q.o.  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$ ;

(ii) la funzione  $\mathbf{x} \mapsto m_h(E_{\mathbf{x}})$  è misurabile in  $\mathbb{R}^k$  e la funzione  $\mathbf{y} \mapsto m_k(E^{\mathbf{y}})$  è misurabile in  $\mathbb{R}^h$ ;

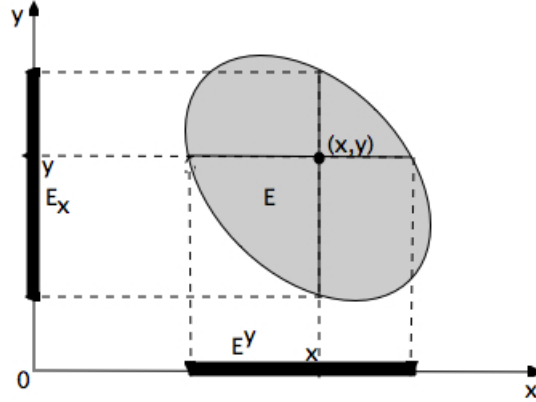
(iii) risulta

$$m_{k+h}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E^{\mathbf{y}}) d\mathbf{y}.$$

**Dimostrazione** Proveremo solo la parte che riguarda l'insieme  $E_{\mathbf{x}}$ : l'altra, relativa ad  $E^{\mathbf{y}}$ , è analoga.

Se  $E$  è un parallelepipedo, sarà  $E = J_1 \times J_2$ , con  $J_1$  parallelepipedo in  $\mathbb{R}^k$  e  $J_2$  parallelepipedo in  $\mathbb{R}^h$ . Dunque

$$E_{\mathbf{x}} = \begin{cases} J_2 & \text{se } \mathbf{x} \in J_1, \\ \emptyset & \text{se } \mathbf{x} \notin J_1, \end{cases}$$



cosicché  $E_{\mathbf{x}}$  è misurabile per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$  e  $m_h(E_{\mathbf{x}}) = m_h(J_2)I_{J_1}(\mathbf{x})$ ; in particolare  $\mathbf{x} \mapsto m_h(E_{\mathbf{x}})$  è una funzione semplice, dunque misurabile. Inoltre, per il lemma 3.13.1,

$$m_{k+h}(E) = m_k(J_1)m_h(J_2) = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(J_2)I_{J_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Se  $E$  è un pluri-parallelepipedo, possiamo scrivere  $E = \bigcup_{j=1}^p R_j$  con gli  $R_j$  parallelepipedi disgiunti; allora  $E_{\mathbf{x}} = \bigcup_{j=1}^p (R_j)_{\mathbf{x}}$  è misurabile e, per quanto già provato,  $m_h(E_{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^p m_h((R_j)_{\mathbf{x}})$  è una funzione semplice, quindi misurabile. Infine

$$m_{k+h}(E) = \sum_{j=1}^p m_{k+h}(R_j) = \sum_{j=1}^p \int_{\mathbb{R}^k} m_h((R_j)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Se  $E$  è un aperto, esiste una successione di pluri-parallelepipedi  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $P_n \subseteq P_{n+1} \subseteq E$  e  $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = E$ . Allora  $E_{\mathbf{x}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P_n)_{\mathbf{x}}$  è misurabile e, per quanto già provato e per la proposizione 3.7.2,  $m_h(E_{\mathbf{x}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_h((P_n)_{\mathbf{x}})$  è una funzione misurabile. Per il teorema di B. Levi si ha allora

$$m_{k+h}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{k+h}(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((P_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Se  $E$  è chiuso, allora  $E_x = \mathbb{R}^k \setminus (E^c)_x$  è misurabile perché aperto; inoltre, scelta una famiglia di cubi aperti  $Q_n$  con  $Q_n \subset Q_{n+1}$  e  $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \mathbb{R}^{k+h}$ , si ha

$$m_{k+h}(E \cap Q_n) = m_{k+h}(Q_n) - m_{k+h}(E^c \cap Q_n)$$

e dunque, in virtù di quanto si è provato per gli aperti,  $m_h(E_{\mathbf{x}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_h((E^c \cap Q_n)_{\mathbf{x}})$  è una funzione misurabile e

$$m_{k+h}(E \cap Q_n) = \int_{\mathbb{R}^k} m_h((Q_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^k} m_h((E^c \cap Q_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x};$$

ne deriva, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$m_{k+h}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{k+h}(E \cap Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Infine, se  $E$  è un insieme misurabile, esistono una successione di aperti  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ed una successione di chiusi  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tali che  $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq E \supseteq C_{n+1} \supseteq C_n$  e  $m_{k+h}(A_n \setminus C_n) < \frac{1}{n}$ . Per quanto già provato per gli aperti, si ha

$$m_{k+h}(A_n \setminus C_n) = \int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_n \setminus C_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} < \frac{1}{n};$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_n \setminus C_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = 0.$$

Gli integrandi sono non negativi e decrescenti rispetto a  $n$ ; quindi, per il lemma di Fatou (lemma 3.12.6),

$$\int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n \rightarrow \infty} m_h((A_n \setminus C_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_n \setminus C_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = 0,$$

e a maggior ragione

$$\int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n \rightarrow \infty} m_h^*((E \setminus C_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = 0.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_h^*((E \setminus C_n)_{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^k,$$

da cui  $E_{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_h$  per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^h$ . Inoltre, essendo  $m_h(E) = m_h(C_n) + m_h(E \setminus C_n)$ , troviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{k+h}(C_n) = m_{k+h}(E), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_h((C_n)_{\mathbf{x}}) = m_h(E_{\mathbf{x}}) \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^h,$$

cosicché la funzione  $\mathbf{x} \mapsto m_h(E_{\mathbf{x}})$  è misurabile e, per convergenza monotona e per quanto già provato per i chiusi,

$$m_{k+h}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{k+h}(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((C_n)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Si noti che la tesi della proposizione 3.13.2 si può scrivere nel modo seguente: per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^{k+h}$  si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{k+h}} I_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^k} \left[ \int_{\mathbb{R}^h} I_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \left[ \int_{\mathbb{R}^k} I_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

Nei teoremi che seguono generalizzeremo questa formula al caso di una qualunque funzione integrabile su  $\mathbb{R}^{k+h}$ .



**Teorema 3.13.3 (di Tonelli)** Sia  $f : \mathbb{R}^{k+h} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione misurabile e non negativa. Allora si ha:

- (i) la funzione  $f(\cdot, \mathbf{y})$  è misurabile in  $\mathbb{R}^k$  per q.o.  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$  e la funzione  $f(\mathbf{x}, \cdot)$  è misurabile in  $\mathbb{R}^h$  per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ;
- (ii) la funzione  $\int_{\mathbb{R}^h} f(\cdot, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$  è misurabile in  $\mathbb{R}^k$  e la funzione  $\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \cdot) d\mathbf{x}$  è misurabile in  $\mathbb{R}^h$ ;
- (iii) risulta

$$\int_{\mathbb{R}^{k+h}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^k} \left[ \int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \left[ \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

**Dimostrazione** Se  $f = I_E$ , con  $E \subseteq \mathbb{R}^{k+h}$  misurabile, la tesi è fornita dalla proposizione 3.13.2. Se  $f$  è una funzione semplice, la tesi segue per linearità.

Nel caso generale, grazie alla non negatività di  $f$  esiste una successione di funzioni semplici  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge puntualmente a  $f$  in modo crescente (ad esempio, quelle costruite nella dimostrazione della proposizione 3.9.9). La proprietà (i) è vera perché  $f(\cdot, \mathbf{y})$  e  $f(\mathbf{x}, \cdot)$  sono limiti puntuali di funzioni misurabili; le parti (ii) e (iii) si ottengono applicando il teorema di B. Levi.  $\square$

Un risultato analogo vale per le funzioni di segno variabile, purché integrabili (e non solo misurabili): basta scrivere il risultato per  $f^+$  e  $f^-$  e poi sottrarre, il che è sempre lecito perché almeno uno fra i due termini della sottrazione è finito.

Per le funzioni sommabili il risultato del teorema di Tonelli si può precisare:

**Teorema 3.13.4 (di Fubini)** Sia  $f : \mathbb{R}^{k+h} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione sommabile. Allora si ha:

- (i) la funzione  $f(\cdot, \mathbf{y})$  è sommabile su  $\mathbb{R}^k$  per q.o.  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$  e la funzione  $f(\mathbf{x}, \cdot)$  è sommabile su  $\mathbb{R}^h$  per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ;
- (ii) la funzione  $\int_{\mathbb{R}^h} f(\cdot, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$  è sommabile su  $\mathbb{R}^k$  e la funzione  $\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \cdot) d\mathbf{x}$  è sommabile su  $\mathbb{R}^h$ ;
- (iii) risulta

$$\int_{\mathbb{R}^{k+h}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^k} \left[ \int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \left[ \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

**Dimostrazione** La tesi è vera, grazie al teorema di Tonelli, per le funzioni non negative  $f^+$  e  $f^-$ ; gli integrali risultanti sono tutti finiti in quanto  $f^+ \leq |f|$ ,  $f^- \leq |f|$  e  $|f|$  è sommabile. Il risultato segue allora per differenza.  $\square$

**Osservazione 3.13.5** Spesso viene usata la notazione  $\int_{\mathbb{R}^k} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , lievemente imprecisa, in luogo di  $\int_{\mathbb{R}^k} \left[ \int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}$ , così come si usa  $\int_{\mathbb{R}^h} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$  in luogo di  $\int_{\mathbb{R}^h} \left[ \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}$ .

**Esempi 3.13.6 (1)** (*Insiemi normali piani*) Poniamo

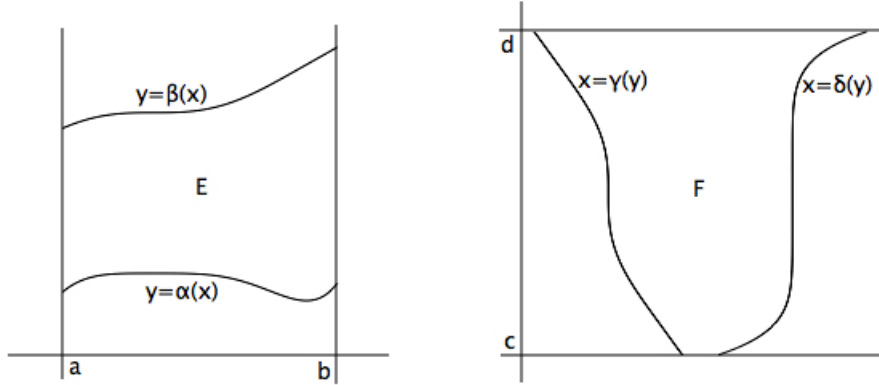
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

ove  $\alpha, \beta \in C[a, b]$  con  $\alpha \leq \beta$ . Un insieme di questo genere si chiama *insieme normale rispetto all'asse x* (essendo l'unione di segmenti verticali). L'insieme  $E$  è chiuso, quindi misurabile in  $\mathbb{R}^2$ ; inoltre

$$E_x = \begin{cases} [\alpha(x), \beta(x)] & \text{se } x \in [a, b] \\ \emptyset & \text{se } x \notin [a, b], \end{cases} \quad m_1(E_x) = \begin{cases} \beta(x) - \alpha(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Pertanto

$$m_2(E) = \int_{\mathbb{R}} m_1(E_x) dx = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)] dx.$$



Similmente, per l'insieme

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con  $\gamma, \delta \in C[c, d]$  e  $\gamma \leq \delta$  (*insieme normale rispetto all'asse y*), si ha

$$F^y = \begin{cases} [\gamma(y), \delta(y)] & \text{se } y \in [c, d] \\ \emptyset & \text{se } y \notin [c, d], \end{cases} \quad m_1(F^y) = \begin{cases} \delta(y) - \gamma(y) & \text{se } y \in [c, d] \\ 0 & \text{se } y \notin [c, d]. \end{cases}$$

Pertanto

$$m_2(F) = \int_{\mathbb{R}} m_1(F^y) dy = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)] dy.$$

**(2)** (*Integrali su insiemi normali piani*) Sia  $F$  un insieme normale rispetto all'asse  $y$ , dunque della forma

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con  $\gamma, \delta \in C[c, d]$  e  $\gamma \leq \delta$ . Se  $f$  è una funzione sommabile, o integrabile, su  $E$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_F f dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f I_F dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f I_F dx \right] dy = \\ &= \int_c^d \left[ \int_{\mathbb{R}} f I_F dx \right] dy = \int_c^d \left[ \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $g$  è una funzione sommabile od integrabile sull'insieme (normale rispetto all'asse  $x$ )

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

ove  $\alpha, \beta \in C[a, b]$  con  $\alpha \leq \beta$ , allora

$$\int_E g \, dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, y) \, dy \right] dx.$$

**Osservazione 3.13.7** Se il dominio su cui si deve integrare è normale rispetto ad entrambi gli assi, si possono combinare i due casi esposti nell'esempio precedente, ottenendo uno *scambio dell'ordine di integrazione* che spesso aiuta a semplificare il calcolo. Se ad esempio  $E$  è un parallelepipedo  $[a, b] \times [c, d]$ , si ha per ogni  $f$  integrabile su  $E$

$$\int_E f \, dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy,$$

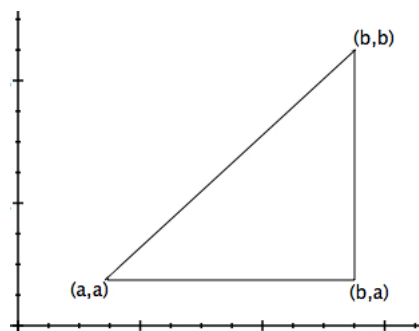
e converrà scegliere la formula più semplice per i calcoli.

**Esempi 3.13.8 (1)** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , e sia  $T$  il triangolo di vertici  $(a, a)$ ,  $(b, b)$  e  $(b, a)$ : vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_T e^{(b-y)^2} \, dx dy.$$

L'insieme  $T$  è normale rispetto all'asse  $x$ , quindi si ha

$$\int_T e^{(b-y)^2} \, dx dy = \int_a^b \left[ \int_a^x e^{(b-y)^2} \, dy \right] dx,$$



ma l'integrale a secondo membro non è calcolabile esplicitamente. Però, essendo  $T$  normale anche rispetto all'asse  $y$ , possiamo scrivere

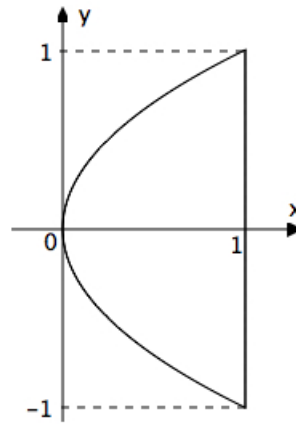
$$\int_T e^{(b-y)^2} \, dx dy = \int_a^b \left[ \int_y^b e^{(b-y)^2} \, dx \right] dy,$$

e poiché l'integrando non dipende da  $x$ , otteniamo

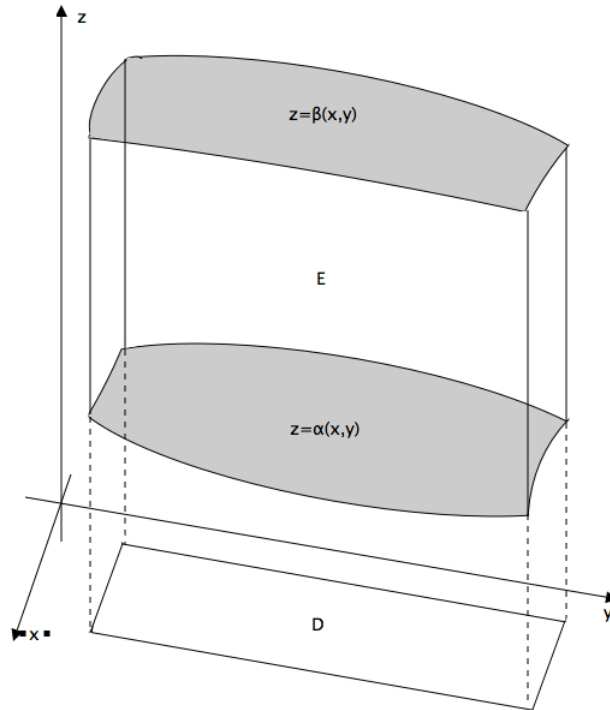
$$\begin{aligned} \int_T e^{(b-y)^2} \, dx dy &= \int_a^b e^{(b-y)^2} \left[ \int_y^b 1 \, dx \right] dy = \\ &= \int_a^b (b-y) e^{(b-y)^2} \, dy = \frac{1}{2} \left( e^{(b-a)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

(2) Calcoliamo l'integrale  $\int_D y^2 dx dy$ , ove  $D$  è la regione delimitata dalla parabola  $x = y^2$  e dalla retta  $x = 1$ . Il dominio  $D$  è normale rispetto ad entrambi gli assi: tenuto conto della forma dell'integrando, conviene vederlo come insieme normale rispetto all'asse  $y$ . Scriviamo quindi

$$\begin{aligned} \int_D y^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{y^2}^1 y^2 dx \right] dy = \\ &= \int_{-1}^1 y^2(1 - y^2) dy = \\ &= 2 \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$



(3) (*Insiemi normali di  $\mathbb{R}^3$* ) Un insieme della forma



$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

ove  $D$  è un chiuso di  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha, \beta \in C(D)$  con  $\alpha \leq \beta$ , si chiama *insieme normale rispetto al piano  $xy$* ; analogamente si possono avere insiemi normali rispetto ai piani  $xz$  o  $yz$ . Se  $f$  è una funzione integrabile su  $E$ , vale la formula

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left[ \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

Se, in particolare,  $D$  è a sua volta normale rispetto (ad esempio) all'asse  $x$ , cosicché

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}$$

con  $p, q \in C[a, b]$  e  $p \leq q$ , allora l'integrale triplo si decompone in tre integrali semplici:

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_{p(x)}^{q(x)} \left[ \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

In particolare si possono avere scambi dell'ordine di integrazione quando, come spesso accade, il dominio  $E$  è normale rispetto a due o addirittura a tutti e tre i piani coordinati. Se poi consideriamo, per ogni  $x \in [a, b]$ , le sezioni di  $E$  lungo piani ortogonali all'asse  $x$ , cioè

$$E_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : p(x) \leq y \leq q(x), \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

si vede che ciascun  $E_x$  è misurabile, essendo un insieme normale rispetto all'asse  $y$ , e inoltre

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_{E_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx.$$

Questa formula esprime una "integrazione per fette", che è utile in svariate situazioni: particolarmente importante è il caso dei *solidi di rotazione*. Se  $f(z)$  è una funzione continua e non negativa definita per  $z \in [a, b]$ , e se

$$G = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq x \leq f(z)\},$$

l'insieme  $H$ , ottenuto ruotando  $G$  attorno all'asse  $z$ , è un esempio di solido di rotazione. Si ha

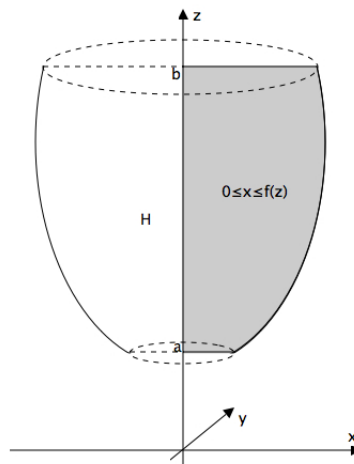
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z)\};$$

$H$  è chiuso, quindi misurabile, e si trova, integrando per fette,

$$m_3(H) = \int_{\mathbb{R}} m_2(H^z) dz.$$

Le sezioni orizzontali  $H^z$ , per  $z \in [a, b]$ , sono cerchi di centro  $(0, 0)$  e raggio  $f(z)$ , mentre sono vuote per  $z \notin [a, b]$ . Quindi

$$m_3(H) = \int_a^b \pi f(z)^2 dz.$$



(4) Calcoliamo il volume del paraboloido solido

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} :$$

si ha, affettando perpendicolarmente all'asse  $z$ ,

$$H^z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z\},$$

cosicché la sezione  $H^z$  è un cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{z}$ . Perciò

$$m_3(H) = \int_H 1 \, dx dy dz = \int_0^1 \left[ \int_{H^z} dx dy \right] dz = \int_0^1 m_2(H^z) dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}.$$

(5) Calcoliamo l'integrale di Riemann improprio  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Fissato  $a > 0$ , osserviamo che

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \left[ \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dy \right] dx.$$

La funzione  $(x, y) \mapsto e^{-xy} \sin x$  è sommabile su  $[0, a] \times [0, \infty[$  poiché, in virtù del teorema di Tonelli,

$$\int_{[0, a] \times [0, \infty[} e^{-xy} |\sin x| dx dy = \int_0^a \left[ \int_0^\infty e^{-xy} |\sin x| dy \right] dx = \int_0^a \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty.$$

Quindi possiamo scambiare l'ordine di integrazione nell'integrale di  $e^{-xy} \sin x$ , ottenendo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \left[ \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dy \right] dx = \int_0^\infty \left[ \int_0^a e^{-xy} \sin x dx \right] dy.$$

Quest'ultimo integrale si può calcolare: integrando per parti due volte si verifica facilmente che

$$\int_0^a e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{1+y^2} (1 - e^{-ay}(y \sin a + \cos a)),$$

da cui

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} (1 - e^{-ay}(y \sin a + \cos a)) dy.$$

Dato che per  $a \rightarrow \infty$  si ha  $e^{-ay}(y \sin a + \cos a) \rightarrow 0$  puntualmente, e che

$$\frac{e^{-ay}|y \sin a + \cos a|}{1+y^2} \leq \frac{(1+y)e^{-y}}{1+y^2} \quad \forall a \geq 1, \forall y > 0,$$

in virtù del teorema di Lebesgue si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2}.$$

### Esercizi 3.13

1. La funzione  $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$  è integrabile, o sommabile, in  $[0, 1] \times [0, 1]$ ?
2. La funzione  $f(x, y) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)$  è integrabile, o sommabile, in  $[0, 2] \times [0, 2]$ ?
3. Determinare il volume dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ :
  - (i)  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, 0 < x + y + z < 1\}$ ;
  - (ii)  $E =$  regione delimitata dai vincoli  $x = 0, x = 1, y = -1, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$ ;

(iii)  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2 + z^2\}$ ;

(iv)  $E =$  insieme ottenuto ruotando attorno all'asse  $y$  l'insieme piano

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 3], 0 \leq x \leq g(y)\},$$

ove

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y/2} & \text{se } y \in [0, 2], \\ \sqrt{-y^2 + (9/2)y - 4} & \text{se } y \in [2, 3]. \end{cases}$$

4. Calcolare i seguenti integrali:

(i)  $\int_A \frac{z(1-|x|)}{\sqrt{4-z^2}} dx dy dz$ , ove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{3}(1-|x|)\};$$

(ii)  $\int_B \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$ , ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1/2, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\};$$

(iii)  $\int_C y dx dy$ , ove  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^3(1-x^3) \leq 0\}$ ;

(iv)  $\int_D \frac{\cos y}{x^2} dx dy$ , ove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{2}{\pi}, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ ;

(v)  $\int_E \sqrt{x+y} dx dy$ , ove  $E$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ;

(vi)  $\int_F \max\{x, y\} dx dy$ , ove

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, a < \max\{x, y\} < b\}, \text{ con } b > a > 0;$$

(vii)  $\int_G \ln(xy) dx dy$ , ove

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x \geq -1, 0 \geq y \geq 4x\};$$

(viii)  $\int_H \frac{dx dy}{x+1}$ , ove  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, x \leq y+2\}$ ;

(ix)  $\int_I \frac{1+2x}{x+y} dx dy$ , ove  $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$ ;

(x)  $\int_J (x-1) dx dy$ , ove  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], |x|y \leq 1, |x| \leq 2\}$ ;

(xi)  $\int_K y \cos(x+z) dx dy dz$ , ove

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+z \leq \pi/2, y \leq \sqrt{x}\}.$$

5. Sia  $\Gamma$  la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 1$  nel piano  $z = 0$ . Da ogni punto di  $\Gamma$  si tracci la perpendicolare alla retta  $\{x = 0, z = h\}$ ; la superficie risultante, insieme al piano  $z = 0$ , delimita un solido  $E$ , detto *cono a cuneo*. Se ne determini il volume.

6. Calcolare la misura dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2^{5-x} + x - 6, 2^y + y^2 \leq x \leq 4\}.$$

7. Poniamo  $F(a) = \int_0^\pi \ln(1 + a \cos x) dx$ ,  $|a| < 1$ . Dimostrare che:

(i)  $F$  è ben definita e continua anche per  $|a| = 1$ ;

(ii)  $F$  è derivabile in  $] -1, 1[$ , con

$$F'(a) = \begin{cases} \frac{\pi}{a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right) & \text{se } |a| < 1, a \neq 0, \\ 0 & \text{se } a = 0; \end{cases}$$

(iii) risulta  $F(a) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1-a^2}}{2}$  per ogni  $a \in [-1, 1]$ .

8. Fissati  $a, b > 0$ , si provi che:

(i) la funzione  $f(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$  è sommabile su  $[0, \infty[$ ;

(ii) risulta

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-xy} dy dx = \ln \frac{b}{a}.$$

9. (*Teorema di Schwarz*) Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f \in C^2(A)$ ; si provi che  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  in  $A$ .

[**Traccia:** se in un punto  $(x_0, y_0)$  di  $A$  fosse, ad esempio,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ , si determini un rettangolo  $R$  sul quale  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , e si trovi l'assurdo calcolando  $\int_R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] dx dy$ .]

10. Sia  $E$  un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  di misura positiva. Il *baricentro* di  $E$  è il punto  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$  di coordinate  $\bar{x}^i = \frac{1}{m_N(E)} \int_E x^i d\mathbf{x}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , mentre il *momento di inerzia* di  $E$  rispetto ad una retta  $r$  è il numero  $I_r = \int_E d(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$ , ove  $d(\mathbf{x})$  è la distanza del punto  $\mathbf{x}$  dalla retta  $r$ . Si calcolino il baricentro ed il momento di inerzia rispetto agli assi  $x$  e  $y$  dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

(i)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \sin x\}$ ;

(ii)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

(iii)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ ;



(iv)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ .

11. Sia  $f$  una funzione integrabile sull'insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Si provi la seguente formula di "integrazione per fette":

$$\int_D |f| d\mathbf{x} = \int_0^\infty m_N(\{\mathbf{x} \in D : |f(\mathbf{x})| > t\}) dt.$$

### 3.14 Cambiamento di variabili

Anche per gli integrali multipli, come per quelli in una sola variabile, vi è una formula per il cambiamento di variabili. In questo paragrafo non daremo il risultato più generale possibile, ma ci limiteremo al caso di cambiamenti di variabili descritti da diffeomorfismi fra due aperti  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{R}^N$ , ossia dalle applicazioni bigettive  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  tali che  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{g}^{-1}$  siano di classe  $C^1$ .

Osserviamo che se  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  è un diffeomorfismo, allora si ha  $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$  per ogni  $\mathbf{y} \in A$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  per ogni  $\mathbf{x} \in B$ ; pertanto, dalla formula di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{y} \in A, \quad \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in B,$$

cioè  $\mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$  è la matrice inversa della matrice Jacobiana  $\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{y} \in A$ . In particolare, posto  $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) = \det \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y})$ , si ha

$$|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \neq 0, \quad |J_{\mathbf{g}^{-1}}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))| = \frac{1}{|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})|} \quad \forall \mathbf{y} \in A.$$

Ciò premesso, valgono i seguenti risultati.

**Teorema 3.14.1** *Siano  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo. Se  $E$  è un sottoinsieme misurabile di  $A$ , allora  $\mathbf{g}(E)$  è misurabile,  $|J_{\mathbf{g}}|$  è integrabile su  $E$  e si ha*

$$m_N(\mathbf{g}(E)) = \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

*In particolare,  $\mathbf{g}(E)$  ha misura finita se e solo se  $|J_{\mathbf{g}}|$  è sommabile su  $E$ .*

**Teorema 3.14.2** *Siano  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo. Se  $F$  è un sottoinsieme misurabile di  $B$  e  $f$  è una funzione integrabile su  $F$ , allora  $(f \circ \mathbf{g})|J_{\mathbf{g}}|$  è integrabile su  $\mathbf{g}^{-1}(F)$  e vale la formula*

$$\int_F f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(F)} f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

*In particolare,  $f$  è sommabile su  $F$  se e solo se  $(f \circ \mathbf{g})|J_{\mathbf{g}}|$  è sommabile su  $\mathbf{g}^{-1}(F)$ .*

Il teorema 3.14.2 è facile conseguenza del teorema 3.14.1, ma la dimostrazione di quest'ultimo è molto laboriosa, per cui rimandiamo entrambe ai prossimi paragrafi. Qui ci limitiamo ad un'osservazione e all'esame di qualche applicazione. Per  $N = 1$ , se  $A = [a, b]$  e  $B = [c, d]$  la formula del teorema 3.14.2 (con  $F = B$ ) ci dà

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(g(y))|g'(y)| dy,$$

che è quella che conosciamo dall'Analisi I. Infatti  $g$  è bigettiva e continua, quindi è strettamente monotona da  $[a, b]$  in  $[c, d]$ : dunque, se  $g$  è crescente si ha  $g(a) = c$  e  $g(b) = d$ , e in questo caso

$$\int_c^d f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(y))g'(y) dy = \int_a^b f(g(y))|g'(y)| dy,$$

mentre se  $g$  è decrescente risulta  $g(a) = d$  e  $g(b) = c$ , nel qual caso

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \int_{g(b)}^{g(a)} f(x) dx = \int_b^a f(g(y))g'(y) dy = \\ &= - \int_a^b f(g(y))g'(y) dy = \int_a^b f(g(y))|g'(y)| dy. \end{aligned}$$

Notiamo comunque che in dimensione 1 la formula di cambiamento di variabile vale anche se  $g$  non è bigettiva. Osserviamo anche che in dimensione  $N > 1$  non ci deve sorprendere la presenza del modulo del determinante  $|J_g|$ : ricordiamo infatti che in  $\mathbb{R}^2$  l'area del parallelogramma generato dai vettori  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  è data dal determinante  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$  preso in modulo.

Vediamo alcuni esempi.

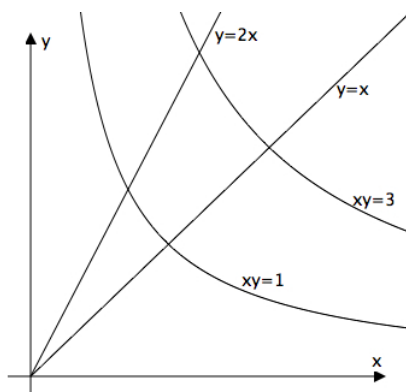
**Esempi 3.14.3 (1)** Vogliamo calcolare l'area dell'insieme

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 3\},$$

che, essendo chiuso, è certamente misurabile.

La definizione stessa di  $F$  ci suggerisce di prendere in considerazione, al posto di  $x$  e  $y$ , la quantità  $y/x$  e  $xy$ , che variano in intervalli fissi (rispettivamente  $[1, 2]$  e  $[1, 3]$ ). Poniamo quindi  $u = y/x$  e  $v = xy$ : l'applicazione

$$(u, v) = \mathbf{h}(x, y) = \left(\frac{y}{x}, xy\right)$$



trasforma  $F$  nel rettangolo  $E = [1, 2] \times [1, 3]$ . Invertiamo  $\mathbf{h}$  per trovare il diffeomorfismo  $\mathbf{g} = \mathbf{h}^{-1}$ , al quale applicheremo il teorema 3.14.1: si trova

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

Dunque  $\mathbf{g}(u, v) = (\sqrt{v/u}, \sqrt{uv})$ . La  $\mathbf{g}$  è un diffeomorfismo che manda  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$  in sé, e si ha

$$J_{\mathbf{g}}(u, v) = \det \begin{pmatrix} -\frac{v^{1/2}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2(uv)^{1/2}} \\ \frac{v^{1/2}}{2u^{1/2}} & \frac{u^{1/2}}{2v^{1/2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2u},$$

da cui per il teorema 3.14.1

$$m_2(F) = \int_E |J_{\mathbf{g}}(u, v)| \, dudv = \int_1^2 \left[ \int_1^3 dv \right] \frac{1}{2u} \, du = \ln 2.$$

(2) Vogliamo calcolare l'integrale  $\int_F x^2 \, dx dy$ , ove

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 3, x \leq y \leq 2x\}.$$

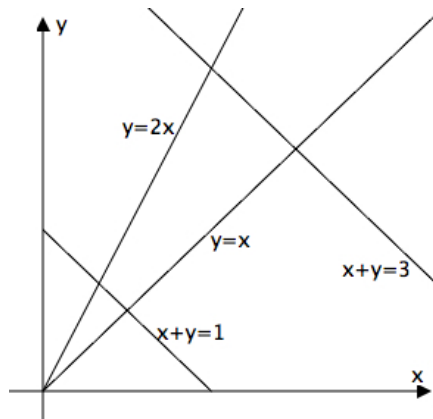
L'insieme  $F$  è misurabile. Poniamo  $u = x + y$  e  $v = y/x$ : si ha allora  $(u, v) \in E = [1, 3] \times [1, 2]$ ; inoltre, come si verifica facilmente,

$$(x, y) = \mathbf{g}(u, v) = \left( \frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v} \right),$$

$$J_{\mathbf{g}}(u, v) = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_F x^2 \, dx dy &= \int_E \frac{u^2}{(1+v)^2} |J_{\mathbf{g}}(u, v)| \, dudv = \int_1^3 \int_1^2 \frac{u^3}{(1+v)^4} \, dudv = \\ &= \int_1^3 u^3 \, du \int_1^2 \frac{dv}{(1+v)^4} = \frac{95}{162}. \end{aligned}$$



## Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$

Consideriamo la trasformazione  $\mathbf{G}$  che rappresenta i punti di  $\mathbb{R}^2$  in *coordinate polari*:

$$(x, y) = \mathbf{G}(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta), \quad \rho \geq 0, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi]$$

(esempio 1.9.8 (2)). Come si sa,  $\mathbf{G}$  è di classe  $C^\infty$  ed è surgettiva ma non iniettiva. La restrizione  $\mathbf{g}$  di  $\mathbf{G}$  alla striscia  $]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[$  ha immagine  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ , ove  $\Sigma = \{(x, y) \in$

$\mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 0\}$ , ed è bigettiva. L'inversa  $\mathbf{g}^{-1}$  è univocamente determinata dalle relazioni

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Si può verificare che anche  $\mathbf{g}^{-1}$  è di classe  $C^1$ , con

$$J_{\mathbf{g}}(\rho, \vartheta) = \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix} = \rho,$$

e che, come è giusto,

$$J_{\mathbf{g}^{-1}}(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho}.$$

Dal teorema 3.14.2 segue che per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  e per ogni funzione  $f$  integrabile su  $E$  si ha

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{g}^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta.$$

Ma è facile provare che questa formula si può generalizzare, nel senso seguente:

**Proposizione 3.14.4** *Per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  e per ogni funzione  $f$  integrabile su  $E$  vale la formula*

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{G}^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta.$$

**Dimostrazione** Poiché  $m_2(\Sigma) = 0$  e poiché l'insieme

$$\Lambda = \mathbf{G}^{-1}(\Sigma) = (\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, \infty[ \times \{0, 2\pi\})$$

ha misura di Lebesgue nulla rispetto alle variabili  $(\rho, \vartheta)$ , si deduce

$$\begin{aligned} \int_E f(x, y) dx dy &= \int_{E \setminus \Sigma} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{g}^{-1}(E \setminus \Sigma)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_{\mathbf{G}^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta. \quad \square \end{aligned}$$

L'uso delle coordinate polari è consigliabile, in linea generale, quando l'integrale presenta, nel dominio o nell'integrando, qualche simmetria circolare. Ma l'utilità e la versatilità di questo cambiamento di variabili si apprezza solo con l'esperienza.

**Esempi 3.14.5 (1)** Calcoliamo l'integrale  $\int_C x dx dy$ , ove

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \right\}.$$

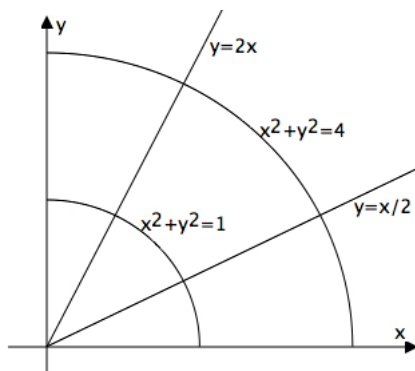
Poniamo, come al solito,

$$\mathbf{g}(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta).$$

Poiché

$$\mathbf{g}^{-1}(C) = [1, 2] \times \left[ \arctan \frac{1}{2}, \arctan 2 \right],$$

si ha



$$\begin{aligned} \int_C x \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[ \int_{\arctan 1/2}^{\arctan 2} \rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right] d\rho = \\ &= \int_1^2 \rho^2 \, d\rho \int_{\arctan 1/2}^{\arctan 2} \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{7}{3} \left[ \sin \arctan 2 - \sin \arctan \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\sin \vartheta = \frac{\tan \vartheta}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}} \quad \forall \vartheta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right],$$

otteniamo

$$\int_C x \, dx \, dy = \frac{7}{3} \left[ \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right] = \frac{7}{3\sqrt{5}}.$$

(2) Mediante le coordinate polari riusciamo a calcolare l'integrale  $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$ . Fissiamo  $n \in \mathbb{N}^+$  e poniamo  $S_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}$ . Allora  $\mathbf{g}^{-1}(S_n) = [0, n] \times [0, \pi/2]$ , cosicché

$$\int_{S_n} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_0^n \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho \, d\vartheta \, d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}).$$

Ora, per il corollario 3.10.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_S e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy,$$

ove  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ ; d'altra parte questo integrale, per il teorema di Fubini, può scriversi come

$$\int_S e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy = \left[ \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right]^2.$$

In conclusione

$$\left[ \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4},$$

cioè

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$

Introduciamo le *coordinate cilindriche* in  $\mathbb{R}^3$ , ponendo per ogni  $\rho \geq 0$ ,  $\vartheta \in [-\pi, \pi]$  e  $z \in \mathbb{R}$ :

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = z.$$

Questa trasformazione di variabili, che denotiamo con  $\mathbf{G}$ , è surgettiva su  $\mathbb{R}^3$  ma non iniettiva, poiché nei punti dell'asse  $z$  si ha  $(0, 0, z) = \mathbf{G}(0, \vartheta, z)$  per ogni  $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ , mentre nei punti del semipiano  $y = 0$  e  $x < 0$  si ha  $(x, 0, z) = \mathbf{G}(x, -\pi, z) = \mathbf{G}(x, \pi, z)$  per ogni  $x > 0$  e  $z \in \mathbb{R}$ . Tuttavia, ponendo

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \leq 0\},$$

la restrizione di  $\mathbf{G}$  a  $]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}$ , che denotiamo con

$$\mathbf{g}(\rho, \vartheta, z) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z), \quad \rho > 0, \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad z \in \mathbb{R},$$

è bigettiva a valori in  $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ , di classe  $C^1$ , con inversa  $\mathbf{g}^{-1}$  pure di classe  $C^1$ , data da

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad z = z;$$

si ha

$$J_{\mathbf{g}}(\rho, \vartheta, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho,$$

e naturalmente

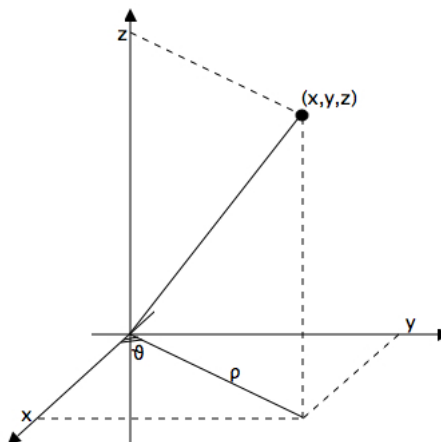
$$J_{\mathbf{g}^{-1}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho}.$$

Dato che  $m_3(\Sigma) = 0$ , le stesse considerazioni svolte per la proposizione 3.14.4 portano alla seguente

**Proposizione 3.14.6** *Per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  e per ogni funzione  $f$  integrabile su  $E$  vale la formula*

$$\int_E f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{\mathbf{G}^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \, \rho \, d\rho d\vartheta dz. \quad \square$$

**Esempi 3.14.7 (1)** (*Volume di un solido di rotazione*) Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un insieme misurabile, contenuto in un semispazio di  $\mathbb{R}^2$ : scegliamo gli assi cartesiani in modo che  $D$  sia incluso nel semipiano  $x \geq 0$ ,  $y = 0$  di  $\mathbb{R}^2$ , cosicché i punti di  $D$  hanno ora la forma  $(x, 0, z)$  con  $x \geq 0$ . Sia  $E$  il solido ottenuto ruotando  $D$  attorno all'asse  $z$ . Abbiamo



ricavato una formula per il volume di  $E$  nell'esempio 3.13.8 (3) nel caso speciale in cui  $D$  era un insieme normale rispetto all'asse  $z$ ; vogliamo ora ottenere una formula per il caso generale. Verifichiamo anzitutto che

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in D\} :$$

se  $(x, y, z) \in E$ , la sua distanza dall'asse di rotazione,  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , e la sua quota  $z$  sono le stesse del punto  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in D$ , che è quello che ruotando va a coincidere con  $(x, y, z)$ . In definitiva

$$\mathbf{G}^{-1}(E) = \{(\rho, \vartheta, z) : \vartheta \in [-\pi, \pi], (\rho, 0, z) \in D\};$$

ne segue, passando in coordinate cilindriche ed utilizzando il teorema di Fubini, che

$$m_3(E) = \int_{\mathbf{G}^{-1}(E)} \rho \, d\rho d\vartheta dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_D \rho \, d\rho dz \right] d\vartheta = 2\pi \int_D \rho \, d\rho dz = 2\pi \int_D x \, dx dz.$$

Possiamo descrivere questa formula come una “integrazione per circonferenze”. Il punto  $(x, 0, z)$  varia in  $D$ , e noi misuriamo la lunghezza della circonferenza che esso percorre ruotando: il raggio di rotazione è  $x$ , e dunque tale circonferenza è lunga  $2\pi x$ . Questa quantità viene integrata su tutto  $D$ , fornendo il volume di  $E$ . Naturalmente, se  $D$  è normale rispetto all'asse  $z$ , integrando rispetto a  $x$  si ritrova la formula dell'esempio 3.13.8 (3).

(2) Con la formula precedente si calcola facilmente il volume del *toro*

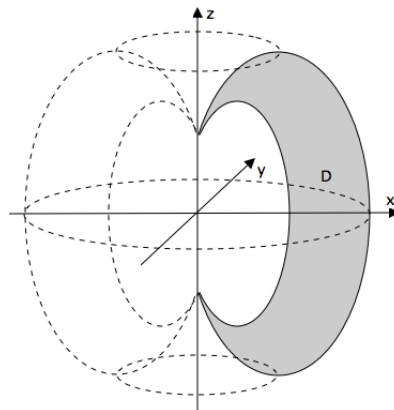
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\},$$

che si ottiene ruotando attorno all'asse  $z$  un disco  $D$  del semipiano  $x \geq 0, y = 0$ , di raggio  $r > 0$ , il cui centro si trovi a distanza  $R > r$  dall'asse  $z$ . Si ha

$$\begin{aligned} m_3(T) &= 2\pi \int_D x \, dx dz = 2\pi \int_{-r}^r \left[ \int_{R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} x \, dx \right] dz = \\ &= \pi \int_{-r}^r \left[ (R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 \right] dz = \\ &= 4\pi \int_{-r}^r R\sqrt{r^2 - z^2} \, dz = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2} \, dz = \\ &\quad [\text{ponendo } z = r \sin t] \\ &= 8\pi R \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2 t \, dt = 2\pi^2 R r^2 = (2\pi R)(\pi r^2). \end{aligned}$$

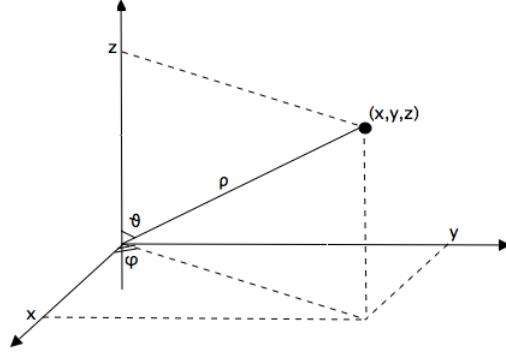
## Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$

Poniamo per ogni  $\rho \geq 0, \vartheta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ :



$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \vartheta,\end{aligned}$$

ove  $\rho$  è la distanza del punto  $P = (x, y, z)$  dall'origine  $O = (0, 0, 0)$ ,  $\vartheta$  è la co-latitudine, ossia l'angolo fra il segmento  $OP$  e l'asse  $z$ , e  $\varphi$  è la longitudine (angolo fra il piano  $y = 0$  ed il piano generato dall'asse  $z$  e dal segmento  $OP$ ).



Questa corrispondenza, che denotiamo con  $\mathbf{G}$ , fornisce la rappresentazione dei punti di  $\mathbb{R}^3$  in *coordinate polari o sferiche*. L'applicazione  $\mathbf{G}$  è surgettiva ma non iniettiva, poiché nei punti del semipiano  $y = 0, x < 0$  si ha  $(x, 0, z) = \mathbf{G}(\rho, \vartheta, -\pi) = \mathbf{G}(\rho, \vartheta, \pi)$  (con  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$  e  $\cos \vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ ), mentre nei punti dell'asse  $z$  risulta, per  $\varphi$  arbitrario,  $(0, 0, z) = \mathbf{G}(z, 0, \varphi)$  se  $z > 0$  e  $(0, 0, z) = \mathbf{G}(-z, \pi, \varphi)$  se  $z < 0$ , ed in particolare nell'origine vale  $(0, 0, 0) = \mathbf{G}(0, \vartheta, \varphi)$  per  $\vartheta$  e  $\varphi$  arbitrari. Ponendo allora

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \leq 0\},$$

la restrizione di  $\mathbf{G}$  a  $]0, \infty[ \times ]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[$ , cioè l'applicazione

$$\mathbf{g}(\rho, \vartheta, \varphi) = (\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta), \quad \rho > 0, \quad \vartheta \in ]0, \pi[, \quad \varphi \in ]-\pi, \pi[,$$

è una bigezione su  $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ ; essa è di classe  $C^1$ , e la sua inversa, pure di classe  $C^1$ , è  $\mathbf{g}^{-1}(x, y, z) = (\rho, \vartheta, \varphi)$ , ove

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Inoltre

$$J_{\mathbf{g}}(\rho, \vartheta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \rho \cos \vartheta \cos \varphi & -\rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \rho \cos \vartheta \sin \varphi & \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin \vartheta$$

e naturalmente

$$J_{\mathbf{g}^{-1}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho^2 \sin \vartheta}.$$

Poiché  $m_3(\Sigma) = 0$ , con gli stessi argomenti usati per la proposizione 3.14.4 si prova la seguente

**Proposizione 3.14.8** *Per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  e per ogni funzione  $f$  integrabile su  $E$  vale la formula*

$$\int_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathbf{G}^{-1}(E)} f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi. \quad \square$$



**Esempio 3.14.9** Calcoliamo l'integrale  $\int_A (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$ , ove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

L'insieme  $A$  è una semisfera scavata dall'alto in forma conica. Si ha, usando le coordinate sferiche,

$$\mathbf{G}^{-1}(A) = \left\{ (\rho, \vartheta, \varphi) : \rho \in [0, 1], \vartheta \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right], \varphi \in [-\pi, \pi] \right\},$$

cosicché

$$\int_A (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_0^1 \left[ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^6 \sin \vartheta d\vartheta \right] d\rho \right] d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{7} \pi.$$

### Dimostrazione dei teoremi 3.14.1 e 3.14.2

È giunto il momento di dedicarsi alla laboriosa dimostrazione dei teoremi 3.14.1 e 3.14.2 sul cambiamento di variabili. Poiché il secondo segue facilmente dal primo, cominceremo dal secondo.

**Dimostrazione del teorema 3.14.2** Supponiamo che il teorema 3.14.1 sia vero: allora la tesi del teorema 3.14.2 è valida quando  $f = I_D$ , con  $D$  sottoinsieme misurabile di  $B$ : basta scegliere nel teorema 3.14.1  $E = \mathbf{g}^{-1}(D)$ . Quindi, per additività, il teorema 3.14.2 vale quando  $f$  è una funzione semplice. Se  $f$  è integrabile e non negativa, si sceglie una successione di funzioni semplici  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$  e  $\varphi_n \rightarrow f$  puntualmente, e la tesi segue applicando il teorema di B. Levi. Infine se  $f$  è integrabile si scrive il risultato per  $f^+$  e  $f^-$  e poi si sottrae.  $\square$

**Dimostrazione del teorema 3.14.1** La prima cosa che ci occorre è vedere come agisce una trasformazione affine su un insieme misurabile.

**Proposizione 3.14.10** Sia  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  un'applicazione affine, dunque della forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

ove  $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_N$ . Allora per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  l'insieme  $\mathbf{h}(E)$  è misurabile con

$$m_N(\mathbf{h}(E)) = |\det \mathbf{L}| \cdot m_N(E).$$

**Dimostrazione** Se  $\det \mathbf{L} = 0$ , allora l'immagine di  $\mathbf{h}$  è uno spazio affine di dimensione minore di  $N$ : quindi  $\mathbf{h}(E)$  è certamente misurabile con misura nulla. Dunque la formula è vera.

Supponiamo  $\mathbf{L}$  non singolare ed osserviamo subito che, essendo la misura invariante per traslazioni, non è restrittivo supporre  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , cioè  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x}$ . Cominciamo a supporre che  $E$  sia un parallelepipedo. In tal caso  $\mathbf{h}(E)$  è un poliedro di  $\mathbb{R}^N$  che si ottiene intersecando un numero finito di semispazi, e quindi è un insieme misurabile. Per calcolarne la misura, trattiamo dapprima il caso in cui la matrice  $\mathbf{L}$  è di uno dei seguenti tre tipi:

(A)  $\mathbf{L}$  agisce su  $\mathbf{x}$  scambiando fra loro le componenti  $x^k$  e  $x^h$ : quindi la matrice  $\mathbf{L}$  si ottiene dall'identità invertendo di posto le righe  $k$  e  $h$ . Ne segue che  $\mathbf{h}(E)$  è il parallelepipedo simmetrico a  $E$  rispetto all'iperpiano  $(N-1)$ -dimensionale di equazione  $x^k = x^h$ : quindi il prodotto delle lunghezze dei lati non cambia, e pertanto  $m_N(\mathbf{h}(E)) = m_N(E)$ . D'altra parte  $|\det \mathbf{L}| = 1$  e dunque la formula è vera.

(B)  $\mathbf{L} = \text{diag}(c_1, \dots, c_N)$ , con  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ . Il parallelepipedo  $E$  sarà del tipo  $E = \prod_{i=1}^N I_i$ , ove gli  $I_i$  sono intervalli di  $\mathbb{R}$ ; allora  $\mathbf{h}(E)$  è un parallelepipedo con lati lunghi  $|c_i| m_1(I_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e quindi  $m_N(\mathbf{h}(E)) = \prod_{i=1}^N |c_i| m_1(I_i) = \prod_{i=1}^N |c_i| m_N(E)$ . D'altra parte  $|\det \mathbf{L}| = \prod_{i=1}^N |c_i|$  e dunque la formula è vera.

(C)  $\mathbf{L}$  agisce su  $\mathbf{x}$  nel modo seguente: esistono  $c \in \mathbb{R}$  e  $k, h \in \{1, \dots, N\}$ , distinti, tali che

$$[\mathbf{L}\mathbf{x}]^k = x^k + cx^h, \quad [\mathbf{L}\mathbf{x}]^i = x^i \quad \text{per } i \neq k.$$

Quindi  $\mathbf{L}$  si ottiene dall'identità sommando alla riga  $k$  la riga  $h$  moltiplicata per  $c$ . Se  $E = \prod_{i=1}^N I_i$ , possiamo descrivere  $\mathbf{h}(E)$  come un insieme normale rispetto all'iperpiano perpendicolare all'asse  $x^k$ : infatti, supponendo ad esempio che  $I_k = [a_k, b_k]$  (ma l'intervallo potrebbe ugualmente essere aperto o semiaperto), si ha

$$\mathbf{h}(E) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x}' = (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^N) \in \prod_{i \neq k} I_i, \right. \\ \left. x^k \in [a_k + cx^h, b_k + cx^h] \right\}.$$

Quindi, posto  $E' = \prod_{i \neq k} I_i$ , dal teorema di Fubini si ha

$$\begin{aligned} m_N(\mathbf{h}(E)) &= \int_{E'} m_1([a_k + cx^h, b_k + cx^h]) d\mathbf{x}' = \\ &= m_1(I_k) \cdot m_{N-1}(E') = \prod_{i=1}^N m_1(I_i) = m_N(E). \end{aligned}$$

D'altra parte si ha  $\det \mathbf{L} = 1$ , dato che  $\mathbf{L}$  è triangolare con tutti 1 sulla diagonale; dunque anche in questo caso la formula è vera.

In questi tre casi (A), (B), (C), la validità della formula si estende ad ogni insieme misurabile. Infatti, se  $E$  è un pluri-parallelepipedo la tesi segue per additività, ricordando che ogni pluri-parallelepipedo è unione finita di parallelepipedi disgiunti. Se  $E$  è aperto o compatto la formula si estende approssimando  $E$  rispettivamente con successioni crescenti o decrescenti di pluri-parallelepipedi (esercizio 3.5.6), e utilizzando il teorema di B. Levi o quello di Lebesgue. Se  $E$  è misurabile, si scelgono, grazie alla proposizione 3.7.4, una successione di aperti  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tali che  $A_j \supseteq A_{j+1} \supseteq E$  e una successione di chiusi  $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tali che  $C_j \subseteq C_{j+1} \subseteq E$ , in modo da avere  $m_N(A_j \setminus C_j) \rightarrow 0$  per  $j \rightarrow \infty$ . Dato che  $A_j \setminus C_j$  è aperto, si sa che

$$m_N(\mathbf{h}(A_j) \setminus \mathbf{h}(C_j)) = m_N(\mathbf{h}(A_j \setminus C_j)) = |\det \mathbf{L}| \cdot m_N(A_j \setminus C_j) \quad \forall j \in \mathbb{N};$$

in particolare,  $m_N(\mathbf{h}(A_j) \setminus \mathbf{h}(C_j)) \rightarrow 0$  per  $j \rightarrow \infty$ , e pertanto  $\mathbf{h}(E)$  è misurabile. Passando poi al limite nella relazione  $m_N(\mathbf{h}(C_j)) = |\det \mathbf{L}| \cdot m_N(C_j)$ , si ottiene la tesi per  $E$ .

In definitiva, abbiamo provato la tesi della proposizione 3.14.10 quando  $\mathbf{h}$  è un'applicazione di tipo (A), (B) o (C).

Inoltre, se la tesi vale per due matrici, essa vale anche per il loro prodotto, a causa della relazione  $\det \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 = \det \mathbf{L}_1 \cdot \det \mathbf{L}_2$ . D'altra parte vale il seguente

**Lemma 3.14.11** *Ogni matrice  $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_N$ , non singolare, si può decomporre nel prodotto di un numero finito di matrici  $\mathbf{M}_j$ ,  $1 \leq j \leq q$ , dei tipi (A), (B) e (C).*

**Dimostrazione** Ragioniamo per induzione sulla dimensione  $N$ . Consideriamo il caso  $N = 2$ : essendo  $\det \mathbf{L} \neq 0$ , deve essere  $a_{11} \neq 0$  oppure  $a_{21} \neq 0$ . Supposto, per fissare le idee,  $a_{11} \neq 0$ , si verifica pazientemente che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo ora la tesi vera per matrici non singolari di  $\mathcal{M}_{N-1}$  e consideriamo una matrice  $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_N$  non singolare. Denotiamo con  $\mathbf{L}^{iN}$  la matrice ottenuta da  $\mathbf{L}$  eliminando la riga  $i$  e la colonna  $N$ : dato che  $\det \mathbf{L} \neq 0$ , esiste  $i \in \{1, \dots, N\}$  tale che  $a_{iN} \det \mathbf{L}^{iN} \neq 0$ ; scambiando eventualmente fra loro due variabili, possiamo supporre che sia  $a_{NN} \det \mathbf{L}^{NN} \neq 0$ .

Per ipotesi induttiva,  $\mathbf{L}^{NN}$  è il prodotto di un numero finito di matrici  $\mathbf{M}_j \in \mathcal{M}_{N-1}$ ,  $1 \leq j \leq q$ , di tipo (A), (B) e (C). Dunque si ha anche

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}^{NN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^q \begin{pmatrix} \mathbf{M}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ora poniamo

$$\mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & a_{iN} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

è facile, anche se noioso, verificare che

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & b \end{pmatrix} \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{N}_i \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{NN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,N-1} & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix},$$

ove  $b$  è un numero da determinare in seguito. Abbiamo così sistemato le prime  $N-1$  righe. Adesso, se poniamo

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (c_i \mathbf{e}_i)^t & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

con  $c_1, \dots, c_{N-1}$  costanti da determinare, si vede senza difficoltà che

$$\prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{C}_i \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & b \end{pmatrix} \cdot \prod_{h=1}^{N-1} \mathbf{N}_h \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{NN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice le cui prime  $N - 1$  righe sono quelle di  $\mathbf{L}$ , mentre l'ultima è

$$\left( \sum_{i=1}^{N-1} c_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{N-1} c_i a_{i,N-1}, \sum_{i=1}^{N-1} c_i a_{iN} + b \right).$$

Noi vogliamo che tale riga coincida con l'ultima di  $\mathbf{L}$ , ossia  $(a_{N1}, \dots, a_{NN})$ : quindi dobbiamo imporre che

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N-1} c_i a_{ij} = a_{Nj}, & j = 1, \dots, N-1, \\ \sum_{i=1}^{N-1} c_i a_{iN} + b = a_{NN}. \end{cases}$$

Ora notiamo che, per ipotesi,  $\mathbf{L}^{NN}$  è invertibile: detta  $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$  l'inversa, si verifica agevolmente che il sistema sopra scritto è risolto da

$$c_i = \sum_{h=1}^{N-1} a_{Nh} m_{hi}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad b = a_{NN} - \sum_{h=1}^{N-1} c_h a_{hN}.$$

In definitiva, ricordando il modo con cui è stata decomposta  $\mathbf{L}^{NN}$ , si ottiene

$$\mathbf{L} = \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{C}_i \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & b \end{pmatrix} \cdot \prod_{h=1}^{N-1} \mathbf{N}_h \cdot \prod_{j=1}^q \begin{pmatrix} \mathbf{M}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix},$$

e ciò prova il passo induttivo.  $\square$

Dal lemma 3.14.11 segue che, se  $E$  è misurabile, i suoi trasformati successivi, tramite le applicazioni lineari associate alle matrici  $\mathbf{M}_j$  il cui prodotto è  $\mathbf{L}$ , sono tutti misurabili e si ha iterativamente

$$m_N(\mathbf{h}(E)) = |\det \mathbf{M}_1| \cdot \dots \cdot |\det \mathbf{M}_q| \cdot m_N(E) = |\det \mathbf{L}| \cdot m_N(E).$$

Ciò conclude la dimostrazione della proposizione 3.14.10.  $\square$

**Osservazioni 3.14.12 (1)** Quando  $E = [0, 1]^N$  ed  $\mathbf{h}$  è l'applicazione lineare  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x}$ , l'insieme  $\mathbf{h}(E)$  è il poliedro generato dai vettori colonna di  $\mathbf{L}$ , vale a dire da  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{e}_N)$ . Per quanto visto si ha

$$m_N(\mathbf{h}([0, 1]^N)) = |\det \mathbf{L}|.$$

Questo è il significato geometrico del (modulo del) determinante. In realtà il determinante rappresenta un'area orientata, come si vedrà più avanti nel corso.

(2) Nel caso tridimensionale, il volume del parallelepipedo  $P$  generato da tre vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  è uguale, come abbiamo appena visto, a  $|\det \mathbf{L}|$ , ove  $\mathbf{L}$  è la matrice che ha per colonne tali vettori. Vi è però un altro modo di esprimere tale volume, tramite il *prodotto vettoriale* fra due vettori di  $\mathbb{R}^3$ , introdotto nel corso di Analisi 1. Ricordiamo che se  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , il loro prodotto vettoriale è il vettore  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  che ha:

- *modulo* pari a  $|\mathbf{u}|_3 |\mathbf{v}|_3 \sin \vartheta$ , ove  $\vartheta \in [0, \pi]$  è l'angolo fra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ;
- *direzione* perpendicolare al piano generato da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ;
- *verso* tale che la terna  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  sia orientata come gli assi cartesiani  $x, y, z$ : in termini più precisi, la matrice che ha per colonne i vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  ha determinante positivo.

Come si sa, le coordinate di  $\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  sono le seguenti:

$$\mathbf{z} = (u^2 v^3 - u^3 v^2, u^3 v^1 - u^1 v^3, u^1 v^2 - u^2 v^1).$$

In particolare, il prodotto vettoriale è bilineare e possiamo formalmente scrivere

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & u^1 & v^1 \\ \mathbf{e}_2 & u^2 & v^2 \\ \mathbf{e}_3 & u^3 & v^3 \end{pmatrix}.$$

Torniamo al volume del parallelepipedo  $P$  generato da  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Detto  $\gamma$  l'angolo fra  $\mathbf{w}$  e la perpendicolare al piano generato da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , ossia l'angolo fra  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , ovvie considerazioni geometriche ci dicono che

$$m_3(P) = |\mathbf{u}|_3 \cdot |\mathbf{v}|_3 \cdot \sin \vartheta \cdot |\mathbf{w}|_3 \cdot |\cos \gamma| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|_3 \cdot |\mathbf{w}|_3 \cdot |\cos \gamma| = |\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_3|,$$

e dunque avremo

$$\begin{aligned} m_3(P) &= |(u^2 v^3 - u^3 v^2)w^1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3)w^2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1)w^3| = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Si ritrova così, per altra via, il risultato già noto  $m_3(P) = |\det \mathbf{L}|$ .

(3) Consideriamo il *simplexso*  $S_{c,N}$  generato da  $N$  vettori  $c\mathbf{v}_1, \dots, c\mathbf{v}_N \in \mathbb{R}^N$ , con  $c$  fissato numero positivo:

$$S_{c,N} = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N t_i \mathbf{v}_i : 0 \leq t_i \leq c, \sum_{i=1}^N t_i = c \right\}.$$

Se  $\mathbf{L}$  è la matrice che ha per colonne i vettori  $\mathbf{v}_i$ , e poniamo  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x}$ , si ha  $S_{c,N} = \mathbf{h}(\Sigma_{c,N})$ , ove  $\Sigma_{c,N}$  è il simpleso generato dai multipli della base canonica  $c\mathbf{e}_1, \dots, c\mathbf{e}_N$ . Proviamo che

$$m_N(S_{c,N}) = |\det \mathbf{L}| \frac{c^N}{N!} \quad \forall c > 0.$$

A questo scopo basta mostrare che

$$m_N(\Sigma_{c,N}) = \frac{c^N}{N!} \quad \forall c > 0.$$

Ragioniamo per induzione: se  $N = 1$  si ha  $\Sigma_{c,1} = [0, c]$ , cosicché  $m_1(\Sigma_{c,1}) = c$ . Se la tesi è vera per l'intero  $N - 1$ , dimostriamola per il successore  $N$ : poiché

$$\Sigma_{c,N} = \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N) : 0 \leq x^1 \leq c, (x^2, \dots, x^N) \in \Sigma_{c-x^1, N-1}\},$$

integrando per fette perpendicolari all'asse  $x^1$  si ha, grazie all'ipotesi induttiva,

$$m_N(\Sigma_{c,N}) = \int_0^c m_{N-1}(\Sigma_{c-x^1, N-1}) dx^1 = \int_0^c \frac{(c-x^1)^{N-1}}{(N-1)!} dx^1 = \frac{c^N}{N!}.$$

In particolare, il *simpleso standard* di  $\mathbb{R}^N$ , generato dai vettori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ , ha misura pari a  $\frac{1}{N!}$ .

Riprendiamo la dimostrazione del teorema 3.14.1. Il punto chiave di tutta l'argomentazione sta nel lemma che segue, che descrive quanto il trasformato di un cubo di  $\mathbb{R}^N$  mediante un diffeomorfismo  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  differisce dal trasformato dello stesso cubo mediante un'opportuna approssimazione affine di  $\mathbf{g}$ . Prima di enunciare il lemma ci occorrono alcuni preliminari.

Sia  $\Omega$  un aperto limitato tale che  $\overline{\Omega} \subset A$ . Poniamo

$$M = \max \left\{ \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \|\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}_N}, \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{g}(\overline{\Omega})} \|\mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})\|_{\mathcal{M}_N} \right\}.$$

Poniamo anche (si veda l'esercizio 1.5.8)

$$\mu = \text{dist}(\overline{\mathbf{g}(\Omega)}, \partial B) = \inf_{\mathbf{x} \in \partial B} d(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{g}(\Omega)});$$

osserviamo che risulta  $\mu > 0$ , e definiamo

$$(\mathbf{g}(\Omega))_r = \{\mathbf{y} \in B : d(\mathbf{y}, \overline{\mathbf{g}(\Omega)}) \leq r\}, \quad r \in ]0, \mu[.$$

Fissiamo un numero  $p > 0$ , che determineremo in seguito. Siccome  $\overline{\Omega}$  è compatto e  $\mathbf{g}$  è differenziabile in ogni punto  $\mathbf{u} \in \overline{\Omega}$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\sigma > 0$ , dipendente da  $\varepsilon$  ma non da  $\mathbf{u}$ , tale che

$$\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, |\mathbf{x} - \mathbf{u}|_N < \sigma \implies |\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{u})|_N < \frac{\varepsilon}{p} |\mathbf{x} - \mathbf{u}|_N$$

ed anche

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \overline{(\mathbf{g}(\Omega))}_{\mu/2}, |\mathbf{v} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N < \sigma &\implies \\ \implies |\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{v}) - \mathbf{u} - \mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))(\mathbf{v} - \mathbf{g}(\mathbf{u}))|_N < \frac{\varepsilon}{p} |\mathbf{v} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N. \end{aligned}$$

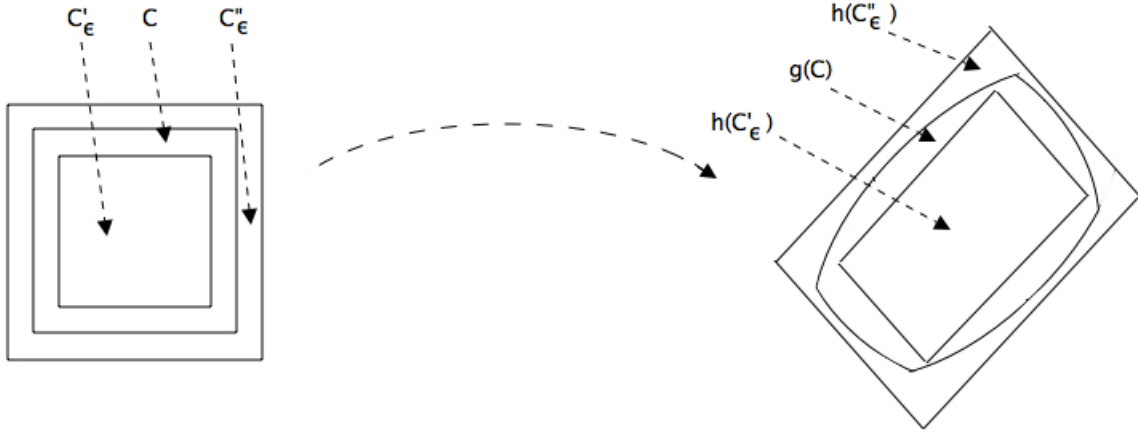
Inoltre, se  $C$  è un cubo contenuto in  $\overline{\Omega}$  di centro  $\mathbf{u} \in \Omega$  e spigolo  $d > 0$ , indichiamo con  $C'_\varepsilon$  e con  $C''_\varepsilon$  i cubi concentrici a  $C$ , di spigoli rispettivamente  $d(1 - \varepsilon)$  e  $d(1 + \varepsilon)$ . Ciò premesso, si ha:

**Lemma 3.14.13** *Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che qualunque cubo  $C \subseteq \overline{\Omega}$  di centro  $\mathbf{u} \in \Omega$  e spigolo  $d \in ]0, \frac{\delta}{\sqrt{N}}[$  verifica*

$$\mathbf{h}(C'_\varepsilon) \subseteq \mathbf{g}(C) \subseteq \mathbf{h}(C''_\varepsilon),$$

ove  $\mathbf{h}$  è l'applicazione affine

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$



**Dimostrazione** Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e cominciamo con la verifica della seconda inclusione. Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{g}(C)$ : sarà  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$  con  $\mathbf{y} \in C$ . Poniamo  $\mathbf{z} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x})$ , cosicché  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{h}(\mathbf{z})$ ; si tratta di provare che  $\mathbf{z} \in C''_\varepsilon$ . Fissato  $i \in \{1, \dots, N\}$ , si ha

$$|z^i - u^i| \leq |z^i - y^i| + |y^i - u^i| \leq |z^i - y^i| + \frac{d}{2}.$$

D'altronde

$$\begin{aligned} |z^i - y^i| &\leq |\mathbf{z} - \mathbf{y}|_N = |\mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{z} - \mathbf{y})|_N \leq \\ &\leq M |\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{z} - \mathbf{y})|_N = M |\mathbf{h}(\mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{z})|_N = \\ &= M |\mathbf{h}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})|_N = M |\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{y} - \mathbf{u})|_N, \end{aligned}$$

da cui, se risultasse  $|\mathbf{y} - \mathbf{u}|_N < \sigma$ , dedurremmo

$$|z^i - y^i| \leq M |\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{y} - \mathbf{u})|_N < \frac{M\varepsilon}{p} |\mathbf{y} - \mathbf{u}|_N.$$

Allora, se si sceglie  $\delta < 2\sigma$ , otteniamo effettivamente

$$|\mathbf{y} - \mathbf{u}|_N \leq \frac{d\sqrt{N}}{2} < \frac{\delta}{2} < \sigma,$$

e pertanto otteniamo, per ogni  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$|z^i - u^i| \leq \frac{M\varepsilon}{p} |\mathbf{y} - \mathbf{u}|_N + \frac{d}{2} < \frac{M\sqrt{N}d\varepsilon}{2p} + \frac{d}{2} < \frac{d(1+\varepsilon)}{2}$$

pur di prendere  $p > M\sqrt{N}$ . Ciò mostra che  $\mathbf{z} \in C''_\varepsilon$ , come si voleva.

Proviamo la prima inclusione. Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{h}(C'_\varepsilon)$ : sarà  $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{v})$  con  $\mathbf{v} \in C'_\varepsilon$ . Mostriamo anzitutto che  $\mathbf{x} \in (\overline{\mathbf{g}(\Omega)})_{\mu/2}$  (e dunque  $\mathbf{x} \in B$ ): risulta infatti

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N &= |\mathbf{h}(\mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N = |\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})|_N \leq \\ &\leq M|\mathbf{v} - \mathbf{u}|_N \leq \frac{Md\sqrt{N}(1-\varepsilon)}{2} \leq \frac{Md\sqrt{N}}{2} \leq \frac{M\delta}{2}, \end{aligned}$$

e se si sceglie  $\delta < \frac{\mu}{M}$  si conclude che

$$|\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N \leq \frac{M\delta}{2} < \frac{\mu}{2}.$$

Ne segue che è ben definito  $\mathbf{y} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) \in A$ . Se proviamo che  $\mathbf{y} \in C$ , otteniamo  $\mathbf{x} \in \mathbf{g}(C)$ , che è la tesi. Poiché per ogni  $i \in \{1, \dots, N\}$  si ha

$$|y^i - u^i| \leq |y^i - v^i| + |v^i - u^i| < |y^i - v^i| + \frac{d(1-\varepsilon)}{2},$$

basterà mostrare che  $|y^i - v^i| < \frac{d\varepsilon}{2}$  per  $i = 1, \dots, N$ . Osserviamo che

$$|y^i - v^i| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{v}|_N = |\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x})|_N = |\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} - \mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))(\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u}))|_N;$$

quindi se si sceglie  $\delta < \frac{2\sigma}{M}$  il vettore  $\mathbf{x} \in (\overline{\mathbf{g}(\Omega)})_{\mu/2}$  verifica anche, grazie alla stima ottenuta in precedenza,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N < \frac{M\delta}{2} < \sigma,$$

da cui

$$|y^i - v^i| \leq |\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} - \mathbf{D}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))(\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u}))|_N < \frac{\varepsilon}{p} |\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N,$$

e dunque, finalmente,

$$|y^i - v^i| < \frac{\varepsilon}{p} |\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{u})|_N < \frac{\varepsilon Md\sqrt{N}}{2p} < \frac{\varepsilon d}{2}$$

pur di prendere  $p > M\sqrt{N}$ . Ciò prova, come già osservato, che  $\mathbf{x} \in \mathbf{g}(C)$ .

In definitiva, bisogna fissare a priori  $p > M\sqrt{N}$  e, in corrispondenza di  $\varepsilon$ , scegliere



dapprima  $\sigma$  e poi  $\delta < \min \left\{ \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{M}, \frac{2\sigma}{M} \right\}$ . Ciò conclude la dimostrazione del lemma 3.14.13.

□

Siamo ora in grado di trattare il caso generale di un diffeomorfismo  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  e di un generico insieme misurabile  $E \subseteq A$ . Sia  $\Omega$  un aperto limitato tale che  $\overline{\Omega} \subset A$ , poniamo  $\text{dist}(\overline{\Omega}, \partial A) = \mu > 0$ , e proviamo dapprima la tesi per tutti i sottoinsiemi misurabili  $E \subseteq \Omega$ . Cominciamo, al solito, con il caso in cui  $E \subseteq \Omega$  è un parallelepipedo. Fissato  $\varepsilon > 0$ , decomponiamo  $E$  nell'unione di una famiglia numerabile di sottocubi adiacenti  $C_i$ , centrati in punti  $\mathbf{u}_i \in E$  e ciascuno di spigolo minore di  $\delta/\sqrt{N}$ , ove  $\delta$  è il numero fornito dal lemma 3.14.13 (dunque il diametro dei cubi  $C_i$  è minore di  $\delta$ ). Inoltre, poiché la funzione  $J_{\mathbf{g}}$  è uniformemente continua in  $\overline{\Omega}$ , possiamo supporre, rimpicciolendo eventualmente  $\delta$ , che

$$\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \overline{\Omega}, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}'|_N < \delta \quad \Longrightarrow \quad |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) - J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}')| < \varepsilon.$$

Posto, per  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

il lemma 3.14.13 ci dice che

$$\mathbf{h}_i((C_i)'_{\varepsilon}) \subseteq \mathbf{g}(C_i) \subseteq \mathbf{h}_i((C_i)''_{\varepsilon}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Proviamo che  $\mathbf{g}(E)$  è misurabile: si ha

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)'_{\varepsilon}) \subseteq \mathbf{g}(E) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)''_{\varepsilon}),$$

con

$$m_N \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)'_{\varepsilon}) \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m_N(\mathbf{h}_i((C_i)'_{\varepsilon})) = (1 - \varepsilon)^N \sum_{i \in \mathbb{N}} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| m_N(C_i),$$

$$m_N \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)''_{\varepsilon}) \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m_N(\mathbf{h}_i((C_i)''_{\varepsilon})) = (1 + \varepsilon)^N \sum_{i \in \mathbb{N}} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| m_N(C_i);$$

dunque

$$m_N \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)''_{\varepsilon}) \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)'_{\varepsilon}) \right) \leq [(1 + \varepsilon)^N - (1 - \varepsilon)^N] \max_{\overline{\Omega}} |J_{\mathbf{g}}| m_N(E),$$

e poiché l'ultimo membro è infinitesimo con  $\varepsilon$ , si ha a maggior ragione

$$m_N^* \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)''_{\varepsilon}) \setminus \mathbf{g}(E) \right) \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

il che mostra, essendo  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{h}_i((C_i)_\varepsilon)''$  aperto, che  $\mathbf{g}(E)$  è misurabile. inoltre, dalla prima delle due inclusioni precedenti segue, per numerabile additività e per il risultato già noto per le applicazioni affini,

$$\begin{aligned}
m_N(\mathbf{g}(E)) &= \sum_{i=1}^{\infty} m_N(\mathbf{g}(C_i)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m_N(\mathbf{h}_i((C_i)_\varepsilon)') = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| \cdot m_N((C_i)_\varepsilon)' = (1 - \varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| \cdot m_N(C_i) = \\
&= (1 - \varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| \, d\mathbf{y} \geq \\
&\geq (1 - \varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{C_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} - \int_{C_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i) - J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \right] \geq \\
&\geq (1 - \varepsilon)^N \left[ \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} - \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} m_N(C_i) \right] = \\
&= (1 - \varepsilon)^N \left[ \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} - \varepsilon m_N(E) \right].
\end{aligned}$$

Analogamente, dalla seconda delle due inclusioni precedenti, per numerabile subadditività e per quanto già dimostrato ricaviamo

$$\begin{aligned}
m_N(\mathbf{g}(E)) &= \sum_{i=1}^{\infty} m_N(\mathbf{g}(C_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_N(\mathbf{h}_i((C_i)_\varepsilon)'' ) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| m_N((C_i)_\varepsilon)'' = (1 + \varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| m_N(C_i) = \\
&= (1 + \varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i)| \, d\mathbf{y} \leq \\
&\leq (1 + \varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{C_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}_i) - J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} + \int_{C_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \right] \leq \\
&\leq (1 + \varepsilon)^N \left[ \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} m_N(C_i) + \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \right] = \\
&= (1 + \varepsilon)^N \left[ \varepsilon m_N(E) + \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \right].
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la stima

$$\begin{aligned}
(1 - \varepsilon)^N \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} - \varepsilon(1 - \varepsilon)^N m_N(E) &\leq m_N(\mathbf{g}(E)) \leq \\
&\leq \varepsilon(1 + \varepsilon)^N m_N(E) + (1 + \varepsilon)^N \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y};
\end{aligned}$$

di qui, grazie all'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , otteniamo finalmente che

$$m_N(\mathbf{g}(E)) = \int_E |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y},$$

il che prova la tesi del teorema 3.14.1 quando  $E$  è un parallelepipedo contenuto in  $\Omega$ . Adesso, ripetendo quanto si è già fatto nel caso delle applicazioni affini, si ricava lo stesso risultato quando  $E$  è un pluri-parallelepipedo contenuto in  $\Omega$  (la misurabilità di  $\mathbf{g}(E)$  e la formula per la sua misura seguono per additività), e quando  $E \subseteq \Omega$  è aperto (in tal caso  $\mathbf{g}(E)$  è aperto e la formula segue per approssimazione dall'interno con pluri-parallelepipedi); per un chiuso  $E$ , la misurabilità di  $\mathbf{g}(E)$  è ovvia perché esso è chiuso, mentre la formula per la sua misura segue scrivendola per  $\Omega$  e per  $\Omega \setminus E$ , che sono aperti, e poi sottraendo. Infine, se  $E \subset \Omega$  è misurabile, per ogni  $n$  esistono un aperto  $A_n$  e un chiuso  $B_n$  tali che  $\Omega \supseteq A_n \supseteq E \supseteq B_n$  e  $m_N(A_n \setminus B_n) < \frac{1}{n}$ . Allora  $\mathbf{g}(A_n)$  è aperto,  $\mathbf{g}(B_n)$  è chiuso, con  $\mathbf{g}(A_n) \supseteq \mathbf{g}(E) \supseteq \mathbf{g}(B_n)$  e

$$m_n(\mathbf{g}(A_n) \setminus \mathbf{g}(B_n)) = m_N(\mathbf{g}(A_n \setminus B_n)) = \int_{A_n \setminus B_n} |J_{\mathbf{g}}| d\mathbf{y} \leq \max_{\Omega} |J_{\mathbf{g}}| \frac{1}{n};$$

ne segue, a maggior ragione,

$$m_N^*(\mathbf{g}(E) \setminus \mathbf{g}(B_n)) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

e dunque  $\mathbf{g}(E)$  è misurabile. Inoltre, essendo

$$m_N(\mathbf{g}(B_n)) = \int_{B_n} |J_{\mathbf{g}}| d\mathbf{y},$$

per  $n \rightarrow \infty$  si ha, per convergenza monotona,

$$m_N(\mathbf{g}(E)) = \int_E |J_{\mathbf{g}}| d\mathbf{y}.$$

Ora ci liberiamo dell'aperto  $\Omega$  e consideriamo un qualunque sottoinsieme misurabile  $E \subseteq A$ . Posto, per  $j \in \mathbb{N}^+$ ,

$$\Omega_j = \{\mathbf{x} \in A : d(\mathbf{x}, \partial A) > 1/j\},$$

la tesi del teorema è vera per  $E \cap \Omega_j$ , qualunque sia  $j$ . Utilizzando il teorema di B. Levi si deduce allora la tesi per  $E$ . Ciò conclude la dimostrazione del teorema 3.14.1.  $\square$

### Esercizi 3.14

1. Si verifichi che la misura di Lebesgue  $m_N$  è invariante per traslazioni, rotazioni e simmetrie.
2. Sia  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  un'omotetia di centro  $\mathbf{0}$  e rapporto  $a \in \mathbb{R}$ , ossia

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Si provi che per ogni insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  l'insieme  $\mathbf{g}(E)$  è a sua volta misurabile, e che

$$m_N(\mathbf{g}(E)) = |a|^N m_N(E).$$

3. Si verifichi che se  $R$  è un parallelepipedo di  $\mathbb{R}^N$  della forma  $R = \prod_{j=1}^N I_j$ , con gli  $I_j$  intervalli di  $\mathbb{R}$  non tutti chiusi, allora  $\bar{R} \setminus R$  è unione finita di parallelepipedi chiusi degeneri (ossia di misura nulla).

4. Calcolare i seguenti integrali:

(i)  $\int_A \ln(1 + xy) \, dx dy$ , ove  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, y \leq 2x, 2y \geq x\}$ ;

(ii)  $\int_B \sqrt{x+y} \, dx dy$ , ove  $B$  è l'insieme delimitato dalla retta  $y + x = \sqrt{2}$  e dalla parabola passante per i punti  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{2})$  con vertice in  $(0, 0)$ ;

(iii)  $\int_C \frac{1}{xy} \, dx dy$ , ove  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, 2 - 2x \leq y \leq 4 - 2x\}$ ;

(iv)  $\int_D (x+y)\sqrt{|x-y|} \, dx dy$ , ove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$ ;

(v)  $\int_E 2y(x-y) \sin(x^2 + y^2) \, dx dy$ , ove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \leq x \leq \sqrt{3}y\};$$

(vi)  $\int_F \frac{x}{y} \, dx dy$ , ove  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, x \leq y \leq 2x\}$ ;

(vii)  $\int_G x^2 y^2 (y^2 - x^2) \, dx dy$ , ove

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + 1 \leq y \leq x + 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\};$$

(viii)  $\int_H \sin^3(x^2 + y^2) \, dx dy$ , ove  $H \subset \mathbb{R}^2$  è l'insieme definito da

$$\frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \pi, \quad y \leq |x|.$$

(ix)  $\int_I y \, dx dy$ , ove  $I \subset \mathbb{R}^2$  è l'insieme definito da

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad -2 \leq y(x-2) \leq -1, \quad 1 \leq xy \leq 2.$$

(x)  $\int_J \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ , ove  $J$  è la regione piana interna alle due circonferenze  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ .

(xi)  $\int_K x \, dx dy$ , ove  $K$  è il dominio del primo quadrante interno alla circonferenza di centro  $(0, 1)$  e raggio 1 ed esterno alla circonferenza di centro  $(0, 1/2)$  e raggio  $1/2$ .

5. Calcolare i seguenti integrali:

(i)  $\int_A x^2 dx dy$ , ove  $A$  è il semicerchio di centro  $(r, 0)$  e raggio  $r > 0$ , contenuto nel semispazio  $y > 0$ ;

(ii)  $\int_B y e^x dx dy$ , ove  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq \cos \vartheta\}$ ;

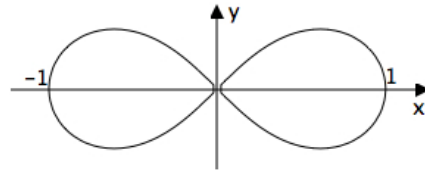
(iii)  $\int_C |y| dx dy$ , ove  $C \subset \mathbb{R}^2$  è la regione definita da  $1 \leq x^2 + y^2 \leq x + \frac{1}{4}$ ;

(iv)  $\int_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $D =$  trapezio di vertici  $(1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(3, 3)$ ;

(v)  $\int_E \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ , ove  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq r, x^2 + y^2 \geq r^2\}$  ( $r > 0$ );

(vi)  $\int_F \arctan \frac{y}{x} dx dy$ , ove  $F$  è il dominio del primo quadrante delimitato dalla circonferenza  $x^2 + y^2 = 4$ .

(vii)  $\int_G \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$ , ove  $G$  è la regione delimitata dalla curva (*lemniscata di Bernoulli*) di equazione  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ .



6. Provare che la funzione  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  è integrabile nella palla di centro  $(0, 0)$  e raggio 1, e calcolarne l'integrale.

7. Sia  $E$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  descritto, in coordinate polari, dalla disequaglianza

$$\rho \leq \alpha(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

ove  $\alpha$  è una funzione continua e non negativa su  $[0, 2\pi]$ . Si calcoli  $m_2(E)$ . Che cosa succede quando  $\alpha$  assume anche valori negativi?

8. Sia  $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq z \leq f(x)\}$ , ove  $f \in C[a, b]$  e  $0 \leq a < b$ . Si calcoli il volume dei due solidi ottenuti ruotando  $D$  attorno all'asse  $z$  ed attorno all'asse  $x$ .

9. (*Teorema di Pappo-Guldino*) Si provi che in  $\mathbb{R}^3$  il volume di un solido di rotazione è uguale al prodotto dell'area della figura ruotante per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro (esercizio 3.13.10).

10. Calcolare i seguenti integrali:

(i)  $\int_A x \sqrt{1 - y^2} dx dy dz$ , ove  $A$  è il dominio compreso fra il cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , il piano  $x + y + z = 8$  e il piano  $z = 0$ ;

(ii)  $m_3(B)$ , ove  $B$  è l'insieme delimitato dal paraboloido  $z = x^2 + y^2$ , dal cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , e dal piano  $z = 2$ ;

(iii)  $\int_C y^2 z \, dx dy dz$ , ove  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge 2z\}$ ;

(iv)  $\int_D \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(z - \sqrt{x^2 + y^2})\right) \, dx dy dz$ , ove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, 1 - z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

11. (Coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^N$ ) Fissato  $N \geq 3$ , sia  $\mathbf{G} : [0, \infty[ \times [0, \pi]^{N-2} \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^N$  l'applicazione data da  $\mathbf{G}(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-2}, \varphi) = \mathbf{x}$ , ove

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos \vartheta_1 \\ x^2 = \rho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ x^3 = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \\ \dots\dots\dots \\ x^{N-2} = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{N-3} \cos \vartheta_{N-2} \\ x^{N-1} = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{N-2} \cos \varphi \\ x^N = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{N-2} \sin \varphi. \end{cases}$$

(i) Posto  $\mathbf{n} = \frac{1}{\rho} \mathbf{G}(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-2}, \varphi)$ , si verifichi che  $|\mathbf{n}|_N = 1$ .

(ii) Si provi che

$$\begin{aligned} |J_{\mathbf{G}}(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-2}, \varphi)| &= \\ &= \rho^{N-1} (\sin \vartheta_1)^{N-2} (\sin \vartheta_2)^{N-3} \dots (\sin \vartheta_{N-3})^2 \cdot (\sin \vartheta_{N-2}). \end{aligned}$$

(iii) Si determini una restrizione  $\mathbf{g}$  di  $\mathbf{G}$  che sia iniettiva, oltre che surgettiva, su  $\mathbb{R}^N \setminus \Sigma$ , ove  $\Sigma$  è un opportuno insieme di misura nulla.

(iv) Posto  $B_N(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x}|_N \leq R\}$ , si ricavi la formula

$$m_N(B_N(1)) = \frac{1}{N(N-2)!!} \pi^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor},$$

ove  $\lfloor t \rfloor$  denota la parte intera del numero reale  $t$  e  $n!!$  è il prodotto di tutti i naturali fra 1 e  $n$  che hanno la stessa parità di  $n$  (convenendo che  $0!! = 1$ ).

12. Sia  $f : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile. Si provi che

$$\int_{B_N(R)} f(|\mathbf{x}|_N) \, d\mathbf{x} = N m_N(B_N(1)) \int_0^R f(r) r^{N-1} \, dr.$$

13. Si provi che per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$  e per ogni  $t, \tau > 0$  vale la relazione seguente:

$$(4\pi t)^{-N/2} (4\pi \tau)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_N^2}{4t}} e^{-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|_N^2}{4\tau}} \, d\mathbf{y} = [4\pi(t+\tau)]^{-N/2} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|_N^2}{4(t+\tau)}}.$$

[Traccia: utilizzare la sostituzione  $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t} + \frac{1}{\tau}}} \left( \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t} - \frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{\tau} \right)$ .]

### 3.15 Lo spazio $L^1$

Come sappiamo, la quantità  $\int_D |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$  non è una norma sull'insieme delle funzioni integrabili su un insieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ , poiché tale integrale può essere nullo senza che la funzione integranda sia identicamente nulla in  $D$ . Per aggirare questa difficoltà, utilizzeremo la relazione di equivalenza, già introdotta nell'osservazione 3.12.3,

$$f \simeq g \quad \iff \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{q.o. in } D,$$

definita nello spazio  $\mathcal{M}_D$  di tutte le funzioni misurabili su  $D$ , a valori in  $\overline{\mathbb{R}}$ . A noi interesserà l'insieme quoziente di  $\mathcal{M}_D$  rispetto a  $\simeq$ . Notiamo che tale quoziente eredita da  $\mathcal{M}_D$  la struttura di spazio vettoriale e di algebra: la somma e il prodotto sono definiti da  $[f] + [g] = [f + g]$  e  $[f] \cdot [g] = [fg]$ . È immediato verificare che queste definizioni sono ben poste.

In particolare, diamo la seguente

**Definizione 3.15.1** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\mathcal{L}^1(D)$  lo spazio vettoriale delle funzioni sommabili su  $D$ : l'insieme quoziente  $\mathcal{L}^1(D)/\simeq$  si indica con  $L^1(D)$ .*

Osserviamo che  $L^1(D)$  è uno spazio vettoriale. I suoi elementi non sono funzioni, ma *classi di equivalenza* di funzioni q.o. coincidenti; tuttavia, come è d'uso, continueremo a chiamarle *funzioni*, confondendo in effetti la classe  $[f]$  con il suo rappresentante  $f$ . Si tenga presente però che tali “funzioni” sono definite soltanto quasi ovunque e non punto per punto.

La motivazione per il passaggio da  $\mathcal{L}^1(D)$  a  $L^1(D)$  è fornita dal seguente fondamentale risultato:

**Teorema 3.15.2** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . La quantità*

$$\|f\|_1 = \int_D |f| d\mathbf{x}, \quad f \in \mathcal{L}^1(D),$$

*è invariante rispetto alla relazione  $\simeq$  e definisce una norma su  $L^1(D)$ ; inoltre  $L^1(D)$ , munito della norma  $\|\cdot\|_1$ , è uno spazio di Banach.*

**Dimostrazione** La quantità  $\|f\|_1$  dipende solo dalla classe  $[f]$  e non dal rappresentante  $f$ , in virtù dell'osservazione 3.10.7; le proprietà che fanno di essa una norma sono pressoché ovvie. Proviamo che  $L^1(D)$  è completo rispetto a questa norma: faremo uso del criterio di completezza espresso dal teorema 1.7.14.

Sia  $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione contenuta in  $L^1(D)$ , tale che  $\sum_{n=0}^{\infty} \|[f_n]\|_1 < \infty$ : faremo vedere che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} [f_n]$  converge in norma  $\|\cdot\|_1$  ad un elemento  $[f] \in L^1(D)$ .

Scegliamo, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , un elemento  $g_n \in [f_n]$ : allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_D |g_n| d\mathbf{x} < \infty.$$

Poniamo  $g(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} |g_n(\mathbf{x})|$ : la funzione  $g$  è ben definita e misurabile su  $D$ ; potrebbe valere sempre  $+\infty$ , ma si vede facilmente che essa è in realtà una funzione sommabile e dunque q.o. finita in  $D$ . Infatti, per il teorema di B. Levi risulta

$$\int_D g \, d\mathbf{x} = \int_D \sum_{n=0}^{\infty} |g_n| \, d\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_D |g_n| \, d\mathbf{x} < \infty.$$

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\mathbf{x})$  è assolutamente convergente per quasi ogni  $\mathbf{x} \in D$  e pertanto

$$\exists f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\mathbf{x}) \quad \text{q.o. in } D.$$

Completiamo la definizione di  $f$  ponendo  $f(\mathbf{x}) = 0$  nei punti  $\mathbf{x}$  in cui la serie sopra scritta non converge: la funzione  $f$  così definita risulta allora misurabile su  $D$ . Essa è inoltre sommabile, essendo, in virtù del lemma di Fatou,

$$\int_D |f| \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D \sum_{k=0}^n g_k \, d\mathbf{x} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_D |g_k| \, d\mathbf{x} < \infty;$$

quindi  $f$  definisce un elemento  $[f] \in L^1(D)$ . Proviamo che  $[f]$  è somma della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} [f_n]$  in  $L^1(D)$ : si ha infatti, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\left\| [f] - \sum_{k=0}^n [f_k] \right\|_1 = \int_D \left| f - \sum_{k=0}^n g_k \right| \, d\mathbf{x} = \int_D \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k \right| \, d\mathbf{x} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_1 \rightarrow 0,$$

il che prova la tesi.  $\square$

**Osservazioni 3.15.3 (1)** Da ora in poi confonderemo volutamente il generico elemento di  $L^1$ , cioè la classe di equivalenza, con uno dei rappresentanti di tale classe, che è una funzione sommabile. Questo modo di fare semplifica i discorsi e non provoca guai, quindi verrà sistematicamente adottato nel seguito. L'unica differenza che ne risulta è che le relazioni puntuali tra funzioni di  $L^1$  valgono solamente *quasi ovunque*, perché tali “funzioni” sono definite a meno di insiemi di misura nulla.

**(2)** A conferma di quanto detto in (1), notiamo che se  $f$  è una funzione continua e sommabile definita in  $\mathbb{R}^N$ , allora essa è l'unica funzione continua appartenente alla classe  $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ : infatti se  $g$  è un'altra funzione continua e sommabile, non coincidente con  $f$ , allora

$$m_N(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x})\}) > 0,$$

e quindi  $g$  non può essere equivalente a  $f$ .

## Spazi $L^p$

La costruzione che ha permesso di definire lo spazio  $L^1$  si può lievemente generalizzare per ottenere altri spazi di Banach: gli spazi  $L^p$ , ove  $p \geq 1$ . Utilizzeremo nuovamente la relazione di equivalenza  $\simeq$  introdotta all'inizio del paragrafo.



**Definizione 3.15.4** Fissiamo  $p \in [1, \infty[$  e un sottoinsieme misurabile  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Sia  $\mathcal{L}^p(D)$  lo spazio vettoriale delle funzioni misurabili tali che  $|f|^p$  è sommabile su  $D$ . L'insieme quoziente  $\mathcal{L}^p(D)/\simeq$  si indica con  $L^p(D)$ .

La norma di  $L^p(D)$  è data da

$$\|f\|_p = \left[ \int_D |f|^p d\mathbf{x} \right]^{1/p}, \quad f \in L^p(D);$$

naturalmente essa è ben definita, cioè non dipende dalla scelta del particolare rappresentante della classe  $f \in L^p(D)$ . Il fatto che si tratti effettivamente di una norma segue dalle disuguaglianze di Hölder e di Minkowski, dimostrate nell'esercizio 1.4.6. Con questa norma,  $L^p(D)$  è uno spazio di Banach: ciò si ottiene con dimostrazione analoga a quella del teorema 3.15.2 (si veda l'esercizio 3.15.9).

Di particolare importanza è il caso  $p = 2$ , perchè la norma di tale spazio è indotta dal prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2(D)} = \int_D f \bar{g} d\mathbf{x} \quad \forall f, g \in L^2(D).$$

Dunque  $L^2(D)$  è uno spazio di Hilbert.

Infine esaminiamo il caso limite  $p = \infty$ , che ha notevole interesse. Introduciamo anzitutto lo spazio delle funzioni "essenzialmente limitate".

**Definizione 3.15.5** Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f$  una funzione misurabile definita su  $D$ . Se  $A \subseteq D$  è un insieme misurabile, i numeri (finiti o no)

$$\text{supess}_A f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha \text{ q.o. in } A\},$$

$$\text{infess}_A f = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha \text{ q.o. in } A\}$$

si chiamano estremo superiore essenziale ed estremo inferiore essenziale di  $f$  in  $A$  (convenendo che  $\inf \emptyset = +\infty$  e  $\sup \emptyset = -\infty$ ).

**Definizione 3.15.6** Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f$  una funzione misurabile definita su  $D$ . Se risulta

$$\text{infess}_D f > -\infty \quad e \quad \text{supess}_D f < +\infty,$$

diremo che  $f$  è essenzialmente limitata in  $D$  e scriveremo  $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ .

Si vede subito che  $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$  se e solo se  $f$  è misurabile e  $\text{supess}_D |f| < +\infty$ .

**Esempi 3.15.7 (1)** La funzione  $f(x) = 5I_{\mathbb{Q}}(x) + \sin x$  verifica

$$\text{supess}_{\mathbb{R}} f = 1, \quad \text{infess}_{\mathbb{R}} f = -1.$$

**(2)** Se  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora per ogni aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  si ha

$$\text{supess}_A f = \sup_A f, \quad \text{infess}_A f = \inf_A f.$$

**Osservazione 3.15.8** Per ogni funzione  $f$  misurabile su  $D$  si ha (esercizio 3.15.15)

$$f(x) \geq \text{infess}_D f, \quad f(x) \leq \text{supess}_D f \quad \text{q.o. in } D.$$

Si verifica anche facilmente (esercizio 3.15.16) che  $\mathcal{L}^\infty(D)$  è uno spazio vettoriale e un'algebra.

**Definizione 3.15.9** *L'insieme quoziente  $\mathcal{L}^\infty(D)/\simeq$  si indica con  $L^\infty(D)$ .*

**Teorema 3.15.10** *Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . La quantità*

$$\|f\|_\infty = \text{supess}_D |f|, \quad f \in \mathcal{L}^\infty(D),$$

*è invariante rispetto alla relazione  $\simeq$  e definisce una norma su  $L^\infty(D)$ ; con questa norma  $L^\infty(D)$  è uno spazio di Banach.*

**Dimostrazione** Sia  $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ ; se  $g \simeq f$  è facile verificare che

$$\text{supess}_D |f| = \text{supess}_D |g|,$$

quindi la quantità  $\|f\|_\infty$  dipende solo dalla classe  $[f]$  e non da  $f$ . Verifichiamo che  $\|\cdot\|_\infty$  è una norma.

Anzitutto, ovviamente,  $\|f\|_\infty \geq 0$ ; se si ha  $\|f\|_\infty = 0$  allora per l'osservazione 3.15.8 si ha  $f(x) = 0$  q.o. in  $D$ , cioè  $f \simeq 0$ , ossia  $[f]$  è l'elemento neutro della somma in  $L^\infty(D)$ . Si ha poi  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$  (facile verifica usando la definizione di estremo superiore essenziale).

Infine, la subadditività di  $\|\cdot\|_\infty$  segue dall'esercizio 3.15.16.

Proviamo ora la completezza dello spazio normato  $(L^\infty(D), \|\cdot\|_\infty)$ . Per maggior chiarezza, utilizziamo la notazione  $[f]$  per indicare gli elementi di  $L^\infty(D)$ .

Sia dunque  $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $L^\infty(D)$ : ciò significa che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$\|[f_n] - [f_m]\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $g_n \in [f_n]$ ; allora

$$\text{supess}_D |g_n| = \|[f_n]\|_\infty, \quad \text{supess}_D |g_n - g_m| = \|[f_n] - [f_m]\|_\infty \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Posto per  $n, m \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x \in D : |g_n(x)| > \text{supess}_D |g_n|\},$$

$$A_{nm} = \{x \in D : |g_n(x) - g_m(x)| > \text{supess}_D |g_n - g_m|\},$$

dall'osservazione 3.15.8 segue che  $m_N(A_n) = m_N(A_{nm}) = 0$  per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$ ; dunque anche l'insieme

$$B = \left[ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right] \cup \left[ \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} A_{nm} \right]$$

ha misura nulla e si ha, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \sup_{D \setminus B} |g_n - g_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu, \quad \forall x \in D \setminus B.$$

Pertanto  $\{g_n\}$  è una successione di  $\mathcal{L}^\infty(D \setminus B)$  che è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme in  $D \setminus B$ . Dunque esiste una funzione  $g : D \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g_n \rightarrow g$  uniformemente in  $D \setminus B$  per  $n \rightarrow \infty$ . Tale  $g$  è misurabile su  $D \setminus B$  perché tali sono le  $g_n$ ; se prolunghiamo  $g$  a tutto  $D$  ponendola uguale a 0 in  $B$ , otteniamo che  $g$  è misurabile su  $D$ . Inoltre

$$\sup_{D \setminus B} |g| \leq \sup_{D \setminus B} |g| = \sup_D |g| < \infty,$$

cosicché la classe  $[g]$  individuata da  $g$  è un elemento di  $L^\infty(D)$ . Proviamo che  $[f_n] \rightarrow [g]$  in  $L^\infty(D)$ :

$$\|[f_n] - [g]\|_\infty = \sup_{D \setminus B} |g_n - g| = \sup_{D \setminus B} |g_n - g| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

## Teoremi di densità

È utile sapere se e quando è possibile approssimare gli elementi di  $L^p(D)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , rispetto alla norma di questi spazi, mediante funzioni che siano “migliori” in qualche senso. Come vedremo, vi sono svariati risultati di questo tipo.

Il primo di questi riguarda le funzioni semplici e nulle fuori da un insieme di misura finita.

**Proposizione 3.15.11** *Sia  $p \in [1, \infty[$  e sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Allora l'insieme  $\{f \in \mathcal{S}_0 : f(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in D^c\}$  è denso in  $L^p(D)$ .*

**Dimostrazione** Sia  $f \in L^p(D)$ . Utilizzando la proposizione 3.9.9 possiamo trovare una successione  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_0$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{q.o. in } D, \quad |\varphi_n(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})| \quad \text{q.o. in } D$$

(si ricordi l'osservazione 3.15.3). Dato che

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p \leq 2^p |f(\mathbf{x})|^p \quad \text{q.o. in } D,$$

il teorema di Lebesgue fornisce la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.15.12** Non possiamo aspettarci per il caso  $p = \infty$  un risultato analogo a quello della proposizione precedente; tuttavia l'insieme  $\mathcal{S}$  di tutte le funzioni semplici su  $\mathbb{R}^N$  è denso in  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$  in virtù dell'osservazione 3.9.10.

Fissato un qualsiasi aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ , consideriamo adesso lo spazio  $L^p(\Omega)$ , con  $1 \leq p < \infty$ : pressoché tutte le classi di funzioni regolari risultano dense in questo spazio.

**Proposizione 3.15.13** *Se  $p \in [1, \infty[$ , lo spazio  $C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$ .*

**Dimostrazione** Supponiamo dapprima  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Poiché, grazie alla proposizione precedente,  $\mathcal{S}_0$  è denso in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , basterà dimostrare che per ogni  $f \in \mathcal{S}_0$  vi è una funzione continua  $g$ , con  $|g|^p$  sommabile, arbitrariamente vicina ad essa; a questo scopo è chiaramente sufficiente considerare il caso  $f = I_E$ , con  $E$  sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  di misura finita.

Sia dunque  $\varepsilon > 0$ ; per la proposizione 3.7.4 esistono un aperto  $A$  ed un chiuso  $C$  tali che  $C \subseteq E \subseteq A$  e  $m_N(A \setminus C) < \varepsilon$ ; in particolare,  $m_N(A) < m_N(E) + \varepsilon < \infty$ . Poniamo

$$g(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, A^c)}{d(\mathbf{x}, A^c) + d(\mathbf{x}, C)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N;$$

si ha  $0 \leq g \leq 1$ ,  $g = 1$  su  $C$ ,  $g = 0$  su  $A^c$  ed inoltre  $g$  è continua. D'altra parte  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  perché

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^p d\mathbf{x} = \int_A g^p d\mathbf{x} \leq m_N(A) < \infty.$$

La tesi nel caso  $\Omega = \mathbb{R}^N$  segue allora dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |I_E - g|^p d\mathbf{x} = \int_{A \setminus C} |I_E - g|^p d\mathbf{x} \leq m_N(A \setminus C) < \varepsilon.$$

Sia ora  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e sia  $f \in L^p(\Omega)$ . La funzione  $\bar{f}$ , definita su  $\mathbb{R}^N$  ponendola uguale a  $f$  in  $\Omega$  ed uguale a 0 fuori di  $\Omega$ , appartiene a  $L^p(\mathbb{R}^N)$  e si ha ovviamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}|^p d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |f|^p d\mathbf{x}.$$

Per quanto già provato, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{g} \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$  tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f} - \bar{g}|^p d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

Ne segue che, posto  $g = \bar{g}|_{\Omega}$ , risulta  $g \in C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |f - g|^p d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f} - \bar{g}|^p d\mathbf{x} < \varepsilon. \quad \square$$

Consideriamo ora lo spazio  $C_0^0(\Omega)$  delle funzioni continue il cui *supporto*, cioè la chiusura dell'insieme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g(\mathbf{x}) \neq 0\}$ , è un compatto contenuto in  $\Omega$ .

**Proposizione 3.15.14** *Se  $p \in [1, \infty[$ , lo spazio  $C_0^0(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$ .*

**Dimostrazione** Basta provare, in virtù della proposizione precedente, che le funzioni di  $C_0^0(\Omega)$  approssimano nella norma di  $L^p(\Omega)$  quelle di  $C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ . Sia  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione crescente di compatti la cui unione sia  $\Omega$ , e fissiamo  $f \in C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ . Consideriamo le funzioni

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, K_{n+1}^c)}{d(\mathbf{x}, K_{n+1}^c) + d(\mathbf{x}, K_n)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega :$$

allora si ha  $f\varphi_n \in C_0^0(\Omega)$ ,  $f\varphi_n \rightarrow f$  puntualmente in  $\Omega$ ,  $|f\varphi_n|^p \leq |f|^p$  in  $\Omega$ ; ne segue, per il teorema di Lebesgue,  $f\varphi_n \rightarrow f$  in  $L^p(\Omega)$ .  $\square$

## Convoluzioni

Il “prodotto di convoluzione” fra due funzioni sommabili è un utilissimo strumento dell’analisi con il quale è possibile fornire teoremi di approssimazione, risolvere equazioni alle derivate parziali, e fare molte altre cose.

**Definizione 3.15.15** *Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Si chiama convoluzione fra  $f$  e  $g$  la funzione  $f \star g$  definita da*

$$f \star g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Non è chiaro, a priori, che  $f \star g$  sia ben definita. Il risultato che segue, comunque, chiarisce la questione.

**Lemma 3.15.16** *Siano  $f$  e  $g$  funzioni sommabili in  $\mathbb{R}^N$ . Allora l’integrale  $\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$  ha senso ed è finito per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ; pertanto la funzione  $f \star g$  è ben definita e sommabile su  $\mathbb{R}^N$ , e si ha*

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

**Dimostrazione** Osserviamo subito che  $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è una funzione misurabile su  $\mathbb{R}^N$ : infatti, posto  $E_\alpha = \{f > \alpha\}$ , si ha

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) > \alpha\} = \mathbf{x} - E_\alpha,$$

e quindi tale insieme è misurabile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Di più, dimostriamo che la funzione  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è misurabile in  $\mathbb{R}^{2N}$ . Anzitutto, ciò è vero quando  $f = I_E$ , con  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  misurabile: infatti si ha  $I_E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = I_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , ove

$$G = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2N} : \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E\};$$

d’altronde possiamo scrivere  $G$  come l’immagine di  $\mathbb{R} \times E$  mediante l’applicazione lineare  $\mathbf{L}$ , ove

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2N},$$

e siccome  $\mathbf{L}$  è (in particolare) un’applicazione affine, essa preserva la misurabilità. Pertanto, essendo  $\mathbb{R} \times E$  misurabile in  $\mathbb{R}^{2N}$ , tale è anche  $G$ . Poi, per linearità,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è misurabile quando  $f$  è una funzione semplice. Nel caso generale, esiste una successione di funzioni semplici  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge puntualmente a  $f$ : quindi  $f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è il limite puntuale delle funzioni misurabili  $\varphi_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  e dunque è misurabile. A questo punto applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione misurabile e non negativa  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})||g(\mathbf{y})|$ : si ottiene che la funzione  $\mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})||g(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$  è integrabile su  $\mathbb{R}^N$  e che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})||g(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} |g(\mathbf{y})||f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(\mathbf{y})| \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^N} |g(\mathbf{y})| \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{z})| d\mathbf{z} \right] d\mathbf{y} = \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Ne segue, intanto, che l'integrale  $\int_{\mathbb{R}^N} [\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y}] d\mathbf{x}$  è finito per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , e quindi  $f \star g$  è ben definita e fornisce un numero reale per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ . Inoltre, la funzione  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$  è sommabile su  $\mathbb{R}^{2N}$ ; ciò significa, grazie alla stima precedente, che  $f \star g$  è sommabile su  $\mathbb{R}^N$  e che

$$\|f \star g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| d\mathbf{x} \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad \square$$

È facile verificare, per cambiamento di variabili e per linearità, che

$$\begin{aligned} f \star g &= g \star f, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^N), \\ (f \star g) \star h &= f \star (g \star h) \quad \forall f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N), \\ (\lambda f_1 + \mu f_2) \star g &= \lambda f_1 \star g + \mu f_2 \star g \quad \forall f_1, f_2, g \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La convoluzione ha le seguenti proprietà regolarizzanti:

**Proposizione 3.15.17** *Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Valgono i seguenti fatti:*

(i) *se  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , allora  $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e*

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p;$$

(ii) *se  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , allora la funzione  $f \star g$  è uniformemente continua su  $\mathbb{R}^N$ ;*

(iii) *se  $g$  appartiene a  $C^1(\mathbb{R}^N)$  e  $g, Dg \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , allora  $f \star g \in C^1(\mathbb{R}^N)$  e*

$$D_i(f \star g)(\mathbf{x}) = f \star (D_i g)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, \dots, n;$$

(iv) *se  $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ , detti  $K_f, K_g$  e  $K_{f \star g}$  i supporti di  $f, g$  e  $f \star g$ , vale l'inclusione  $K_{f \star g} \subseteq \overline{K_f + K_g}$ .*

**Dimostrazione** (i) Se  $p = 1$  la tesi segue dal lemma 3.15.16. Se invece  $1 < p < \infty$ , detto  $q$  l'esponente coniugato di  $p$  (ossia  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) si ha, in virtù della disuguaglianza di Hölder e del teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f \star g|^p d\mathbf{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1/q} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1/p} |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right]^p d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \right]^{p/q} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \\ &\leq \|f\|_1^{p/q} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \right] |g(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} = \|f\|_1^{1+p/q} \cdot \|g\|_p^p = \\ &= \|f\|_1^p \cdot \|g\|_p^p, \end{aligned}$$

e ciò prova la tesi.

Infine, quando  $p = \infty$  si ha banalmente

$$|f \star g(\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

da cui la maggiorazione delle norme.

(ii) Se  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N$  risulta

$$\begin{aligned} |f \star g(\mathbf{x}) - f \star g(\mathbf{x}')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}' - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}' - \mathbf{x} + \mathbf{z})| \, d\mathbf{z} \cdot \|g\|_\infty \end{aligned}$$

da cui, grazie alla continuità delle traslazioni in  $L^1$  (esercizio 3.15.10), si ottiene

$$|f \star g(\mathbf{x}) - f \star g(\mathbf{x}')| < \varepsilon \quad \text{per } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_N < \delta_\varepsilon. \quad \square$$

(iii) Supponiamo dapprima  $f \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$  e fissiamo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ . Se  $0 < |t| \leq 1$ , dato che il prodotto di convoluzione è commutativo, possiamo scrivere, detto  $K$  il supporto di  $f$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f \star g(\mathbf{x} + t\mathbf{e}^i) - f \star g(\mathbf{x})}{t} - f \star D_i g(\mathbf{x}) \right| &= \\ &= \left| \int_K \left[ \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{e}^i - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{t} - D_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \leq \\ &\leq \int_K \left| \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{d\sigma} g(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \sigma \mathbf{e}_i) \, d\sigma - D_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right| |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq \\ &\leq \int_K \left| \frac{1}{t} \int_0^t |D_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \sigma \mathbf{e}_i) - D_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, d\sigma \right| |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Poiché  $D_i g$  è una funzione uniformemente continua sul compatto

$$H = \mathbf{x} - K + \overline{B(\mathbf{0}, 1)},$$

esiste  $\delta \in ]0, 1[$  per cui

$$|t| \leq \delta \implies |D_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \sigma t \mathbf{e}_i) - D_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y})| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{y} \in K, \forall \sigma \in [-1, 1],$$

da cui, se  $|t| \leq \delta$ ,

$$\left| \frac{f \star g(\mathbf{x} + t\mathbf{e}^i) - f \star g(\mathbf{x})}{t} - f \star D_i g(\mathbf{x}) \right| \leq \varepsilon \int_K |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

Ciò prova che

$$D_i(f \star g)(\mathbf{x}) = f \star D_i g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \forall f \in C_0^0(\mathbb{R}^N).$$

Sia ora  $f$  sommabile su  $\mathbb{R}^N$ . Esiste una successione  $\{f_n\} \subset C_0^0(\mathbb{R}^N)$  tale che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  risulta, per quanto dimostrato,  $D_i(f_n \star g) = f_n \star D_i g$ . Dalla limitatezza di  $g$  e  $D_i g$  e dalle relazioni

$$\|f_n \star g - f \star g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \|g\|_\infty, \quad \|f_n \star D_i g - f \star D_i g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \|D_i g\|_\infty$$

segue che

$$\begin{aligned} f_n \star g &\rightarrow f \star g \text{ uniformemente in } \mathbb{R}^N, \\ D_i(f_n \star g) &\rightarrow f \star D_i g \text{ uniformemente in } \mathbb{R}^N; \end{aligned}$$

pertanto, grazie al teorema 1.2.4,  $f \star g$  ha la derivata parziale  $i$ -sima e si ha  $D_i(f \star g) = f \star D_i g$ . Da (ii) segue infine che  $f \star g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ .

(iv) Siano  $K_f$ ,  $K_g$  e  $K_{f \star g}$  i supporti di  $f$ , di  $g$  e di  $f \star g$ , definiamo  $H = \overline{K_f + K_g}$ , ove

$$K_f + K_g = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} \in K_f, \mathbf{y} \in K_g\},$$

e proviamo che  $K_{f \star g}$  è contenuto in  $H$ . Infatti, sia  $\mathbf{x} \notin H$ : allora, essendo  $H$  chiuso, esiste una palla  $B$ , di centro  $\mathbf{x}$  e raggio positivo, disgiunta da  $H$  e quindi da  $K_{f \star g}$ , il che implica  $\mathbf{x}' - \mathbf{y} \notin K_f$  per ogni  $\mathbf{y} \in K_g$  e per ogni  $\mathbf{x}' \in B$ ; dunque  $f(\mathbf{x}' - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) = 0$  per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  e per ogni  $\mathbf{x}' \in B$ . Pertanto  $f \star g(\mathbf{x}') = 0$  per ogni  $\mathbf{x}' \in B$ , ed in particolare  $\mathbf{x} \notin K_{f \star g}$ .  $\square$

Osserviamo che, come conseguenza della proposizione precedente, la convoluzione è di classe  $C^\infty$  se almeno uno dei suoi “fattori” è di classe  $C^\infty$  ed è limitato insieme a tutte le sue derivate.

Un importante complemento alla proposizione precedente è dato dalla seguente disuguaglianza.

**Proposizione 3.15.18 (disuguaglianza di Young)** *Siano  $p, q \in [1, \infty]$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ . Se  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ , allora per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$  si ha  $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$  e*

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Si noti che risulta  $r = \frac{pq}{q+p-pq}$ , e da qui è facile dedurre che  $r \geq p$  e  $r \geq q$ . Osserviamo che la tesi include il caso in cui  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e di conseguenza  $r = \infty$ , nonché il caso in cui  $p = \infty$ , e dunque  $q = 1$  e  $r = \infty$ , oppure  $q = \infty$ , e dunque  $p = 1$  e  $r = \infty$ .

**Dimostrazione** Supponiamo, per cominciare,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  e quindi  $r \in ]1, \infty[$ . Denotiamo con  $q'$  l'esponente coniugato di  $q$  e poniamo  $s = p(1 - \frac{1}{q})$ : si vede subito allora che  $s \in ]0, 1[$ ,  $sq' = p$  e  $(1-s)r = p$ . Possiamo perciò scrivere per q.o.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , utilizzando la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} |f \star g(\mathbf{x})|^q &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1-s+s} |g(\mathbf{y})| dy \right]^q \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{(1-s)q} |g(\mathbf{y})|^q dy \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{sq'} dy \right]^{\frac{q}{q'}} = \\ &= [|f|^{(1-s)q} \star |g|^q](\mathbf{x}) \cdot \|f\|_p^{sq}. \end{aligned}$$

Notiamo che l'integrale che definisce la convoluzione  $|f|^{(1-s)q} \star |g|^q$  è q.o. finito: infatti  $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$  mentre  $|f|^{(1-s)q} \in L^{\frac{r}{q}}(\mathbb{R}^N)$ , e dunque per la proposizione 3.15.17 (i) si ha  $|f|^{(1-s)q} \star |g|^q \in L^{\frac{r}{q}}(\mathbb{R}^N)$ .



Consideriamo allora  $|f \star g(\mathbf{x})|^q$  alla potenza  $\frac{r}{q}$ , integriamo su  $\mathbb{R}^N$  ed eleviamo all'esponente  $\frac{q}{r}$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_r^q &= \left\| |f \star g|^q \right\|_{\frac{r}{q}} \leq \left\| |f|^{(1-s)q} \star |g|^q \right\|_{\frac{r}{q}} \cdot \|f\|_p^{sq} \leq \\ &\leq \left\| |f|^{(1-s)q} \right\|_{\frac{r}{q}} \cdot \| |g|^q \|_1 \cdot \|f\|_p^{sq} = \|f\|_p^{(1-s)q} \cdot \|g\|_q^q \cdot \|f\|_p^{sq}, \end{aligned}$$

ed infine

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Nel caso  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $r = +\infty$ , la tesi è immediata conseguenza della disuguaglianza di Hölder:

$$|f \star g(\mathbf{x})| \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right]^{\frac{1}{p}} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Nel caso  $p = r = 1$ ,  $q = +\infty$ , oppure  $p = +\infty$  e  $q = r = 1$ , la tesi segue dalla proposizione 3.15.17 (i).  $\square$

Le convoluzioni permettono di “regolarizzare” in modo standard tutte le funzioni sommabili: in altre parole, tramite le convoluzioni si fornisce un metodo per costruire approssimazioni di classe  $C^\infty$  di una funzione sommabile qualunque. A questo scopo, consideriamo una funzione  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tale che

$$\varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mathbf{x} = 1, \quad \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{per } |\mathbf{x}|_N \geq 1.$$

Una siffatta funzione è ad esempio  $\varphi(\mathbf{x}) = c_N f(|\mathbf{x}|_N^2 - 1)$ , ove

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

e  $c_N$  è una costante scelta in modo che l'integrale di  $\varphi$  valga proprio 1. Ciò premesso, si ha:

**Definizione 3.15.19** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $u \in L^1(\Omega)$  e pensiamo  $u$  prolungata a tutto  $\mathbb{R}^N$  ponendola uguale a 0 su  $\Omega^c$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  la funzione regolarizzata di  $u$  di parametro  $\varepsilon$  è*

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} u(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \varepsilon^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} u(\mathbf{z}) \varphi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Dalla proposizione 3.15.17 segue che  $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Inoltre, se  $u$  ha supporto compatto in  $\Omega$  allora per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo lo stesso vale per  $u_\varepsilon$ : infatti, basta osservare che il supporto della funzione  $\mathbf{z} \mapsto \varphi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{\varepsilon}\right)$  è contenuto nella palla  $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ ; quindi, detto  $K$  il supporto di  $u$ , per  $\varepsilon < d(K, \Omega^c)$  il supporto di  $u_\varepsilon$  è a sua volta, per la proposizione 3.15.17, un compatto di  $\Omega$ : in definitiva, posto  $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0^0(\Omega)$ , risulta  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ .

La funzione regolarizzata ha buonissime proprietà di convergenza, come mostra la seguente

**Proposizione 3.15.20** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $u : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione misurabile che pensiamo prolungata a 0 fuori di  $\Omega$ . Valgono i fatti seguenti:

- (i) se  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , allora  $\|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p$  per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- (ii) se  $u \in C_0^0(\Omega)$ , allora  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo e  $u_\varepsilon \rightarrow u$  uniformemente in  $\Omega$ .

**Dimostrazione** Proviamo dapprima (ii). Sappiamo che in questo caso si ha  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo. Inoltre, poiché  $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} = 1$ , si ha

$$|u_\varepsilon(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} [u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

e dall'uniforme continuità di  $u$  si deduce, per ogni  $\sigma > 0$ ,

$$|u_\varepsilon(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| < \sigma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

pur di prendere  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. Ciò prova che  $u_\varepsilon \rightarrow u$  uniformemente in  $\Omega$ . Proviamo (i). Cominciamo col dimostrare la relazione

$$|u_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})|^p \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right]^{1/p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Ciò è ovvio se  $p = 1$ ; se invece  $p > 1$  dalla disuguaglianza di Hölder si ha, detto  $q$  l'esponente coniugato di  $p$ :

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(\mathbf{x})| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})| \varphi(\mathbf{y})^{1/p} \varphi(\mathbf{y})^{1/q} \, d\mathbf{y} \leq \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})|^p \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right]^{1/p} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right]^{1/q} = \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})|^p \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right]^{1/p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

e la relazione sopra scritta è provata. Da essa, elevando alla potenza  $p$ -sima e integrando su  $\Omega$  entrambi i membri, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})|^p \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\mathbf{z})|^p \, d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Ciò premesso, sia  $u \in L^p(\Omega)$ . Notiamo che, per la proposizione 3.15.14, dato  $\sigma > 0$  esiste una funzione  $v \in C_0^0(\Omega)$  tale che  $\|v - u\|_p < \sigma$ . Denotiamo con  $K$  il supporto di  $v$ , che è un compatto di  $\Omega$ . Per la (ii) già provata, la regolarizzata  $v_\varepsilon$  di  $v$  verifica, per

$\varepsilon$  sufficientemente piccolo,  $\|v_\varepsilon - v\|_p < \sigma$ . Usando la linearità della convoluzione e la parte (i) si deduce, per  $\varepsilon$  piccolo,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_p &\leq \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_p + \|v_\varepsilon - v\|_p + \|v - u\|_p = \\ &= \|(u - v)_\varepsilon\|_p + \|v_\varepsilon - v\|_p + \|v - u\|_p \leq 2\|v - u\|_p + \|v_\varepsilon - v\|_p < 3\sigma \end{aligned}$$

e ciò prova che  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$ .  $\square$

**Corollario 3.15.21** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto e sia  $p \in [1, \infty[$ . Allora lo spazio  $C_0^\infty(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$ .*

**Dimostrazione** Sia  $u \in L^p(\Omega)$ . Dato  $\sigma > 0$ , esiste  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  tale che  $\|u - v\|_p < \sigma$ . Detto  $K$  il supporto di  $v$ , per  $\varepsilon < d(K, \Omega^c)$  la regolarizzata  $v_\varepsilon$  di  $v$  appartiene a  $C_0^\infty(\Omega)$  e converge a  $v$  uniformemente in  $\Omega$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; in particolare i supporti delle  $v_\varepsilon$ , per  $\varepsilon < \varepsilon_\sigma$ , sono tutti contenuti in un fissato compatto  $K' \subset \Omega$ . Dunque per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo si ha

$$\|u - v_\varepsilon\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p < \sigma + \|v - v_\varepsilon\|_\infty \cdot m_N(K')^{1/p} < 2\sigma.$$

Ciò prova la tesi.  $\square$

## Partizione dell'unità

Uno strumento utilissimo in svariate situazioni è la cosiddetta *partizione dell'unità*, che consiste nel costruire una famiglia di funzioni di classe  $C^\infty$ , i supporti delle quali siano contenuti in opportuni aperti, e la cui somma sia identicamente uguale a 1. Ciò permette di semplificare lo studio di vari fenomeni “localizzandoli” opportunamente.

**Proposizione 3.15.22** *Sia  $\{B_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  una successione di palle aperte di  $\mathbb{R}^N$ , le quali costituiscano un ricoprimento di  $\mathbb{R}^N$ , e siano tali che ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^N$  ne intersechi solo un numero finito. Allora esiste una successione di funzioni  $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , tali che:*

- (i) per ogni  $h \in \mathbb{N}$  il supporto di  $\varphi_h$  è contenuto in  $B_h$ ,
- (ii) risulta  $\sum_{h=0}^\infty \varphi_h(\mathbf{x}) = 1$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ .

La successione  $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  è detta *partizione dell'unità associata al ricoprimento*  $\{B_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ .

**Dimostrazione** Poniamo anzitutto  $B_h = B(\mathbf{x}_h, r_h)$  ed osserviamo che, eliminando eventualmente qualche palla  $B_h$ , possiamo supporre che nessuna palla sia totalmente inclusa nell'unione di altre, ossia che

$$B_h \setminus \bigcup_{k \neq h} B_k \neq \emptyset \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

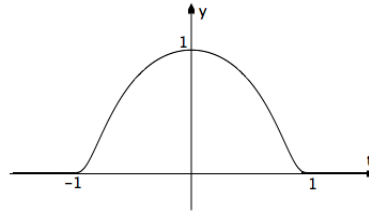
Andiamo adesso a costruire un *restringimento* del ricoprimento  $\{B_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ , ossia un nuovo ricoprimento  $\{B'_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  di  $\mathbb{R}^N$  tale che

$$B'_h \subset \overline{B'_h} \subset B_h \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Questo si può fare induttivamente: vi è un insieme finito  $I_1$  di indici  $h \neq 1$  tale che le palle  $B_h$  con  $h \in I_1$  intersecano  $\overline{B_1}$ ; quindi, indicando con  $A_1$  l'unione di tali palle, i due compatti  $\partial(B_1 \setminus A_1)$  e  $\partial B_1$  hanno distanza  $\delta_1 \in ]0, r_1[$ . Ne segue che la palla  $B'_1 = B(\mathbf{x}_1, r_1 - \frac{\delta_1}{2})$  è non vuota e la famiglia  $\{B'_1, B_h : h > 1\}$  ricopre ancora  $\mathbb{R}^N$ . Poi, una volta costruite le  $B'_h$  per  $1 \leq h < k$ , vi è un insieme finito  $I_k$  di indici  $h \neq k$  tale che le palle del ricoprimento  $\{B'_1, \dots, B'_{k-1}, B_h : h > k\}$  con  $h \in I_k$  intersecano  $\overline{B_k}$ ; quindi, indicando con  $A_k$  l'unione di tali palle, i due compatti  $\partial(B_k \setminus A_k)$  e  $\partial B_k$  hanno distanza positiva  $\delta_k \in ]0, r_k[$ . Perciò, la palla  $B'_k = B(\mathbf{x}_k, r_k - \frac{\delta_k}{2})$  è non vuota e la famiglia  $\{B'_1, \dots, B'_k, B_h : h > k\}$  è ancora un ricoprimento di  $\mathbb{R}^N$ . Iterando questo procedimento, si ottiene che la famiglia  $\{B'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è il restringimento desiderato.

Fatto ciò, consideriamo la funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) & \text{se } |t| < 1, \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1. \end{cases}$$



ed osserviamo che  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Posto  $B'_h = B(\mathbf{x}_h, r'_h)$ , definiamo

$$\beta_h(\mathbf{x}) = g\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_h|_N}{(r'_h)^2}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha  $\beta_h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $0 \leq \beta_h \leq 1$  e  $\beta_h = 0$  per  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_h|_N \geq r'_h$ , cosicché il supporto di  $\beta_h$  è contenuto in  $B_h$ . La serie  $\sum_{k=0}^\infty \beta_k(\mathbf{x})$  converge in ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  con somma strettamente positiva, poiché per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  vi è solo un numero finito di addendi non nulli dei quali almeno uno positivo (dato che vi è almeno un indice  $k$  tale che  $\mathbf{x} \in B'_k$ ). Quindi le funzioni

$$\alpha_h(\mathbf{x}) = \frac{\beta_h(\mathbf{x})}{\sum_{k=0}^\infty \beta_k(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

verificano la tesi.  $\square$

Più generalmente si può costruire una partizione dell'unità rispetto a un ricoprimento di un fissato aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ . Si ha infatti:

**Proposizione 3.15.23** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\{U_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  una successione di aperti contenuti in  $\Omega$ , i quali costituiscano un ricoprimento di  $\Omega$ , e siano tali che ogni compatto  $K \subset \Omega$  ne intersechi solo un numero finito. Allora esiste una successione di funzioni  $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ , tali che:*

- (i) per ogni  $h \in \mathbb{N}$  il supporto di  $\varphi_h$  è contenuto in  $U_h$ ,
- (ii) risulta  $\sum_{h=0}^\infty \varphi_h(\mathbf{x}) = 1$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Dimostrazione** Iniziamo con l'osservare che se  $A$  è aperto,  $C$  è chiuso e  $C \subset A \subset \overline{A} \subset \Omega$ , allora esiste una funzione  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  tale che  $0 \leq g \leq 1$ ,  $g = 1$  su  $C$  e  $g = 0$  su  $\Omega \setminus A$ . Ciò segue facilmente dal lemma di Urysohn (teorema 1.5.13), ma si può anche verificare direttamente: poiché  $\delta = d(C, \partial A) > 0$ , possiamo scegliere due aperti  $B_1$  e  $A_1$  tali che  $C \subset B_1 \subset \overline{B_1} \subset A_1 \subset \overline{A_1} \subset A$ , e poi definire

$$B_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, C) < \delta/3\}, \quad A_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, C) < 2\delta/3\}.$$

Allora la funzione

$$h(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, A_1^c)}{d(\mathbf{x}, \overline{B_1}) + d(\mathbf{x}, A_1^c)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

è continua, verifica  $0 \leq h \leq 1$  e il suo supporto coincide con  $\overline{A_1}$ .

Consideriamo ora la regolarizzata  $h_\varepsilon$  di  $h$  (definizione 3.15.19): la funzione  $h_\varepsilon$  appartiene a  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e, per la proposizione 3.15.20, il supporto di  $h_\varepsilon$  è contenuto in  $A$  se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo. Inoltre, è immediato verificare che per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo si ha anche  $h_\varepsilon = 1$  su  $C$ . Posto allora  $g = h_\varepsilon$ , si vede subito che la funzione  $g$  verifica quanto richiesto.

Ciò premesso, si può estrarre dal ricoprimento  $\{U_h\}$  un restringimento  $\{U'_h\}$ , in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione della proposizione precedente: con notazioni analoghe, posto  $A_1 = \bigcup_{h \in I_1} U_h$ , i due compatti  $\partial(B_1 \setminus A_1)$  e  $\partial B_1$  hanno distanza  $\delta_1 > 0$ ; posto  $U'_1 = \{\mathbf{x} \in U_1 : d(\mathbf{x}, \partial U_1) > \delta_1/2\}$ , la famiglia  $\{U'_1, U_h : h > 1\}$  ricopre ancora  $\Omega$ . Poi, costruiti  $U'_1, \dots, U'_{k-1}$  e posto  $A_k = \bigcup_{h \in I_k} U_h$ , i due compatti  $\partial(B_k \setminus A_k)$  e  $\partial B_k$  hanno distanza positiva  $\delta_k$  e quindi, definendo  $U'_k = \{\mathbf{x} \in U_k : d(\mathbf{x}, \partial U_k) > \delta_k/2\}$ , la famiglia  $\{U'_1, \dots, U'_k, U_h : h > k\}$  ricopre ancora  $\Omega$ . Iterando, la famiglia  $\{U'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è il restringimento desiderato.

Per ogni  $h \in \mathbb{N}$  sia allora  $g_h$  una funzione appartenente a  $C_0^\infty(\Omega)$ , con supporto contenuto in  $U'_h$ , tale che  $0 \leq g_h \leq 1$  e  $g_h = 1$  su  $U'_h \setminus \bigcup_{k \neq h} U_k$ . La serie  $\sum_{k=0}^\infty g_k(\mathbf{x})$  converge in  $\omega$  e la sua somma è strettamente positiva. Pertanto, le funzioni

$$\varphi_h(\mathbf{x}) = \frac{g_h(\mathbf{x})}{\sum_{k=0}^\infty g_k(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

verificano la tesi.  $\square$

### Esercizi 3.15

1. Si provi che ogni aperto di  $\mathbb{R}^N$  è l'unione di una successione crescente di compatti.
2. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e siano  $f_n, f$  funzioni di  $L^1(D)$  tali che  $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  q.o. in  $D$ . Si provi che se, inoltre,  $\int_D |f_n| d\mathbf{x} \rightarrow \int_D |f| d\mathbf{x}$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(D)$ , e che la tesi è in generale falsa senza quest'ultima ipotesi.  
[**Traccia:** si applichi il lemma di Fatou alla successione  $\{g_n\}$ , ove  $g_n|f| + |f_n| - |f - f_n|$ .]
3. Sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f \in L^1(D)$ . Si provi che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme misurabile  $A \subseteq D$  tale che  $m_N(A) < \infty$  e  $\int_{D \setminus A} |f| d\mathbf{x} < \varepsilon$ .
4. Provare che le funzioni  $f_n$  definite da

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n(e^{x/n} - 1)\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

appartengono a  $L^1(0, \infty)$ . Si dica se esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n dx.$$

5. Poniamo per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_n(x) = \left[ \frac{1}{nx} \right], \quad x > 0,$$

ove  $[y]$  indica la parte intera di  $y$ .

(i) Si verifichi che  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $]0, \infty[$ .

(ii) Si dica se  $\{f_n\}$  converge a 0 in  $L^1(0, \infty)$ .

6. Se  $\{f_n\}$  converge a  $f$  in  $L^1(D)$ , si provi che esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge q.o. in  $D$  a  $f$  in modo dominato, cioè verifica, per un'opportuna  $g \in L^1(D)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_{n_k}(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in D.$$

7. Siano  $p, q > 1$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , e sia  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  una funzione misurabile a supporto compatto. Si provi che per ogni funzione  $\psi \in L^q(\mathbb{R}^N)$  risulta

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|K(\cdot, \mathbf{y})\|_p d\mathbf{y} \cdot \|\psi\|_q;$$

scegliendo (quando ha senso)  $\psi(\mathbf{x}) = \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^{p-2} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , si deduca la *disuguaglianza integrale di Minkowski*

$$\left[ \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^p d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |K(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^p d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{p}} d\mathbf{y}.$$

8. Esibire un esempio di successione  $\{f_n\}$  che converga in  $L^1(a, b)$ , ma tale che per ogni  $x \in [a, b]$  la successione  $\{f_n(x)\}$  non abbia limite.

9. Sia  $p \in ]1, \infty[$  e sia  $D$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ . Si dimostri che  $L^p(D)$  è uno spazio di Banach.

[**Traccia:** scimmiettare la dimostrazione del teorema 3.15.2.]

10. (*Continuità in  $L^p$  delle traslazioni*) Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Posto, per  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ ,  $f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ , si provi che:

(i)  $f_{\mathbf{h}} \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e  $\|f_{\mathbf{h}}\|_p = \|f\|_p$  per ogni  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ ;

(ii)  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|f_{\mathbf{h}} - f\|_p = 0$ .

[**Traccia:** utilizzare la densità di  $\mathcal{S}_0$  e di  $C_0^0(\mathbb{R}^N)$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ .]

11. (*Continuità in  $L^p$  delle omotetie*) Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Posto, per  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $F_\lambda(\mathbf{x}) = f(\lambda\mathbf{x})$ , si provi che:

(i)  $F_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e  $\|F_\lambda\|_p = \frac{1}{|\lambda|^N} \|f\|_p$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

(ii)  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \|F_\lambda - f\|_p = 0$ .

12. Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} x^\alpha n^2 \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) dx,$$

e calcolarlo.

13. Sia  $g \in C(\mathbb{R})$  con  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Provare che per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} g(x) f\left(\frac{x}{n}\right) dx = 0.$$

14. Si provi che se  $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$  allora esiste un insieme misurabile  $A \subseteq D$  tale che  $m_N(D \setminus A) = 0$  e  $\text{supess}_D |f| = \sup_A |f|$ .

15. Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  misurabile e sia  $f$  una funzione misurabile su  $D$ . Provare che per ogni  $A \subseteq D$  misurabile si ha

$$f(x) \geq \text{infess}_A f \quad \text{e} \quad f(x) \leq \text{supess}_A f \quad \text{q.o. in } A.$$

16. Si provi che se  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(D)$  allora  $f + g, fg \in \mathcal{L}^\infty(D)$  e

$$\text{supess}_D |f + g| \leq \text{supess}_D |f| + \text{supess}_D |g|,$$

$$\text{supess}_D |fg| \leq \text{supess}_D |f| \cdot \text{supess}_D |g|.$$

17. Sia  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^\infty(D)$  una successione convergente puntualmente in  $D$  ad una funzione  $f$ . È vero che  $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ ?

18. (*Lemma di Riemann-Lebesgue*) Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , si provi che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos tx \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin tx \, dx = 0.$$

19. Si provi che l'insieme delle funzioni costanti a tratti è denso in  $L^p(\mathbb{R})$ .

[**Traccia:** si osservi che basta approssimare le funzioni di  $C_0^0(\mathbb{R})$ , e che una fissata  $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ , nulla fuori di  $[-M, M]$ , è integrabile secondo Riemann su  $[-M, M]$ .]

20. Sia  $E$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}$  con  $m_1(E) < \infty$ . Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \frac{1}{2 - \sin nx} dx = \frac{m_1(E)}{\sqrt{3}}.$$

[**Traccia:** se  $E$  è un intervallo, l'integrale si calcola esplicitamente e, usando la periodicità, si ottiene il risultato passando al limite; si approssimi poi  $I_E$ , utilizzando l'esercizio precedente, con funzioni costanti a tratti.]

21. Esibire un esempio di funzioni  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$  con supporti  $K_f$  e  $K_g$  tali che  $K_f + K_g$  non sia chiuso.
22. Verificare che  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$  per ogni  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ .
23. Calcolare esplicitamente la funzione  $I_{[a,b]} \star I_{[c,d]}$ , ove  $[a, b]$  e  $[c, d]$  sono generici intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$ .
24. Calcolare esplicitamente la funzione  $f \star g(\mathbf{x})$ , quando  $f(\mathbf{x}) = e^{-a|\mathbf{x}|_N^2}$  e  $g(\mathbf{x}) = e^{-b|\mathbf{x}|_N^2}$ , con  $a, b > 0$ .

### 3.16 Serie di Fourier

Studieremo il comportamento di *serie trigonometriche* della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad t \in \mathbb{R},$$

ove i coefficienti  $a_n, b_n$  sono numeri reali o complessi. Fra le tante motivazioni che conducono a questo studio ne citiamo due: una prettamente matematica ed una fisica. La motivazione matematica è semplice: ogni serie di potenze complesse

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

si riduce ad una serie trigonometrica scrivendo la variabile  $z$  nella forma esponenziale  $z = \rho e^{i\vartheta}$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \rho^n \cos n\vartheta + i a_n \rho^n \sin n\vartheta),$$

e in effetti la somma di alcune serie trigonometriche può essere calcolata proprio riconducendola, mediante questo artificio, alla somma di serie di potenze note (esercizio 3.16.3); inversamente, il comportamento di alcune serie di potenze sul bordo del loro cerchio di convergenza può essere determinato per mezzo delle proprietà di convergenza delle serie trigonometriche.

La motivazione fisica proviene dallo studio di fenomeni di tipo oscillatorio e vibratorio. Ad esempio, in acustica i suoni “puri”, quali il suono del diapason, sono il risultato di un’oscillazione armonica elementare della forma

$$a \sin(\omega t + \varphi),$$

dove  $a$  è l’*ampiezza*,  $\omega$  è la *frequenza* e  $\varphi$  è la *fase*. I suoni emessi dagli strumenti musicali sono invece il risultato della sovrapposizione di diversi tipi di onde sonore: per esempio, la corda di una chitarra, oscillando, produce suoni a diverse frequenze, teoricamente infinite, tutte multiple di una stessa frequenza fondamentale  $\omega$  propria della corda, che



dipende dalla sua lunghezza e dalla tensione. Il suono della corda è perciò descritto da una somma di funzioni periodiche dello stesso periodo  $T = \frac{1}{\omega}$ , del tipo

$$a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} \quad \text{oppure} \quad b_n \sin \frac{2\pi nt}{T}.$$

Siamo quindi ricondotti allo studio di serie trigonometriche della forma sopra descritta. Iniziamo la nostra analisi con alcune osservazioni preliminari.

- (*Periodicità*) La somma di una serie trigonometrica convergente è una funzione definita su  $\mathbb{R}$ , a valori reali o complessi, *periodica* di un certo periodo  $T$ ; noi supporremo sempre  $T = 2\pi$ . D'altra parte, ogni funzione definita su  $[-\pi, \pi[$ , oppure su  $[a, a + 2\pi[$  con  $a$  fissato numero reale, può essere prolungata a  $\mathbb{R}$  in modo  $2\pi$ -periodico. Quindi avrà senso considerare possibili approssimazioni trigonometriche di una arbitraria funzione definita solo su  $[-\pi, \pi[$ . Se il periodo  $T$  è diverso da  $2\pi$ , si avranno serie trigonometriche della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il passaggio dall'uno all'altro caso si fa con l'omotetia  $x \mapsto \frac{T}{2\pi}x$ , che trasforma funzioni  $T$ -periodiche in funzioni  $2\pi$ -periodiche.

- (*Notazione complessa*) Un modo equivalente di scrivere le serie trigonometriche si ottiene facendo uso della funzione esponenziale complessa: poiché

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}, \quad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i},$$

si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}),$$

ove

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e, viceversa,

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Scriveremo, più concisamente,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \quad \text{in luogo di} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}).$$

L'uso delle esponenziali complesse coinvolge coefficienti  $c_k$  complessi anche se i coefficienti originali  $a_n$  e  $b_n$  sono reali; naturalmente in quest'ultimo caso la somma della serie è reale. D'altra parte, la notazione complessa rende del tutto naturale lo studio di serie trigonometriche a coefficienti complessi. Per queste ragioni, nell'ambito della teoria delle serie trigonometriche le funzioni che considereremo saranno di regola a valori complessi.

- (Ortogonalità) È facile constatare che risulta (esercizio 1.3.2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m = 0 \\ \pi & \text{se } n = m > 0 \\ 0 & \text{se } n \neq m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt = \begin{cases} \pi & \text{se } n = m > 0 \\ 0 & \text{se } n \neq m \text{ oppure } n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt dt = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N};$$

Similmente si ha (esercizio 1.3.3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-iht} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k \neq h. \end{cases}$$

Ciò significa che la famiglia  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è costituita da funzioni mutuamente ortogonali rispetto al prodotto scalare complesso dello spazio  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  (costituito dalle funzioni a valori complessi il cui modulo appartiene a  $L^2(-\pi, \pi)$ )

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}),$$

mentre il sistema trigonometrico  $\{\cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$  è costituito da funzioni mutuamente ortogonali sia rispetto al prodotto scalare precedente, sia rispetto al prodotto scalare reale di  $L^2(-\pi, \pi)$  (costituito dalle funzioni a valori reali il cui quadrato è sommabile)

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt, \quad f, g \in L^2(-\pi, \pi).$$

Nel seguito scriveremo semplicemente  $L^2(-\pi, \pi)$  in entrambe le situazioni.

## Convergenza delle serie trigonometriche

Sotto quali ipotesi una serie trigonometrica è convergente? La risposta naturalmente dipende da quale tipo di convergenza si cerca. Una semplice condizione sufficiente per la convergenza uniforme è la seguente:

**Proposizione 3.16.1** *Siano  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  successioni reali o complesse. Se si ha  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ , allora la serie trigonometrica  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$  converge totalmente ed uniformemente in  $\mathbb{R}$ ; in particolare la sua somma è una funzione continua  $2\pi$ -periodica.*

**Dimostrazione** La tesi segue immediatamente osservando che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nt + b_n \sin nt| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty. \quad \square$$

Vi è anche una condizione più debole che è necessaria per la convergenza uniforme e che mostra lo stretto legame che deve intercorrere fra la somma della serie e i suoi coefficienti.

**Proposizione 3.16.2** *Supponiamo che la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

*sia uniformemente convergente in  $\mathbb{R}$ , e sia  $f$  la sua somma. Allora risulta*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

*o equivalentemente*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

**Dimostrazione** Fissato  $m \in \mathbb{N}$ , possiamo scrivere

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \cos mt \, dt.$$

La serie che compare nel secondo integrale è uniformemente convergente su  $\mathbb{R}$  alla funzione  $f(t) \cos mt$ , in quanto, per ipotesi, se  $p \rightarrow \infty$  si ha

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=p}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \cos mt \right| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=p}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right| \rightarrow 0.$$

Dunque, per il teorema 1.2.6, possiamo scambiare la serie con l'integrale, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt &= \frac{a_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt \, dt, \end{aligned}$$

da cui finalmente, in virtù delle relazioni di ortogonalità,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(si noti che questa relazione vale anche per  $m = 0$  in virtù della scelta, apparentemente strana, di aver preso nella serie come termine costante  $\frac{a_0}{2}$  anziché  $a_0$ ).

In modo del tutto analogo, moltiplicando per  $\sin mt$ , si trova che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

La relazione per i  $c_k$  segue allo stesso modo, oppure utilizzando le relazioni  $c_{\pm n} = \frac{1}{2}(a_n \mp ib_n)$ .  $\square$

**Osservazione 3.16.3** Si noti l'analogia con le serie di potenze: vi è una stretta relazione fra la somma di una serie trigonometrica ed i suoi coefficienti; tale relazione è di tipo integrale, e non differenziale come accade per le serie di potenze. Questo fatto ha due conseguenze. La prima è che se vogliamo determinare una serie trigonometrica che converga (uniformemente) ad una funzione continua assegnata, sarà obbligatorio prendere quella che ha per coefficienti i numeri  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt$  e  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt$ , il che peraltro non garantisce la convergenza della serie stessa. La seconda conseguenza è che, dal momento che tali coefficienti hanno senso per ogni funzione di  $L^1(-\pi, \pi)$ , sarà naturale considerare le serie trigonometriche associate a funzioni di  $L^1(-\pi, \pi)$  e non solo di  $C[-\pi, \pi]$ .

Le considerazioni dell'osservazione precedente portano alla seguente

**Definizione 3.16.4** Se  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , i numeri

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad n \in \mathbb{N}; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

si dicono coefficienti di Fourier di  $f$  relativi alla famiglia  $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ , mentre i numeri

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

si dicono coefficienti di Fourier di  $f$  relativi alla famiglia  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$$

si chiama serie di Fourier di  $f$ .

Vale la pena di ribadire che se  $f$  è una funzione reale, allora i suoi coefficienti di Fourier  $a_n$  e  $b_n$  sono tutti reali, mentre i  $c_k$  sono complessi. Per scrivere la serie di Fourier di una funzione  $f$  reale, nel calcolo dei coefficienti di Fourier la scelta dell'una o dell'altra famiglia di funzioni ortogonali è indifferente; l'unico "vantaggio" che si ha con l'uso del sistema dei seni e coseni è che i calcoli non coinvolgono numeri complessi. Lo svantaggio sta nel fatto che, fissato un intero  $m$ , per determinare  $a_m$  e  $b_m$  occorre calcolare due integrali, in luogo dell'(essenzialmente) unico integrale richiesto per trovare  $c_{\pm m}$ .

**Osservazione 3.16.5** Se  $f$  è una funzione *pari*, ossia  $f(-x) = f(x)$  per ogni  $x \in [-\pi, \pi]$ , si vede immediatamente che i coefficienti  $b_n$ , relativi ai seni, sono tutti nulli, mentre per gli  $a_n$ , relativi ai coseni, si ha

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt.$$

Dunque la serie di Fourier di una funzione pari è formata da soli coseni. Similmente, se  $f$  è *dispari*, cioè  $f(-x) = -f(x)$  per ogni  $x \in [-\pi, \pi]$ , gli  $a_n$  sono tutti nulli mentre i  $b_n$  diventano

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Dunque la serie di Fourier di una funzione dispari è formata da soli seni. Questi sono casi in cui l'uso del sistema  $\{\cos nx, \sin nx\}$  può risultare più vantaggioso rispetto all'uso delle esponenziali  $\{e^{ikt}\}$ .

## Proprietà di miglior approssimazione

Fissiamo una funzione  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  e siano  $\{a_n, b_n\}$  i suoi coefficienti di Fourier rispetto al sistema trigonometrico. Come si è osservato, e così come avviene per le serie di Taylor, non è detto che la serie di Fourier di  $f$  sia convergente, ed anche in caso di convergenza non è detto che la sua somma sia  $f$ , nemmeno quasi ovunque. Tuttavia le serie di Fourier, in quanto tali, godono di alcune importanti proprietà metriche nello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$ , munito del suo prodotto scalare naturale  $\langle f, g \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$  (ma se  $g$  è reale, naturalmente, si ha  $\overline{g(t)} = g(t)$ ) e della norma indotta  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt}$ . Introduciamo anzitutto la famiglia dei “polinomi trigonometrici”.

**Definizione 3.16.6** *Un polinomio trigonometrico è una funzione della forma*

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) = \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{ikx},$$

ove  $N \in \mathbb{N}^+$ ,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$  sono numeri reali o complessi e  $\gamma_{\pm k} = \frac{1}{2}(\alpha_k \mp i\beta_k)$ . Il grado di  $P$  è il massimo intero  $N$  tale che  $|\alpha_N| + |\beta_N| > 0$  (ovvero,  $|\gamma_N| + |\gamma_{-N}| > 0$ ). Indichiamo con  $\mathcal{T}$  la famiglia di tutti i polinomi trigonometrici e con  $\mathcal{T}_N$  la classe dei polinomi trigonometrici di grado non superiore a  $N$ .

Osserviamo che  $\mathcal{T}_N$  è un sottospazio vettoriale di  $L^2(-\pi, \pi)$  di dimensione  $2N + 1$ ; una base ortogonale è data dalla famiglia  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{1 \leq n \leq N}$  ovvero da  $\{e^{ikx}\}_{|k| \leq N}$ . Ciò premesso, vale il seguente risultato, noto come “proprietà di miglior approssimazione”:

**Teorema 3.16.7** *Sia  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  ed indichiamo con  $S_N$  la somma parziale  $N$ -sima della serie di Fourier di  $f$ , ossia*

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|_2^2 &= \min_{P \in \mathcal{T}_N} \|f - P\|_2^2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \pi \left[ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2. \end{aligned}$$

**Dimostrazione** Sia

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

un elemento di  $\mathcal{T}_N$ : allora possiamo scrivere

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, P \rangle_2.$$

D'altra parte, per l'ortogonalità delle funzioni trigonometriche, si trova

$$\begin{aligned} \|P\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cdot \overline{P(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{|\alpha_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^N (|\alpha_n|^2 \cos^2 nx + |\beta_n|^2 \sin^2 nx) \right] dx = \\ &= \pi \left[ \frac{|\alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) \right]; \end{aligned}$$

inoltre, per definizione di coefficienti di Fourier,

$$\begin{aligned} \langle f, P \rangle_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[ \frac{\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^N (\overline{\alpha_n} \cos nx + \overline{\beta_n} \sin nx) \right] dx = \\ &= \pi \left[ \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}) \right]. \end{aligned}$$

Ne deduciamo

$$\begin{aligned} \|f - P\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, P \rangle_2 = \\ &= \|f\|_2^2 + \pi \left[ \frac{|\alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) - 2\operatorname{Re} \left( \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}) \right) \right] = \\ &= \|f\|_2^2 + \pi \left[ \frac{|\alpha_0 - a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|\alpha_n - a_n|^2 + |\beta_n - b_n|^2) \right] - \\ &\quad - \pi \left[ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right]. \end{aligned}$$

Pertanto la quantità  $\|f - P\|_2^2$  è minima quando  $\alpha_n = a_n$  e  $\beta_n = b_n$  per  $n = 0, 1, \dots, N$ , cioè quando  $P = S_N$ ; ne segue la formula cercata.

Il calcolo relativo ai coefficienti  $c_k$  si fa in modo del tutto analogo; in alternativa, il risultato per i  $c_k$  si può facilmente dedurre dalle relazioni  $c_{\pm n} = a_n \mp ib_n$ .  $\square$

**Osservazione 3.16.8** Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , il polinomio trigonometrico  $S_N$  è dunque la *proiezione ortogonale* di  $f$  sul sottospazio  $\mathcal{T}_N$ .

**Corollario 3.16.9 (disuguaglianza di Bessel)** Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 2 \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

**Dimostrazione** Basta osservare che, per il teorema e l'osservazione precedente, le due somme finite coincidono con la quantità

$$\frac{1}{\pi} (\|f\|_2^2 - \|f - S_N\|_2^2),$$

ovviamente non superiore a  $\frac{1}{\pi} \|f\|_2^2$ .  $\square$

## Completezza del sistema trigonometrico

I risultati del paragrafo precedente mostrano che la serie di Fourier è il candidato migliore per ottenere approssimazioni di una funzione  $f$  dal punto di vista della norma  $\|\cdot\|_2$ . Mostriamo adesso che tali approssimazioni si riescono effettivamente ad ottenere: proveremo cioè che il sistema trigonometrico è *completo*, nel senso che le combinazioni lineari finite di elementi di questo sistema approssimano qualunque funzione di  $L^2(-\pi, \pi)$  nel senso sopra detto. Questo è senza dubbio il risultato basilare della teoria delle serie di Fourier.

**Teorema 3.16.10** *Per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  sia  $S_N$  la somma parziale  $N$ -sima della serie di Fourier di  $f$ . Allora*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = 0.$$

**Dimostrazione** In virtù della proprietà di miglior approssimazione, basterà far vedere che, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che per ciascun  $k \geq \nu$  risulti, per un opportuno polinomio trigonometrico  $T_k$  di grado non superiore a  $k$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_k(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

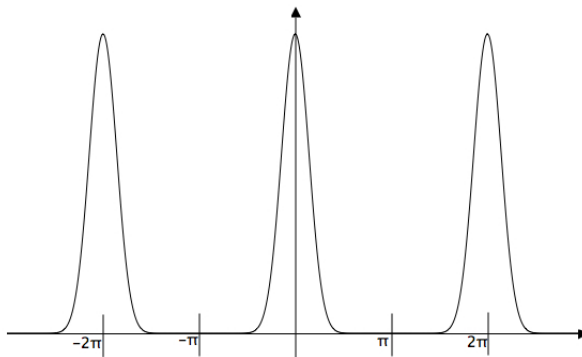
Il punto chiave della dimostrazione consiste nel costruire una successione  $\{Q_k\}$  di polinomi trigonometrici dotati delle seguenti proprietà:

- (a)  $Q_k(t) \geq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1$ ;
- (c) per ogni  $\delta > 0$  si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_k(t) = 0$ , ossia la successione  $\{Q_k\}$  converge uniformemente a 0 in  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

Una famiglia di polinomi trigonometrici che soddisfa questi requisiti è ad esempio la seguente:

$$Q_k(t) = \lambda_k \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k, \quad t \in \mathbb{R},$$

ove  $\lambda_k$  è una costante che si sceglie in modo che valga la condizione (b). Si noti che il grado di  $Q_k$  è uguale a  $k$ , come si vede subito utilizzando la relazione  $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ . La validità della condizione (a) è evidente; inoltre, essendo



$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt > \\ &> \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t dt = \frac{2}{\pi(k+1)}, \end{aligned}$$

risulta

$$Q_k(t) \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left( \frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k \quad \text{se } \delta \leq |t| \leq \pi,$$

e dunque vale anche la condizione (c).

Costruiamo ora una successione  $\{T_k\}$  di polinomi trigonometrici che, come vedremo, approssimano  $f$  nel modo richiesto; la definiamo mediante un *integrale di convoluzione*:

$$T_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)Q_k(y) dy, \quad t \in \mathbb{R},$$

ove  $f$  si intende prolungata a tutto  $\mathbb{R}$  per periodicità. Poiché  $Q_k$  è un polinomio trigonometrico di grado  $k$ , dunque della forma

$$Q_k(t) = \sum_{|n| \leq k} a_{nk} e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si ha, grazie alla periodicità e all'esercizio 3.16.1,

$$T_k(t) = \sum_{|n| \leq k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) a_{nk} e^{in(t-u)} du = \sum_{|n| \leq k} \left( \frac{a_{nk}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-inu} du \right) e^{int},$$

e pertanto  $T_k$  è a sua volta un polinomio trigonometrico di grado non superiore a  $k$ . Valutiamo la differenza  $\|f - T_k\|_2^2$ . Si ha

$$\begin{aligned} \|f - T_k\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)Q_k(y) dy \right|^2 dt \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t-y)|Q_k(y) dy \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder nell'integrale più interno, con esponenti  $p = q = 2$ , alle funzioni  $|f(t) - f(t-y)|Q_k(y)^{1/2}$  e  $Q_k(y)^{1/2}$ : si ottiene, essendo  $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(y) dy =$



$2\pi$ ,

$$\begin{aligned} \|f - T_k\|_2^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t-y)|^2 Q_k(y) dy dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|y| \leq \delta} |f(t) - f(t-y)|^2 Q_k(y) dy dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta < |y| \leq \pi} |f(t) - f(t-y)|^2 Q_k(y) dy dt = I + II, \end{aligned}$$

ove  $\delta \in ]0, \pi[$  è un numero fissato che preciseremo fra poco. Adesso notiamo che, in virtù del teorema di Tonelli e dell'esercizio 3.16.1,

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta < |y| \leq \pi} |f(t) - f(t-y)|^2 Q_k(y) dy dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |y| \leq \pi} Q_k(y) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y)|^2 dt \right] dy \leq \frac{2}{\pi} \|f\|_2^2 \int_{\delta < |y| \leq \pi} Q_k(y) dy. \end{aligned}$$

Poiché  $Q_k \rightarrow 0$  uniformemente nell'insieme  $\{\delta \leq |y| \leq \pi\}$ , in corrispondenza di  $\varepsilon$  esiste  $k_{\delta, \varepsilon} \in \mathbb{N}$  tale che

$$II \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_{\delta, \varepsilon}.$$

Per quanto riguarda il termine I, si può scrivere

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} Q_k(y) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t-y)|^2 dt dy.$$

A questo punto invochiamo la continuità delle traslazioni rispetto alla norma  $\|\cdot\|_2$  (esercizio 3.15.10), e deduciamo che in corrispondenza di  $\varepsilon$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t-y)|^2 dt < \varepsilon \quad \forall y \in ]0, \delta_\varepsilon].$$

Ne segue, per ogni  $\delta \in ]0, \delta_\varepsilon]$ ,

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t-y)|^2 dt \right] Q_k(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} Q_k(y) dy \leq \varepsilon,$$

ed in definitiva, scelto  $\delta = \delta_\varepsilon$ , otteniamo

$$\|f - T_k\|_2^2 \leq I + II < 2\varepsilon \quad \forall k \geq k_{\delta_\varepsilon, \varepsilon} = k'_\varepsilon.$$

Ciò prova la tesi.  $\square$

**Corollario 3.16.11 (identità di Bessel)** Per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  vale l'uguaglianza

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

**Dimostrazione** Per  $f$ , qualunque sia  $N \in \mathbb{N}$ , vale il risultato dell'osservazione 3.16.8: se  $N \rightarrow \infty$ , tenuto conto del teorema 3.16.10, otteniamo la tesi.  $\square$

**Corollario 3.16.12 (identità di Parseval)** Per ogni  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ , detti  $a_n, b_n, c_k$  e  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_k$  i coefficienti di Fourier di  $f$  e  $g$  rispetto alle famiglie  $\{\cos nx, \sin nx\}$  e  $\{e^{ikx}\}$ , vale l'uguaglianza

$$\frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{\gamma_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

**Dimostrazione** Anzitutto, le serie sono assolutamente convergenti in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nello spazio  $\ell^2$  e dell'identità di Bessel. Applicando questa identità a  $f \pm g$  e  $f \pm ig$ , ed osservando che tali funzioni hanno per coefficienti di Fourier i numeri  $a_n \pm \alpha_n$ ,  $b_n \pm \beta_n$  e  $a_n \pm i\alpha_n$ ,  $b_n \pm i\beta_n$ , si ha poi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [|f(t) + g(t)|^2 - |f(t) - g(t)|^2] dt + \\ &\quad + \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [|f(t) + ig(t)|^2 - |f(t) - ig(t)|^2] dt = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{|a_0 + \alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n + \alpha_n|^2 + |b_n + \beta_n|^2] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|a_0 - \alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n - \alpha_n|^2 + |b_n - \beta_n|^2] \right] + \\ &\quad + \frac{i}{4} \left[ \frac{|a_0 + i\alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n + i\alpha_n|^2 + |b_n + i\beta_n|^2] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|a_0 - i\alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n - i\alpha_n|^2 + |b_n - i\beta_n|^2] \right] = \\ &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}). \end{aligned}$$

Il risultato per i coefficienti  $c_k, \gamma_k$  si prova in modo del tutto analogo, oppure si ricava dalle relazioni  $c_{\pm n} = a_n \mp ib_n$ ,  $\gamma_{\pm n} = \alpha_n \mp i\beta_n$ .  $\square$

**Corollario 3.16.13 (lemma di Riemann-Lebesgue)** Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{|k| \rightarrow \infty} c_k = 0.$$

**Dimostrazione** Banale conseguenza della convergenza delle serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$  e  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$ .  $\square$

Si confronti questo risultato con quello dell'esercizio 3.15.18.

**Esempio 3.16.14** Consideriamo la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi - |x|}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(ove  $\operatorname{sgn}(x)$  vale 1 per  $x > 0$ ,  $-1$  per  $x < 0$  e 0 per  $x = 0$ ). Dato che  $f$  è dispari, si ha

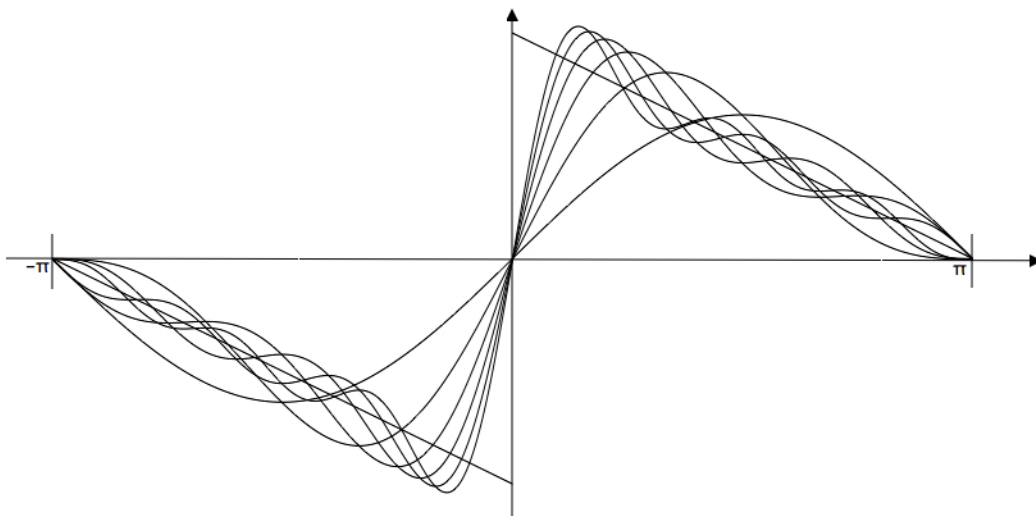
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mentre, integrando per parti, si trova facilmente

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Quindi la serie di Fourier di  $f$ , di soli seni, è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$



Dall'identità di Bessel ricaviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 \, dt = \frac{\pi^2}{6},$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Uno dei più celebri e importanti risultati sulla convergenza delle serie di Fourier è quello di Lennart Carleson, che nel 1966 dimostrò che la serie di Fourier di un'arbitraria funzione  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  converge quasi ovunque alla funzione stessa. Il risultato di Carleson

pose fine a più di mezzo secolo di congetture e tentativi, nel corso dei quali vennero esibiti svariati esempi di funzioni continue la cui serie di Fourier, effettivamente, converge soltanto quasi ovunque, e di funzioni sommabili (ma non di quadrato sommabile!) la cui serie di Fourier addirittura non converge in *alcun* punto.

Sotto ipotesi ragionevolmente blande su  $f$ , comunque, la convergenza puntuale in  $[-\pi, \pi]$  è assicurata dal seguente classico risultato: esso naturalmente non riguarda classi di funzioni appartenenti a  $L^2$ , ma singole funzioni di quadrato sommabile.

**Teorema 3.16.15 (di Dirichlet)** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $|f|^2$  sia sommabile in  $]-\pi, \pi[$ . Se in un punto  $x \in [-\pi, \pi]$  esistono finiti i limiti destro e sinistro di  $f$ :*

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h), \quad f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h),$$

*ed esistono finite anche la derivata destra e la derivata sinistra di  $f$ :*

$$f'(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}, \quad f'(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h},$$

*allora la serie di Fourier di  $f$  è convergente nel punto  $x$  e si ha*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

**Dimostrazione** Prima di tutto scriviamo in maniera più comoda la somma parziale  $S_N(x)$ . Si ha con facili calcoli

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(t-x) \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x) dt, \end{aligned}$$

ove si è introdotto il *nucleo di Dirichlet*  $D_N(s) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos ns$ . Notiamo che risulta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_N(s) ds = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}^+;$$

inoltre si ha

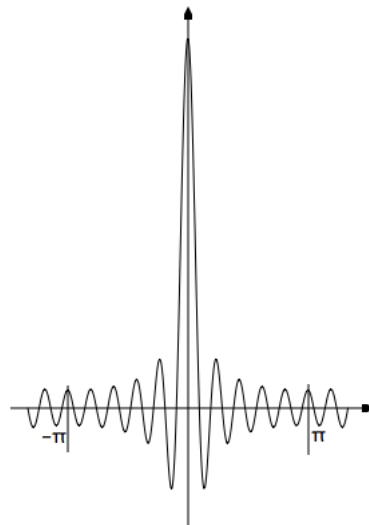
$$D_N(s) = \begin{cases} 2N + 1 & \text{se } s = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} & \text{se } s \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

come si vede sommando da 1 a  $N$  le relazioni

$$2 \sin \frac{s}{2} \cos ns = [\sin(n + \frac{1}{2})s - \sin(n - \frac{1}{2})s]$$

e dividendo poi per  $\sin \frac{s}{2}$ .

Si ha dunque, utilizzando la  $2\pi$ -periodicit  degli integrandi,



$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_N(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_N(s) ds, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_N(s) ds - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+s) - f(x^+)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+s) - f(x^-)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds. \end{aligned}$$

Valutiamo il primo addendo all'ultimo membro (la stima del secondo   completamente analoga e la ometteremo). Poich 

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2 \sin \frac{s}{2}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x+s) - f(x^+)}{s} = f'(x^+),$$

fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta \in ]0, \pi \wedge \varepsilon[$  tale che

$$\left| \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2 \sin \frac{s}{2}} - f'(x^+) \right| < \varepsilon \quad \forall s \in ]0, \delta[;$$

quindi

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+s) - f(x^+)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left[ \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2 \sin \frac{s}{2}} - f'(x^+) \right] \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) s ds \right| + \\
& + \frac{|f'(x^+)|}{\pi} \int_0^\delta \left| \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) s \right| ds + \\
& + \left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi [f(x+s) - f(x^+)] \frac{\sin Ns \cos \frac{s}{2} + \cos Ns \sin \frac{s}{2}}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \right| \leq \\
& \leq \frac{\varepsilon + |f'(x^+)|}{\pi} \varepsilon + \left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2 \tan \frac{s}{2}} \sin Ns ds \right| + \\
& + \left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2} \cos Ns ds \right|.
\end{aligned}$$

Il primo termine all'ultimo membro è minore di  $C\varepsilon$ , con  $C$  costante opportuna. Il secondo e terzo termine sono gli  $N$ -simi coefficienti di Fourier (uno relativo al seno, uno al coseno) delle due funzioni

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2 \tan \frac{s}{2}} & \text{se } s \in [\delta, \pi] \\ 0 & \text{se } s \in [-\pi, \delta[ \end{cases}$$

$$h(s) = \begin{cases} \frac{f(x+s) - f(x^+)}{2} & \text{se } s \in [\delta, \pi] \\ 0 & \text{se } s \in [-\pi, \delta[ \end{cases}$$

le quali appartengono a  $L^2(-\pi, \pi)$ ; quindi sia il secondo che il terzo termine sono infinitesimi per  $N \rightarrow \infty$  in virtù del lemma di Riemann-Lebesgue. Se ne conclude che esiste  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$  tale che

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+s) - f(x^+)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \right| < 2C\varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon.$$

Stimando, in modo completamente analogo, l'altro integrale

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+s) - f(x^-)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \right|$$

si ottiene

$$\left| S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| < 4C\varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon,$$

cioè la tesi.  $\square$

**Esempi 3.16.16 (1)** Riprendiamo in esame la funzione dell'esempio 3.16.14:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi - |x|}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Questa funzione, prolungata a  $\mathbb{R}$  per periodicità, verifica le ipotesi del teorema di Dirichlet in tutti i punti di  $[-\pi, \pi]$ , con

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

(anche nel punto di discontinuità 0). Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi - |x|}{2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

In particolare, scelto  $x = \pi/2$ , troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

come già sapevamo dallo sviluppo di Taylor dell'arcotangente, mentre scegliendo  $x = \pi/3$  si ricava

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**(2)** Consideriamo la restrizione a  $[0, \pi]$  della funzione dell'esempio (1):

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Di questa funzione possiamo ottenere tre sviluppi in serie trigonometrica distinti, tutti e tre convergenti. Se prolunghiamo  $f$  in modo dispari all'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , otteniamo la funzione dispari  $f$  dell'esempio 3.16.14, la cui serie di Fourier è di soli seni e converge in ogni punto a  $f(x)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi - |x|}{2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Se prolunghiamo  $g$  a  $[-\pi, \pi]$  in modo pari, otteniamo la funzione

$$h(x) = \frac{\pi - |x|}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi]:$$

per essa tutti i coefficienti  $b_n$  sono nulli, cosicché la sua serie di Fourier è di soli coseni; per i suoi coefficienti  $a_n$  si trova

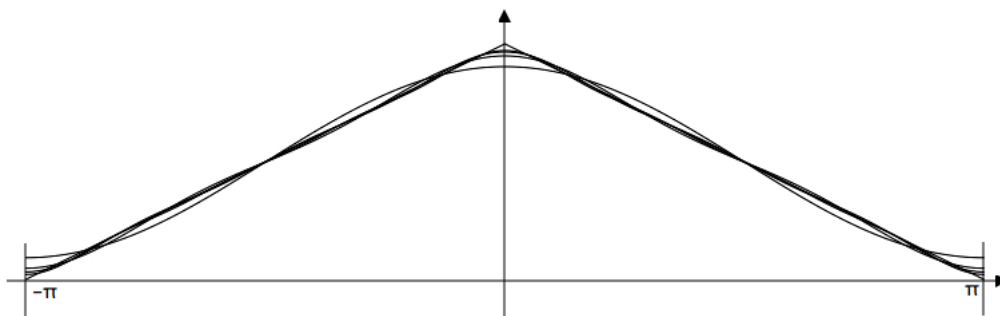
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(t) dt = \frac{\pi}{2},$$

ed anche, integrando per parti,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(t) \cos nt \, dt = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Il teorema di Dirichlet è applicabile in tutti i punti e si ha

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cos(2k+1)x}{\pi(2k+1)^2} = \frac{\pi - |x|}{2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$



Infine, possiamo sviluppare la funzione  $f$ , pensata prolungata a  $\mathbb{R}$  come funzione periodica di periodo  $T = \pi$ , in serie di Fourier rispetto al sistema  $\{\cos 2nt, \sin 2nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ . In questo caso  $f$  non è né pari né dispari: con facili calcoli si vede che

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - u}{2} \sin 2nu \, du = \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

mentre

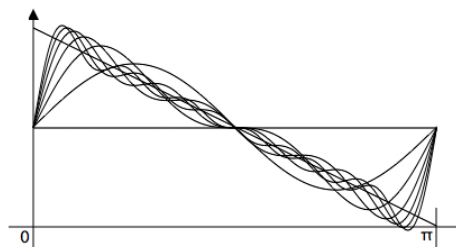
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - u}{2} \, du = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - u}{2} \cos 2nu \, du = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Pertanto, dal teorema di Dirichlet, che è applicabile, troviamo

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nu}{2n} = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{se } x \in ]0, \pi[ \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x = 0, \pi. \end{cases}$$

In definitiva, per  $x \in ]0, \pi[$  abbiamo i tre sviluppi convergenti

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n}.$$



## Convergenza uniforme di polinomi trigonometrici

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua  $2\pi$ -periodica, come sappiamo il teorema di Dirichlet non assicura che la sua serie di Fourier converga a  $f$  puntualmente, e tanto meno uniformemente. Tuttavia è possibile costruire una successione di polinomi trigonometrici che converga a  $f$  uniformemente.



**Definizione 3.16.17** Per ogni  $N \in \mathbb{N}$  il polinomio trigonometrico

$$F_N(s) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

che è la media aritmetica dei nuclei di Dirichlet, si chiama nucleo di Fejér.

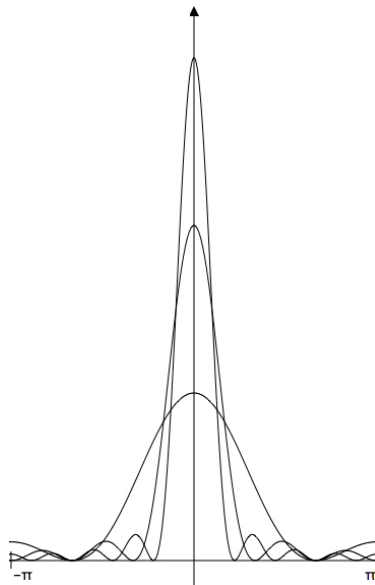
È facile verificare che

$$F_N(s) = \begin{cases} N+1 & \text{se } s = 0 \\ \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2} s}{\sin^2 \frac{s}{2}} & \text{se } s \neq 0; \end{cases}$$

infatti per  $s = 0$ , essendo  $D_n(0) = 2n + 1$ , si vede subito che

$$F_N(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (2n+1) = N+1,$$

mentre per  $s \neq 0$  possiamo scrivere



$$D_n(s) = \frac{\sin \frac{s}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) s}{\sin^2 \frac{s}{2}} = \frac{\cos ns - \cos(n+1)s}{2 \sin^2 \frac{s}{2}},$$

da cui

$$\begin{aligned} F_N(s) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{2 \sin^2 \frac{s}{2}} = \\ &= \frac{1}{N+1} \frac{1 - \cos(N+1)s}{2 \sin^2 \frac{s}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2} s}{\sin^2 \frac{s}{2}}; \end{aligned}$$

dunque  $F_N \geq 0$ . Osserviamo anche che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(s) ds = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) ds = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Vale allora il seguente risultato di convergenza uniforme:

**Teorema 3.16.18 (di Fejér)** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua  $2\pi$ -periodica. Allora la successione di polinomi trigonometrici, detti somme di Fejér

$$T_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) F_N(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  a  $f$  per  $N \rightarrow \infty$ .

**Dimostrazione** Sia  $\varepsilon > 0$ . La funzione  $f$  è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ , essendo continua e periodica. Quindi esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(t) - f(\sigma)| < \varepsilon$  non appena  $|t - \sigma| < \delta$ . Pertanto si ha per ogni  $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} |f(t) - T_N(t)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t-s)] F_N(s) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t) - f(t-s)| F_N(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |s| \leq \pi} |f(t) - f(t-s)| F_N(s) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon F_N(s) ds + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N+1} \int_{\delta < |s| \leq \pi} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2}s}{\sin^2 \frac{s}{2}} ds \leq \varepsilon + \frac{4\pi\|f\|_{\infty}}{(N+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Dunque per  $N$  sufficientemente grande risulta

$$|f(t) - T_N(t)| \leq 2\varepsilon \quad \forall t \in [-\pi, \pi],$$

il che implica la tesi per periodicità.  $\square$

## Il caso di coefficienti decrescenti e infinitesimi

Quando una serie trigonometrica ha coefficienti reali, decrescenti e infinitesimi, le sue proprietà di convergenza sono particolarmente interessanti. Iniziamo questa descrizione ricordando l'*identità di Abel* (proposizione 1.1.8), nonché i seguenti risultati, per la dimostrazione dei quali si rimanda agli appunti di Analisi I.

**Lemma 3.16.19 (di Abel)** *Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali. Posto  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , supponiamo che*

$$(i) |B_N| \leq M \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (ii) a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Allora la serie  $\sum a_n b_n$  converge e risulta

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq M a_0. \quad \square$$

**Osservazione 3.16.20** Alla stessa conclusione si arriva quando  $|B_N| \leq M$  per ogni  $N \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e, in luogo della decrescenza di  $\{a_n\}$ , si fa l'ipotesi che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$  sia convergente.

Più in generale, vale questa proprietà:

**Proposizione 3.16.21** *Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni di numeri reali, con  $\{a_n\}$  decrescente e infinitesima e  $b_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Posto  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty \quad \iff \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n < \infty,$$

ed in particolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n, \quad \text{ove } B_n = \sum_{k=1}^n b_k. \quad \square$$

Applicheremo il lemma di Abel alle due serie trigonometriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

supponendo naturalmente che  $\{a_n\}$  sia una successione reale, decrescente e infinitesima. Osserviamo che le somme di funzioni trigonometriche sono limitate per  $0 < |t| \leq \pi$ : infatti

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \cos nt \right| &= \left| \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N e^{int} \right| \leq \left| \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{2 - 2 \cos(N+1)t}{2 - 2 \cos t}} = \left| \frac{\sin \frac{N+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

e similmente

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nt \right| = \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N e^{int} \right| \leq \left| e^{it} \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} \right| \leq \sqrt{\frac{1 - \cos Nt}{1 - \cos t}} = \left| \frac{\sin \frac{N}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Queste proprietà ci serviranno nel seguito.

**Teorema 3.16.22** *Sia  $\{a_n\}$  una successione reale, decrescente e infinitesima. Allora le due serie  $\sum a_n \cos nx$  e  $\sum a_n \sin nx$  convergono puntualmente in  $[-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$  (la seconda anche in 0) ed uniformemente in  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  per ogni  $\delta \in ]0, \pi[$ .*

**Dimostrazione** Consideriamo la prima serie. Fissato  $\delta \in ]0, \pi[$ , applicando il lemma di Abel alle successioni  $\{a_n\}_{n \geq \nu}$  e  $\{\cos nx\}_{n \geq \nu}$ , con  $\nu \in \mathbb{N}$  fissato e  $|x| \in [\delta, \pi]$ , si ottiene che

$$\left| \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n \cos nx \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{\delta}{2}} a_\nu, \quad |x| \in [\delta, \pi],$$

cosicché la serie  $\sum a_n \cos nx$  converge uniformemente in  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ . Dall'arbitrarietà di  $\delta$  segue anche la convergenza puntuale in  $[-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$ . Nel punto 0 invece la somma della serie è un ben determinato valore, reale non negativo o  $+\infty$ .

Per la seconda serie si procede in modo del tutto analogo; c'è soltanto da osservare che, ovviamente, la serie converge puntualmente anche per  $x = 0$ , con somma 0.  $\square$

**Esempio 3.16.23** Grazie al teorema precedente, le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

definiscono due funzioni  $f$  e  $g$  periodiche, continue in  $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ . Tali funzioni non appartengono a  $L^2(-\pi, \pi)$ , poiché la serie  $\sum (\ln n)^{-2}$  è divergente. Invece le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

definiscono due funzioni periodiche, continue in  $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ , le quali appartengono a  $L^2(\pi, \pi)$  se e solo se  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

Ci chiediamo a questo punto se, fissata una successione reale  $\{a_n\}$  decrescente e infinitesima, la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia o no un elemento di  $L^1(-\pi, \pi)$  e se, in tal caso, la serie a secondo membro sia o no la serie di Fourier di  $f$ , intendendo con ciò che

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Una domanda analoga, naturalmente, va posta per la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 3.16.24** *Sia  $\{a_n\}$  una successione reale, decrescente e infinitesima e sia  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ . Allora*

$$f \in L^1(-\pi, \pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

*In tal caso, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  converge a  $f$  in  $L^1(-\pi, \pi)$  ed è la serie di Fourier di  $f$ .*

**Dimostrazione** Come abbiamo visto, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  ha per somma  $f(x)$  in ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Per  $0 < |x| \leq \pi$  possiamo scrivere, grazie all'identità di Abel,

$$\sum_{n=1}^N a_n \sin nx = a_N S_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n(x), \quad N \in \mathbb{N}^+,$$

ove  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \sin nx$ . Poichè, come si sa,  $|S_N(x)| \leq |\sin \frac{x}{2}|^{-1}$ , per  $N \rightarrow \infty$  si ricava

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) S_n(x).$$

Introduciamo il polinomio trigonometrico

$$T_N(x) = S_N(x) - \frac{1}{2} \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(N + \frac{1}{2}\right) x - \sin Nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos Nx}{2 \tan \frac{x}{2}},$$

il quale rispetto a  $S_N$  ha il vantaggio di essere non negativo per  $x \in [0, \pi]$ . Possiamo allora scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) T_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \sin nx.$$

La seconda serie a destra è totalmente convergente, e quindi convergente, in  $L^1(-\pi, \pi)$ , in quanto  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1$ . Per la prima serie a destra, invece, che è a termini positivi per  $x \in ]0, \pi]$ , si ha l'uguaglianza

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) T_n(x) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) |T_n(x)|,$$

quindi si può integrare termine a termine, ottenendo che tale serie converge in  $L^1(-\pi, \pi)$  se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \|T_n\|_{L^1(-\pi, \pi)} < \infty.$$

Ora si vede facilmente che

$$\|T_n\|_{L^1(-\pi, \pi)} = 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{2 \tan \frac{x}{2}} dx \leq 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{x} dx = 2 \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq c U_n,$$

ove  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , ed anche, con facili calcoli,

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{L^1(-\pi, \pi)} &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{2 \tan \frac{x}{2}} dx \geq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos nx}{2 \tan \frac{x}{2}} dx \geq \\ &\geq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq c U_n; \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) T_n \in L^1(-\pi, \pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) U_n < \infty.$$

Utilizzando infine la proposizione 3.16.21, concludiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) U_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

Proviamo ora che se  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  risulta  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Partiamo dalla relazione

$$\sum_{n=1}^N a_n \sin nx = a_N S_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \left[ T_n(x) + \frac{1}{2} \sin nx \right], \quad N \in \mathbb{N}^+.$$

Essendo  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$ , ripetendo la dimostrazione della proposizione 3.16.21 si verifica che la funzione  $a_N S_N(x)$ , avendo norma limitata dalla quantità  $a_N \ln N$ , ossia  $a_N U_N$ , converge a 0 in  $L^1(-\pi, \pi)$ . Dato che la somma a destra converge in  $L^1(-\pi, \pi)$ , lo stesso vale per la somma a sinistra: in altre parole,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  nel senso di  $L^1(-\pi, \pi)$ . Pertanto per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt = a_m. \quad \square$$

**Teorema 3.16.25** Sia  $\{a_n\}$  una successione reale tale che

$$(i) a_n \searrow 0, \quad (ii) n(a_n - a_{n+1}) \rightarrow 0, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}| < \infty$$

e sia  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ . Allora  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  è la serie di Fourier di  $f$ , ma in generale tale serie non converge a  $f$  in  $L^1(-\pi, \pi)$ .

**Dimostrazione** Come sappiamo, la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  è  $f(x)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ed esiste, finita o infinita, nei punti  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Per  $0 < |x| \leq \pi$  si ha, applicando due volte l'identità di Abel,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \cos nx &= a_N C_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) C_n(x) = \\ &= a_N C_N(x) + (a_{N-1} - a_N) G_{N-1}(x) + H_N(x), \end{aligned}$$

dove si è posto  $C_N(x) = \sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{1}{2}(D_N(x) - 1)$  e

$$G_N(x) = \sum_{n=1}^N C_n(x), \quad H_N(x) = \sum_{n=1}^{N-2} (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) G_n(x).$$

Notiamo che si ha, come osservato in precedenza,

$$|C_N(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad 0 < |x| \leq \pi,$$

e di conseguenza

$$|G_N(x)| \leq \frac{N}{2} \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Dunque, per  $N \rightarrow \infty$  si ricava  $a_N C_N(x) \rightarrow 0$  e  $(a_{N-1} - a_N) G_{N-1}(x) \rightarrow 0$ , da cui

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} H_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) G_n(x), \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Osserviamo che questa serie converge nella norma di  $L^1(-\pi, \pi)$ : infatti

$$G_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} (D_n(x) - 1) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (D_n(x) - 1) = \frac{N+1}{2} (F_N(x) - 1),$$

da cui

$$\|G_N\|_1 \leq \frac{N+1}{2} (\|F_N\|_1 + 1) \leq \frac{N+1}{2} (2\pi + 1) \leq 8N$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) G_n \right\|_1 &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}| \|G_n\|_1 \leq \\ &\leq 8 \sum_{n=N}^{\infty} n |a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Si conclude allora che la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2})G_n(x)$ , cioè  $f$ , appartiene a  $L^1(-\pi, \pi)$ .

Proviamo ora che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ , malgrado non ne sia stata provata la convergenza in  $L^1(-\pi, \pi)$ , è la serie di Fourier di  $f$ . Consideriamo le due funzioni ausiliarie

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \sin nx, \quad g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Osserviamo che  $g_N$  è continua e  $2\pi$ -periodica, e che possiamo scrivere

$$g_N(x) = \int_{-\pi}^x \sum_{n=1}^N a_n \cos nt dt = \int_{-\pi}^x [a_N C_N(t) + (a_{N-1} - a_N)G_{N-1}(t) + H_N(t)] dt.$$

Passiamo al limite per  $N \rightarrow \infty$  in questa relazione: si ha

$$\int_{-\pi}^x a_N C_N(t) dt = a_N \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}$$

e questa quantità è infinitesima, essendo il prodotto di  $a_N$  per una serie che converge puntualmente in virtù del teorema 3.16.22; inoltre

$$\left| \int_{-\pi}^x (a_{N-1} - a_N)G_{N-1}(t) dt \right| \leq (a_{N-1} - a_N) \|G_N\|_{L^1(-\pi, \pi)} \leq 8N(a_{N-1} - a_N) \rightarrow 0,$$

ed infine

$$\int_{-\pi}^x H_N(t) dt \rightarrow \int_{-\pi}^x f(t) dt,$$

dato che  $H_N \rightarrow f$  in  $L^1(-\pi, \pi)$ . Pertanto

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \sin nx \rightarrow \int_{-\pi}^x f(t) dt \quad \text{per } N \rightarrow \infty,$$

ossia

$$g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Osserviamo adesso che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$  converge *uniformemente*, in virtù del lemma che segue:

**Lemma 3.16.26** *Sia  $\{b_n\}$  una successione reale decrescente e infinitesima. Allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se e solo se la successione  $\{nb_n\}$  è infinitesima.*

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Fissato  $N \geq 2$  si ha, posto  $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ ,

$$\begin{aligned} \frac{Nb_N}{2} &\leq \sum_{n=k+1}^N b_n \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \sum_{n=k+1}^N b_n \sin \frac{n\pi}{2N} = \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \left| \sum_{n=k+1}^N b_n \sin nx \right|_{x=\frac{\pi}{2N}} \leq c \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=k+1}^N b_n \sin nx \right|, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per  $N \rightarrow \infty$ .

( $\Leftarrow$ ) Posto  $B_k = \sup_{n \geq k} n b_n$ , si ha chiaramente  $B_k \searrow 0$ . Per  $0 < |x| \leq \pi$  sia  $N = \left\lceil \frac{N}{|x|} \right\rceil$ , cosicché  $\frac{\pi}{N+1} < |x| \leq \frac{\pi}{N}$ . Allora per  $m > N$  possiamo scrivere

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} b_n \sin nx \right| \leq \left| \sum_{n=m}^{m+N-1} b_n \sin nx \right| + \left| \sum_{n=m+N}^{\infty} b_n \sin nx \right| = I + II;$$

d'altra parte

$$I \leq \sum_{n=m}^{m+N-1} b_n n |x| \leq N |x| b_m \leq \pi B_m,$$

mentre, utilizzando ancora una volta l'identità di Abel,

$$\begin{aligned} II &= \left| \sum_{n=m+N}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) S_n(x) - b_{m+N} S_{m+N-1}(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} b_{m+N} \leq \frac{2\pi}{|x|} b_{m+N} \leq 2\pi(N+1) b_{m+N} \leq 2\pi B_m. \end{aligned}$$

Pertanto, qualunque sia  $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ , si ha

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} b_n \sin nx \right| \leq c B_m \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow \infty,$$

e dunque la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  converge uniformemente.  $\square$

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema 3.16.25. Poiché  $g_n$  converge uniformemente a  $g$ , anzitutto anche  $g$  è  $2\pi$ -periodica e, in particolare,  $g(\pi) = 0$ . Inoltre per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  si ha, in virtù del teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt &= \frac{m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \int_t^{\pi} \sin mx \, dx + (-1)^m \right] dt = \\ &= \frac{m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^x f(t) \, dt \right] \sin mx \, dx + \frac{m}{\pi} (-1)^m g(\pi) = \\ &= \frac{m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin mx \, dx = \frac{m}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_N(x) \sin mx \, dx = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \frac{m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{m}{n} a_n \delta_{nm} = a_m, \end{aligned}$$

il che prova la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.16.27** I teoremi 3.16.25 e 3.16.24 valgono anche quando la successione  $\{a_n\}$  è infinitesima, ma decresce soltanto definitivamente: si tratterà di considerare, per un opportuno indice  $N_0 \geq 1$ , le serie  $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \cos nx$  e  $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \sin nx$ , che differiscono solo per un numero finito di termini (continui) da quelle originarie.



**Esempio 3.16.28** Consideriamo la successione  $a_n = \frac{1}{\ln n}$ ,  $n \geq 2$ , e completiamo per comodità la definizione ponendo  $a_0 = a_1 = 0$ . Questa successione è (definitivamente) decrescente e infinitesima; inoltre essa verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0,$$

in quanto

$$n(a_n - a_{n+1}) = \frac{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n \ln(n+1)} \leq \frac{1}{(\ln n)^2}.$$

Proviamo che si ha anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right| < \infty :$$

possiamo scrivere, dopo facili calcoli,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} &= \int_n^{n+1} \int_x^{x+1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\ln t} dt dx = \\ &= \int_n^{n+1} \int_x^{x+1} \left[ \frac{1}{t^2(\ln t)^2} + \frac{2}{t^2(\ln t)^3} \right] dt dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\left| \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right| \leq \frac{3}{n^2(\ln n)^2}.$$

Se ne deduce che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right| \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} < \infty,$$

che è quanto si voleva. Pertanto per le funzioni dell'esempio 3.16.23

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}, \quad g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

si hanno i fatti seguenti:  $g$  appartiene a  $C([- \pi, \pi] \setminus \{0\})$  ma non a  $L^1(-\pi, \pi)$  (perché  $\sum \frac{1}{n \ln n} = +\infty$ ), la serie che definisce  $g$  è la sua serie di Fourier, e la convergenza è solo in senso puntuale; invece  $f$  appartiene a  $C([- \pi, \pi] \setminus \{0\}) \cap L^1(-\pi, \pi)$ , la serie che definisce  $f$  è la sua serie di Fourier ma la convergenza è soltanto in senso puntuale. In tutti e due i casi la convergenza della serie è anche uniforme in  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  per ogni  $\delta \in ]0, \pi[$ .

### Esercizi 3.16

1. Si verifichi che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione  $T$ -periodica e sommabile in  $[0, T]$ , allora

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

2. Nello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$  poniamo

$$P = \{g \in L^2(-\pi, \pi) : g \text{ è pari}\}, \quad D = \{h \in L^2(-\pi, \pi) : h \text{ è dispari}\},$$

ove le proprietà di essere “pari” e “dispari” si intendono verificate soltanto quasi ovunque. Si provi che:

- (i)  $P, D$  sono sottospazi di  $L^2(-\pi, \pi)$  fra loro ortogonali;
- (ii) per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  esiste un'unica coppia di funzioni  $g, h$  tali che

$$g \in P, \quad h \in D, \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{q.o. in } [-\pi, \pi].$$

3. Calcolare la somma delle seguenti serie per  $|a| < 1$  e  $x \in \mathbb{R}$ :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} na^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} na^n \sin nx, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \sin nx.$$

4. Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione derivabile, con  $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ , tale che  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Detti  $c_k$  e  $\gamma_k$  i coefficienti di Fourier di  $f$  e  $f'$  rispetto alla famiglia  $\{e^{ikt}\}$ , si provi che

$$\gamma_k = ik c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Che cosa cambia se si elimina la condizione  $f(-\pi) = f(\pi)$ ?

5. Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione derivabile, con  $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ , tale che  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Si provi che alla serie di Fourier di  $f$  è applicabile la proposizione 3.16.1, e che dunque essa converge uniformemente a  $f$ .

6. Calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

7. Posto  $C_{\#}[-\pi, \pi] = \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$ , si provi che lo spazio  $\mathcal{T}$  dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio di Banach  $(C_{\#}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ .

[**Traccia:** Si dimostri che se  $g \in C^1[-\pi, \pi] \cap C_{\#}[-\pi, \pi]$  la serie di Fourier di  $g$  converge uniformemente, e poi si estenda il risultato, per densità, alle  $g \in C_{\#}[-\pi, \pi]$  utilizzando (ad esempio) i polinomi di Bernstein introdotti nella dimostrazione del teorema 1.7.9.]

8. (*Disuguaglianza di Bernstein*) Sia  $P(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx}$  un polinomio trigonometrico di grado al più  $N$ .

- (i) Si mostri che  $P$  ha al più  $2N$  zeri in  $[0, 2\pi[$ .
- (ii) Posto  $M = \|P\|_{\infty}$  e  $L = \frac{1}{N} \|P'\|_{\infty}$ , si verifichi che non è restrittivo ammettere che  $P'(0) = NL$ ; si supponga che  $M < L$ , si definisca  $S(x) = L \sin Nx - P(x)$  e si provi quanto segue:

- (a)  $(-1)^r S \left( \frac{(2r+1)\pi}{2N} \right) > 0$  per  $0 \leq r \leq 2N - 1$ ;  
 (b)  $S$  e  $S'$  hanno  $2N$  zeri distinti in  $[0, 2\pi[$ ;  
 (c)  $S'(0) = 0$  e  $S''(0) = 0$ ;  
 (d)  $S''$  ha più di  $2N$  zeri distinti in  $[0, 2\pi[$ .
- (iii) Si concluda che  $L \leq M$  e che quindi

$$\|P'\|_\infty \leq N\|P\|_\infty$$

per ogni polinomio trigonometrico di grado al più  $N$ .

9. Sia  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  tale che  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) x^n dx = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Si provi che  $f = 0$ .
10. Scrivere la serie di Fourier delle seguenti funzioni definite su  $[-\pi, \pi[$ :
- (i)  $f_1(x) = x^2$ ,    (ii)  $f_2(x) = e^x$ ,    (iii)  $f_3(x) = e^{-x}$ ,  
 (iv)  $f_4(x) = 1$ ,    (v)  $f_5(x) = (\pi - |x|)^2$ ,    (vi)  $f_6(x) = \operatorname{sgn}(x)$ .
11. Si scriva l'identità di Bessel per ciascuna delle funzioni del precedente esercizio.

12. Sia  $f \in L^2(0, T/2)$ , ove  $T > 0$  è un numero fissato, e siano  $F^p, F^d$  i prolungamenti pari e dispari di  $f$  all'intervallo  $[-T/2, T/2]$ . Si scrivano le serie di Fourier di  $F^p$  e  $F^d$  relative al sistema  $\{\cos \frac{2\pi nt}{T}, \sin \frac{2\pi nt}{T}\}$ , e quella di  $f$  rispetto al sistema  $\{\cos \frac{4\pi nt}{T}, \sin \frac{4\pi nt}{T}\}$ . In quale senso le tre serie verificano la proprietà di miglior approssimazione?
13. Si provi che se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  allora, detti  $a_n$  e  $b_n$  i coefficienti di Fourier di  $f$ , per ogni  $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$  si ha

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{a_0}{2} (b - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sin nb - \sin na) - b_n(\cos nb - \cos na)}{n}.$$

14. Sia  $k \in \mathbb{N}^+$  e sia  $f \in C^k(\mathbb{R})$  una funzione  $2\pi$ -periodica. Si provi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty.$$

15. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica, i cui coefficienti di Fourier  $a_n$  e  $b_n$  verificano

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Si provi che  $f \in C^k(\mathbb{R})$ .

16. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica. Si provi che  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m (|a_n| + |b_n|) = 0$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

17. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica e  $\alpha$ -hölderiana, con  $\alpha \in ]0, 1[$ : ciò significa che esiste una costante  $M \geq 0$  tale che

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|^\alpha \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Si provi che la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente a  $f$ .

[**Traccia:** si ripeta, con le dovute modifiche, la dimostrazione del teorema di Dirichlet.]

18. Si provi che se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica e  $\alpha$ -hölderiana, allora, detti  $c_k$  i suoi coefficienti di Fourier, esiste  $M \geq 0$  tale che  $|k|^\alpha |c_k| \leq M$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ .
19. Si considerino le seguenti serie trigonometriche:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 4^n x, & \text{(ii)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n} \sin 3^n x, \quad A \in ]1, 3[, \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \sin 3^n x, & \text{(iv)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin 2\pi n! x. \end{aligned}$$

Si verifichi anzitutto che tutte queste serie convergono uniformemente in  $\mathbb{R}$ ; indichiamo con  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  le rispettive somme.

- (i) Si provi che  $f_1$  è  $\frac{1}{2}$ -hölderiana ma non è  $\alpha$ -hölderiana per alcun  $\alpha > \frac{1}{2}$ .
- (ii) Si mostri che, posto  $\alpha = \log_3 A$ ,  $f_2$  è  $\alpha$ -hölderiana ma non è  $\beta$ -hölderiana per alcun  $\beta > \alpha$ .
- (iii) Si mostri che  $f_3$  è  $\alpha$ -hölderiana per ogni  $\alpha \in ]0, 1[$ , ma non è lipschitziana.
- (iv) Si provi infine che  $f_4$  non è  $\alpha$ -hölderiana per alcun  $\alpha \in ]0, 1[$ .
20. Siano  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ ; dopo averle prolungate a tutto  $\mathbb{R}$  in modo  $2\pi$ -periodico, si consideri l'integrale di convoluzione

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Determinare il legame fra i coefficienti di Fourier di  $F$  e quelli di  $f$  e  $g$ ; dedurne che la serie di Fourier di  $F$  converge uniformemente in  $[-\pi, \pi]$ .

21. Scrivere la serie di Fourier delle funzioni

$$f(x) = \sin ax, \quad g(x) = \cos ax, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

ove  $a$  è un fissato numero reale non intero.

22. Utilizzando le serie di Fourier di  $f(x) = x^2$  e di  $g(x) = x^4$ , calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

23. Calcolare per  $x \in [-\pi, \pi]$  la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

24. Provare la relazione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ D_N(t) - \frac{\sin Nt}{t} \right] dt = 0,$$

e dedurne che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

25. Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

relativa al sistema  $\{\cos \pi nt, \sin \pi nt\}$ , e dedurne la relazione

$$\sum_{k+0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

26. Sia  $f$  una funzione  $2\pi$  periodica tale che la sua restrizione a  $]0, 2\pi[$  sia decrescente. Si provi che i suoi coefficienti di Fourier  $b_n$  relativi ai seni sono non negativi.

27. Sia  $f$  una funzione  $2\pi$  periodica tale che la sua restrizione a  $]0, 2\pi[$  sia convessa. Si provi che i suoi coefficienti di Fourier  $a_n$  relativi ai coseni sono non negativi. [**Traccia:** si utilizzi il fatto che i rapporti incrementali di  $f$  sono crescenti.]

28. (*Fenomeno di Gibbs*) Sia  $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi - |x|}{2}$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ .

(i) Si provi che

$$S_N(x) - f(x) = \int_0^x D_N(t) dt - \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in ]0, \pi[.$$

(ii) Se ne deduca che

$$S_N\left(\frac{2\pi}{2N+1}\right) - f\left(\frac{2\pi}{2N+1}\right) \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N}^+.$$

(iii) Si concluda che per ogni  $\delta > 0$  si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sup_{0 < x \leq \delta} S_N(x) \right] - f(0^+) > 0.$$

(iv) Sia  $g$  una funzione limitata definita su  $[-\pi, \pi]$  e derivabile in  $[-\pi, \pi] \setminus \{\xi\}$ , con  $g' \in L^2(-\pi, \pi)$  e  $g(-\pi) = g(\pi)$ ; supponiamo inoltre che nel punto  $\xi$  esistano finiti  $g(\xi^+)$ ,  $g(\xi^-)$ ,  $g'(\xi^+)$  e  $g'(\xi^-)$ . Si dimostri che la serie di Fourier di  $g$  presenta il *fenomeno di Gibbs* nel punto  $\xi$ , vale a dire si provi che:

(a) la funzione

$$\Delta(x) = g(x) - \frac{g(\xi^+) - g(\xi^-)}{\pi} \operatorname{sgn}(x - \xi) \frac{\pi - |x - \xi|}{2}$$

è continua in  $[-\pi, \pi]$ ;

(b) la serie di Fourier di  $\Delta$  converge uniformemente in  $[-\pi, \pi]$ ;

(c) le somme parziali  $S_N$  della serie di Fourier di  $g$  verificano, per ogni  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\xi - \delta < x < \xi + \delta} |S_N(x) - g(\xi^+)| > 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\xi - \delta < x < \xi} |S_N(x) - g(\xi^-)| > 0.$$

29. Sia  $f$  una funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $f \in L^p(-\pi, \pi)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Si provi che le somme di Fejér di  $f$  convergono a  $f$  in  $L^p(-\pi, \pi)$ .

30. Sia  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  e sia  $\sum a_n \sin nx$  la sua serie di Fourier. Si provi che le somme parziali  $\sum_{n=1}^N a_n \sin nx$  sono limitate da un'opportuna costante  $M$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e per ogni  $N \in \mathbb{N}^+$  se e solo se la successione  $\{na_n\}$  è limitata.

### 3.17 Il metodo di separazione delle variabili

L'uso delle serie di Fourier permette di risolvere svariati problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali che provengono dalla fisica matematica.

Consideriamo, come primo esempio, l'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in ]0, \ell[, \quad t > 0,$$

che descrive matematicamente il processo di conduzione del calore ed altri fenomeni diffusivi. Data una sottile asta metallica di lunghezza  $\ell$ , isolata termicamente, se indichiamo con  $u(x, t)$  la temperatura dell'asta nel punto  $x$  all'istante  $t$ , la funzione  $u$  soddisfa l'equazione sopra scritta; la costante  $\alpha^2$  è il coefficiente di diffusione termica e dipende solo dal materiale costitutivo dell'asta. Per conoscere la temperatura lungo l'asta ad ogni istante, occorre conoscere:

(a) la distribuzione iniziale di temperatura:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, \ell];$$

(b) le condizioni alle estremità dell'asta: essendo termicamente isolata, essa riceverà o cederà calore soltanto attraverso le sue estremità. Potremo richiedere, ad esempio, che tali estremità vengano mantenute a temperatura costante, quindi nulla rispetto ad un'opportuna unità di misura:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t > 0,$$

oppure che esse siano isolate, in modo da non poter essere attraversate da flussi di calore:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t > 0;$$

altre condizioni ancora sono possibili.

Consideriamo dunque il *problema di Cauchy-Dirichlet*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \ell], \end{cases}$$

ove  $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua assegnata. Poiché  $u$  rappresenta una temperatura, ci interessano soluzioni reali, che richiederemo continue in  $[0, \ell] \times [0, \infty[$  e tali che  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  siano continue in  $]0, \ell[ \times ]0, \infty[$ . Il metodo di separazione delle variabili consiste nel ricercare una soluzione  $u$  della forma speciale

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

con  $X : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni regolari non nulle da determinare. Imponendo che  $X \cdot T$  risolva l'equazione differenziale si trova

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad \forall x \in ]0, \ell[, \forall t > 0,$$

da cui

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \quad \forall x \in ]0, \ell[, \forall t > 0.$$

Poiché il primo membro è indipendente da  $t$  e il secondo è indipendente da  $x$ , esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \quad \forall x \in ]0, \ell[, \forall t > 0;$$

inoltre dalle condizioni  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  si ricava  $X(0) = X(\ell) = 0$ . La funzione  $X$  deve dunque risolvere il problema

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), & x \in ]0, \ell[, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Questo problema ha sempre la soluzione nulla, ma per certi valori di  $\lambda$  (gli *autovalori* del problema) esso ha soluzioni non nulle (i corrispondenti *autovettori*): più precisamente si ha la situazione seguente.

- Se  $\lambda = 0$ , la soluzione generale dell'equazione  $X'' = 0$  è

$$X(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

ma dalle condizioni  $X(0) = X(\ell) = 0$  segue subito  $A = B = 0$ .

- Se  $\lambda > 0$ , la soluzione generale è

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

e nuovamente le condizioni agli estremi  $A + B = 0$ ,  $Ae^{\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0$  ci dicono che  $A = B = 0$ .

- Se  $\lambda < 0$ , la soluzione generale è

$$X(x) = A \cos \sqrt{-\lambda}x + B \sin \sqrt{-\lambda}x, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

con le condizioni  $A = 0$ ,  $B \sin \sqrt{-\lambda}\ell = 0$ : quindi è  $A = B = 0$ , oppure  $\sqrt{-\lambda}\ell = k\pi$  per qualche  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , cioè  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$  per qualche  $n \in \mathbb{N}^+$ , nel qual caso  $A$  è nullo ma  $B$  è arbitrario. Si trova allora la soluzione, che denotiamo con  $X_n$ ,

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in [0, \ell],$$

ove  $B_n$  è una costante arbitraria.

Adesso andiamo a risolvere la seconda equazione per i valori di  $\lambda$  che sono stati selezionati, cioè per  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ . La soluzione generale, che denotiamo con  $T_n$ , dell'equazione

$$T'(t) = -\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}T(t), \quad t > 0,$$

è data da

$$T_n(t) = D_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{\ell^2}}, \quad t > 0,$$

ove  $D_n$  è una costante arbitraria. In definitiva, per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  abbiamo una candidata soluzione per il nostro problema di Cauchy-Dirichlet, che è

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{\ell^2}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times ]0, \infty[,$$

ove la costante  $C_n = B_n D_n$  è arbitraria.

L'equazione differenziale è certamente verificata, come pure la condizione agli estremi. Occorre ora verificare la condizione iniziale  $u(x, 0) = f(x)$ . Dato che  $u_n(x, 0) = C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ , è naturale a questo punto utilizzare il principio di sovrapposizione ed anzi estenderlo al caso di infiniti addendi; consideriamo dunque la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$



ed *imponiamo* che essa coincida con la serie di Fourier, di soli seni, relativa al prolungamento dispari di  $f$  all'intervallo  $[-\ell, \ell]$  ( si veda l'esempio 3.16.16 (2) e l'esercizio 3.16.12). La serie di Fourier di questo prolungamento è

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \text{ove } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

La convergenza di questa serie verso  $f$  si ha, a priori, solo in  $L^2(-\ell, \ell)$ , e non in senso puntuale. Tuttavia, se si sceglie  $C_n = b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ , almeno formalmente la funzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{\ell^2}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty[$$

risolve il problema di Cauchy-Dirichlet. Ma lo risolve davvero?

Per ogni fissato  $t > 0$  la serie che definisce  $u(x, t)$  è uniformemente convergente in  $[0, \ell]$ , in virtù della presenza dell'esponenziale negativa. Anzi, sempre grazie all'esponenziale,  $u$  appartiene a  $C^\infty([0, \ell] \times ]0, \infty[)$ , e le sue derivate si ottengono derivando termine a termine la serie di  $u(x, t)$ ; ne segue facilmente che  $u$  risolve l'equazione differenziale  $u_t - \alpha^2 u_{xx}$  in  $[0, \ell] \times ]0, \infty[$ , e che verifica le condizioni  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ .

Per quanto riguarda la condizione  $u(x, 0) = f(x)$ , essa sarà certamente verificata se la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente in  $[0, \ell]$ : quindi supponendo, per esempio, che  $f \in C^1[0, \ell]$  con  $f(0) = f(\ell) = 0$ , otteniamo che  $u$  è continua in  $[0, \ell] \times [0, \infty[$  ed è davvero soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet.

Si può anche provare che  $u$  è l'unica soluzione del problema: infatti se  $v$  è un'altra soluzione (con la stessa regolarità di  $u$ ) del medesimo problema, la funzione  $w = u - v$  risolverà

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \text{in } ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ \\ w(0, t) = w(\ell, t) = 0, & t \geq 0 \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

Allora per ogni  $t > 0$ , moltiplicando l'equazione per  $w(x, t)$  ed integrando rispetto a  $x$  su  $[0, \ell]$ , si ha

$$\int_0^{\ell} w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx = \alpha^2 \int_0^{\ell} w(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) dx,$$

ossia, dato che  $w(0, t) = w(\ell, t) = 0$ ,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial t} w(x, t)^2 dx = -\alpha^2 \int_0^{\ell} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx;$$

portando la derivata fuori dall'integrale (esercizio 3.12.17) si ricava

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\ell} w(x, t)^2 dx = -\alpha^2 \int_0^{\ell} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \leq 0 \quad \forall t > 0.$$

Perciò la funzione  $t \mapsto \frac{1}{2} \int_0^\ell w(x, t)^2 dx$  è decrescente e non negativa in  $[0, \infty[$ . Ma per  $t = 0$  essa è nulla, e dunque

$$\int_0^\ell w(x, t)^2 dx = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

La continuità di  $x \mapsto w(x, t)$  implica allora

$$w(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty[ ,$$

cioè  $u \equiv v$ .

**Osservazione 3.17.1** In modo analogo si studia il *problema di Cauchy-Neumann*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \ell] \end{cases}$$

(si veda l'esercizio 3.17.1).

Il metodo di separazione delle variabili si applica anche allo studio di un altro problema della fisica matematica, relativo all'*equazione delle onde, o di D'Alembert*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ ,$$

e cioè la *propagazione vibratoria*, che riguarda l'analisi delle vibrazioni di una corda tesa di lunghezza  $\ell$ . La funzione  $u(x, t)$  rappresenta lo spostamento verticale all'istante  $t$  del punto della corda di ascissa  $x$ , rispetto alla posizione di riposo  $u = 0$ ; la costante  $c^2$  è legata all'elasticità della corda, quindi alla sua tensione oltre che al materiale costitutivo della corda stessa.

Per determinare i movimenti della corda al tempo  $t$ , occorre assegnare:

- (a) posizione e velocità iniziali della corda,  $u(x, 0)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ ;
- (b) la legge con cui si muovono le estremità della corda. Noi supporremo che gli estremi siano fissi,  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ , ma solo per semplicità.

Vogliamo quindi determinare la soluzione del *problema di Cauchy-Dirichlet* per l'equazione delle onde:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & x \in [0, \ell], \end{cases}$$

ove  $f, g : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue assegnate. Ci interessano soluzioni reali di classe  $C^2(]0, \ell[ \times ]0, \infty[)$ , con  $u$  e  $u_t$  continue in  $[0, \ell] \times [0, \infty[$ . Cercando soluzioni non nulle a variabili separate,

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

si trova, come nel caso precedente,

$$T''(t)X(x) = c^2T(t)X''(x),$$

da cui

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ opportuno.}$$

Risolviendo il problema

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), & x \in ]0, \ell[ \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

si trova una soluzione non nulla soltanto per  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , data da

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad B_n \in \mathbb{R};$$

risolvendo l'equazione

$$T''(t) = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{\ell^2} T(t), \quad t \in ]0, \infty[,$$

si trovano le soluzioni

$$T_n(t) = P_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + Q_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell}, \quad P_n, Q_n \in \mathbb{R}.$$

Dunque una candidata soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet è

$$u_n(x, t) = \left( C_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad C_n, D_n \in \mathbb{R}.$$

Dovendo imporre le condizioni iniziali  $u(x, 0) = f(x)$  e  $u_t(x, 0) = g(x)$ , è naturale considerare le serie di Fourier di  $f$  e di  $g$  di soli seni (dopo aver prolungato entrambe le funzioni a  $[-\ell, \ell]$  per disparità); se, nel senso della norma  $\|\cdot\|_2$ ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

allora ponendo  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  e scegliendo

$$C_n = b_n, \quad D_n = \frac{\ell}{n\pi c} \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

si ha, almeno formalmente,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = g(x),$$

e dunque il problema di Cauchy-Dirichlet ha come soluzione *formale* la funzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + \frac{\ell}{n\pi c} \beta_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

La  $u$  è davvero soluzione? Se imponiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |\beta_n| < \infty,$$

allora è facile vedere che  $u$  ha derivate seconde continue in  $[0, \ell] \times [0, \infty[$  e che risolve l'equazione differenziale e le condizioni ai limiti, cosicché risolve davvero il problema. L'ipotesi sulla convergenza delle due serie è certamente soddisfatta, in virtù degli esercizi 3.16.14 e 3.16.15, se si suppone

$$\begin{aligned} f \text{ derivabile 3 volte, } f''' \in L^2(0, \ell), \quad f(0) = f(\ell) = 0, \\ g \text{ derivabile 2 volte, } g'' \in L^2(0, \ell), \quad g(0) = g(\ell) = 0. \end{aligned}$$

Si noti che possiamo scrivere  $u(x, t)$  nella forma

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \left( \sin \frac{n\pi}{\ell}(x - ct) + \sin \frac{n\pi}{\ell}(x + ct) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\ell}{n\pi c} \beta_n \left( \cos \frac{n\pi}{\ell}(x - ct) - \cos \frac{n\pi}{\ell}(x + ct) \right) \right]. \end{aligned}$$

Anche per questo problema si ha l'unicità della soluzione: infatti *tutte* le soluzioni del problema sono necessariamente della forma  $\alpha(x - ct) + \beta(x + ct)$  (esercizio 3.17.2), per cui se  $v$  è un'altra soluzione (regolare), la differenza  $w = u - v$  risolve

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \text{in } ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ \\ w(0, t) = w(\ell, t) = 0, & t \geq 0 \\ w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

D'altra parte, deve essere  $w(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct)$ , con

$$\alpha \in C^2(]-\infty, \ell[) \cap C^1(]-\infty, \ell]), \quad \beta \in C^2(]0, \infty[) \cap C^1([0, \infty[),$$

e dalle condizioni ai limiti si ha

$$\begin{aligned} \alpha(-ct) + \beta(ct) = 0, \quad \alpha(\ell - ct) + \beta(\ell + ct) = 0 \quad \forall t \geq 0, \\ \alpha(x) + \beta(x) = 0, \quad -c\alpha'(x) + c\beta'(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \ell]. \end{aligned}$$

Le prime due condizioni ci dicono che  $\alpha$  e  $\beta$  sono  $2\ell$ -periodiche: infatti, se  $\xi - \ell \geq 0$  si ha  $\beta(\xi - \ell) = -\alpha(\ell - \xi) = \beta(\ell + \xi)$ , ovvero, posto  $\eta = \xi - \ell \geq 0$ ,

$$\beta(\eta) = -\alpha(-\eta) = \beta(\eta + 2\ell) \quad \forall \eta \geq 0;$$

da qui segue poi

$$\alpha(-\xi) = -\beta(\xi) = -\beta(\xi + 2\ell) = \alpha(-\xi - 2\ell) \quad \forall \xi \geq 0,$$

ed anche, posto  $\zeta = \ell - \xi \leq \ell$ ,

$$\alpha(\zeta) = \alpha(\ell - \xi) = -\beta(\ell + \xi) = -\beta(3\ell + \xi) = \alpha(-\ell - \xi) = \alpha(\zeta - 2\ell) \quad \forall \zeta \leq \ell.$$

Inoltre, sappiamo che  $\alpha' - \beta' = 0$  in  $[0, \ell]$ ; ma, derivando, si ha anche  $\alpha' + \beta' = 0$  in  $[0, \ell]$ , da cui  $\alpha' \equiv \beta' \equiv 0$  in  $[0, \ell]$ . Perciò  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni costanti, con  $\alpha(x) = A = -\beta(x)$  per ogni  $x \in [0, \ell]$ . D'altra parte se  $\xi \in [0, \ell]$  troviamo  $\alpha(-\xi) = -\beta(\xi) = A$ , ossia  $\alpha(x) = A$  per  $x \in [-\ell, \ell]$  e analogamente  $\beta(\ell + \xi) = -\alpha(\ell - \xi) = -A$ , ossia  $\beta(x) = -A$  per  $x \in [0, 2\ell]$ . Questi due fatti, insieme alla  $2\ell$ -periodicità, ci dicono finalmente che

$$\alpha(x) = A \quad \forall x \in ]-\infty, \ell], \quad \beta(x) = -A \quad \forall x \in [0, \infty[ ,$$

e pertanto  $w = \alpha + \beta = 0$ , ossia  $u \equiv v$ .

### Esercizi 3.17

1. Si provi che se  $f \in C^1[0, \ell]$  e se  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$  è la serie di Fourier relativa al prolungamento pari di  $f$  a  $[-\ell, \ell]$ , allora il *problema di Cauchy-Neumann*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } ]0, \ell[ \times ]0, \infty[ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, & t \in [0, \infty[ \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \ell] \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{\ell^2}} \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

2. Si provi che ogni soluzione dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in ]a, b[, \quad t > 0,$$

è della forma  $u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct)$  con  $\alpha \in C^2(]-\infty, b[) \cap C^1(]-\infty, b])$ ,  $\beta \in C^2(]a, \infty[) \cap C^1([a, \infty[)$ .

[**Traccia:** posto  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$ , si verifichi che nelle variabili  $(\xi, \eta)$  l'equazione differenziale assume la forma  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \dots$ ]

3. Siano  $f, g$  funzioni continue definite su  $[0, \ell]$ , nulle agli estremi, e siano  $F, G$  i rispettivi prolungamenti per disparità a  $[-\ell, \ell]$ . Si verifichi che la soluzione  $u$  del

problema di propagazione vibratoria tale che  $u(x, 0) = f(x)$  e  $u_t(x, 0) = g(x)$  si può scrivere nella forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[F(x - ct) + F(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds$$

(in accordo con l'esercizio 3.17.2.)

4. Utilizzando il metodo di separazione delle variabili si determini una soluzione formale del *problema di Dirichlet* per l'equazione di Laplace nel rettangolo  $[0, a] \times [0, b]$ :

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{in } ]0, a[ \times ]0, b[ \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in [0, a] \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = f(y), & y \in [a, b]. \end{cases}$$

Si formulino poi ipotesi appropriate sul dato  $f$  affinché la soluzione  $u$  sia non solo formale ma effettiva.

5. Si provi che se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  è un arbitrario aperto limitato, allora per ogni  $f \in C(\bar{\Omega})$  il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2} = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha al più una soluzione  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

[**Traccia:** se  $u, v$  sono soluzioni, allora occorre provare che  $w = u - v$  è nulla in  $\bar{\Omega}$ . Fissato  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , si considerino le funzioni  $\varphi(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_N^2$ ,  $\psi(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) - \varepsilon|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_N^2$  e si provi che  $\max_{\bar{\Omega}} w$  e  $\min_{\bar{\Omega}} w$  sono assunti in punti di  $\partial\Omega$ . Se ne deduca che

$$\max_{\bar{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \varepsilon d^2, \quad \min_{\bar{\Omega}} w \geq \min_{\partial\Omega} \psi - \varepsilon d^2,$$

ove  $d$  è il *diametro* di  $\Omega$ , ossia  $d = \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_N : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega\}$ ; se ne deduca la tesi.]

6. Si consideri l'operatore di Laplace  $\Delta$  in  $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ .
- (i) Posto  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ , si verifichi che, se  $v(r, \vartheta) = u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ , risulta

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \vartheta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}(r, \vartheta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \vartheta).$$

- (ii) Data  $f \in C[0, 2\pi]$  con  $f(0) = f(2\pi)$ , si ricerchi una soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = 0 & \text{in } ]0, R[ \times ]0, 2\pi[ \\ v(R, \vartheta) = f(\vartheta), & \vartheta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

nella forma

$$v(r, \vartheta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\vartheta + b_n(r) \sin n\vartheta),$$

e si provi che i coefficienti di Fourier  $a_n(r)$  e  $b_n(r)$  verificano l'equazione differenziale  $x''(r) + \frac{x'(r)}{r} - \frac{n^2 x(r)}{r^2} = 0$  in  $]0, R[$ .

(iii) Si verifichi che la soluzione generale dell'equazione differenziale precedente è

$$x(r) = \begin{cases} c + d \ln r & \text{se } n = 0 \\ cr^n + dr^{-n} & \text{se } n \geq 1; \end{cases}$$

sfruttando la continuità di  $a_n(r)$  e  $b_n(r)$  per  $r = 0$ , si deduca che  $a_0(r) = A_0$ ,  $a_n(r) = A_n r^n$  e  $b_n(r) = B_n r^n$  e si determinino le costanti  $A_0, A_n, B_n$  utilizzando la condizione  $v(R, \vartheta) = f(\vartheta)$ .

(iv) Dedurre che la soluzione  $v$  del problema di Dirichlet è formalmente esprimibile sotto forma di *integrale di Poisson*:

$$\begin{aligned} v(r, \vartheta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\vartheta - \alpha) \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \alpha) + r^2} d\alpha. \end{aligned}$$

# Capitolo 4

## Varietà

### 4.1 Curve

Come abbiamo visto nel capitolo 1, uno dei modi possibili di definire una varietà è il seguente, fondato sul teorema del Dini (teorema 1.9.6):

**Definizione 4.1.1** *Un insieme  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  è una varietà  $r$ -dimensionale di classe  $C^k$  (ove  $k \in \mathbb{N}$  oppure  $k = \infty$ ) se, per ogni suo punto  $\mathbf{x}_0$ , è possibile determinare un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^N$  ed un'applicazione  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-r}$ , di classe  $C^k$ , con  $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)$  di rango  $N - r$ , tale che*

$$M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Una definizione più precisa sarà data nel paragrafo 4.11. In effetti studieremo oggetti, che impropriamente denoteremo ancora varietà, un po' più generali: si tratterà spesso di insiemi chiusi, in generale dotati di "bordo" in un senso opportuno (si pensi, ad esempio, ad un segmento di  $\mathbb{R}^N$  contenente i propri estremi, oppure ad una superficie cilindrica delimitata da due piani ad essa perpendicolari, contenente le proprie circonferenze "estreme").

Le prime varietà che andiamo a studiare sono le più semplici: quelle di dimensione 1, vale a dire le curve. L'idea intuitiva di curva si ha immaginando un punto materiale che si muova nello spazio con un grado di libertà: la traiettoria che esso descrive è, appunto, una "curva". Dal punto di vista matematico, la definizione è la seguente:

**Definizione 4.1.2** *Una curva in  $\mathbb{R}^N$  è un'applicazione continua  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ , ove  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ , limitato o no. Diciamo che la curva è di classe  $C^k$  (ove  $k \in \mathbb{N}$  oppure  $k = \infty$ ) se si ha  $\varphi \in C^k(I, \mathbb{R}^N)$ . L'insieme immagine di  $\varphi$ ,*

$$\Gamma = \varphi(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x} = \varphi(t), t \in I\},$$

*si dice sostegno della curva  $\varphi$ ; su di esso viene indotta un'orientazione per mezzo dell'orientazione naturale di  $I$ . Se in particolare  $I = [a, b]$ , i punti  $\varphi(a)$  e  $\varphi(b)$  sono il primo e il secondo estremo della curva; quando i due estremi coincidono, cioè  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , la curva si dice chiusa. Le  $N$  equazioni*

$$x^i = \varphi^i(t), \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, N$$



si dicono equazioni parametriche della curva: si dice anche che il sistema  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , costituisce una parametrizzazione della curva.

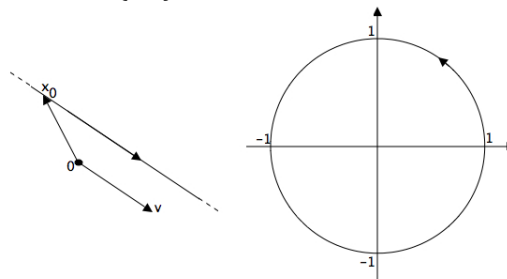
Diciamo poi che una curva è *semplice* se si ha  $\boldsymbol{\varphi}(t) \neq \boldsymbol{\varphi}(s)$  per ogni  $t, s \in I$ , con uno almeno fra  $t$  e  $s$  interno ad  $I$  (e dunque la curva è iniettiva nella parte interna di  $I$ ).

La curva è detta *regolare* se  $\boldsymbol{\varphi}$  è di classe  $C^1$  ed inoltre  $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in I$ .

Diciamo poi che una curva  $\boldsymbol{\varphi}$  è di classe  $C^1$  a tratti, o regolare a tratti, se  $\boldsymbol{\varphi}$  è di classe  $C^0$  ed inoltre è possibile decomporre  $I$  in un numero finito di intervalli adiacenti  $I_1, I_2, \dots, I_m$  in modo che  $\boldsymbol{\varphi}|_{I_h}$  sia una curva di classe  $C^1$ , o regolare, per  $h = 1, \dots, m$ . Come vedremo, le proprietà delle curve regolari, o regolari a tratti, si traducono in proprietà geometriche del sostegno, il quale, in queste ipotesi, almeno localmente (esclusi gli estremi) sarà, come vedremo, una varietà 1-dimensionale in  $\mathbb{R}^N$ .

**Esempi 4.1.3 (1)** Sia  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ove  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v}$  sono fissati elementi di  $\mathbb{R}^N$  con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Il sostegno di  $\boldsymbol{\varphi}$  è la retta per  $\mathbf{x}_0$  parallela a  $\mathbf{v}$ , percorsa secondo il verso di  $\mathbf{v}$ . La curva è semplice, di classe  $C^\infty$  e regolare, in quanto  $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{v}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Se invece  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , la curva è costante e il suo sostegno è  $\{\mathbf{x}_0\}$ .

(2) Sia  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos mt, \sin mt)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ove  $m \in \mathbb{N}^+$  è fissato. La curva è di classe  $C^\infty$  e chiusa, il suo sostegno è la circonferenza unitaria di  $\mathbb{R}^2$ , percorsa  $m$  volte in verso antiorario; la curva è semplice se e solo se  $m = 1$ .



Dato che

$$|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2 = \sqrt{m^2(-\sin mt)^2 + m^2(\cos mt)^2} = m \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

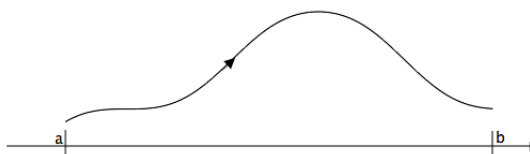
la curva è regolare.

(3) (*Curve cartesiane*) Fissata  $f \in C[a, b]$ , il grafico di  $f$  è sostegno della curva in  $\mathbb{R}^2$  di classe  $C^0$  di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\varphi} : x = x, \quad y = f(x), \quad x \in [a, b];$$

se  $f \in C^1[a, b]$  la curva è regolare, poiché

$$|\boldsymbol{\varphi}'(x)|_2 = \sqrt{1 + f'(x)^2} > 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

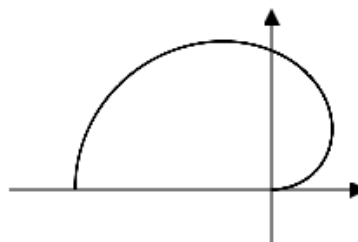


(4) (*Curve in coordinate polari*) L'equazione

$$\rho = g(\vartheta), \quad \vartheta \in I,$$

con  $g \in C(I)$  e  $g \geq 0$ , descrive la curva  $\boldsymbol{\varphi}$  in  $\mathbb{R}^2$  di equazioni parametriche

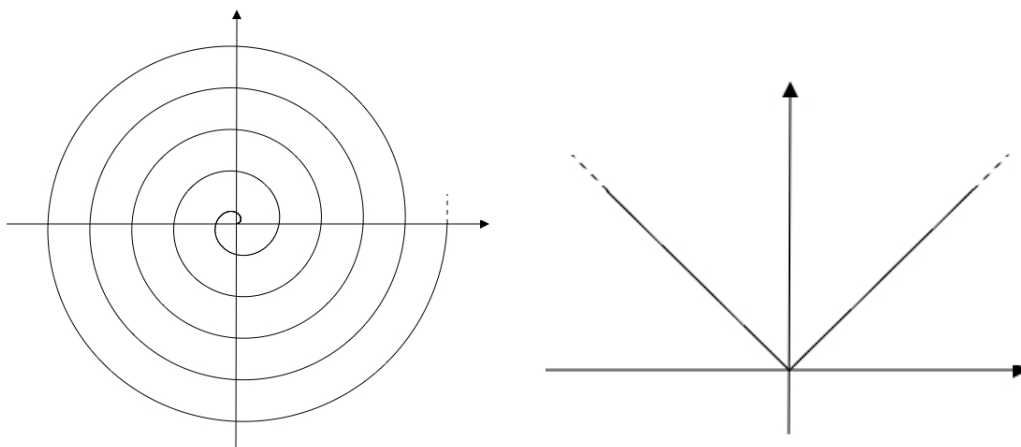
$$x = g(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y = g(\vartheta) \sin \vartheta, \quad \vartheta \in I;$$



se inoltre  $g \in C^1(I)$  e  $g > 0$ , oppure  $g' \neq 0$ , la curva è regolare, poiché si verifica facilmente che

$$|\varphi'(\vartheta)|_2 = \sqrt{g'(\vartheta)^2 + g(\vartheta)^2} > 0 \quad \forall \vartheta \in I.$$

Ad esempio l'equazione polare  $\rho = \vartheta$ ,  $\vartheta \geq 0$ , descrive una spirale infinita, percorsa in verso antiorario, uscente dall'origine.



(6) Sia  $\varphi(t) = (t, |t|)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Questa è una curva cartesiana, con sostegno il grafico di  $f(x) = |x|$ , ed è regolare a tratti ma non regolare. Infatti, sebbene  $\varphi'(0)$  non esista, le restrizioni di  $\varphi$  alle due semirette  $]-\infty, 0]$  e  $[0, \infty[$  sono curve regolari, dato che  $f|_{]-\infty, 0]}$  e  $f|_{[0, \infty[}$  sono funzioni di classe  $C^1$ . Osserviamo che la curva  $\psi(\tau) = (\tau^3, |\tau|^3)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , ha lo stesso sostegno di  $\varphi$ , ed è di classe  $C^1$ ; tuttavia  $\psi$  non è regolare perché  $\psi'(0) = \mathbf{0}$ . Dunque, il sostegno di una curva di classe  $C^1$  può contenere punti angolosi. Ciò invece non può accadere, come vedremo, per le curve regolari.

L'idea geometrica di curva appare più legata al sostegno che alla parametrizzazione: in sintonia con questa intuizione, introduciamo un'importante relazione di equivalenza fra curve.

**Definizione 4.1.4 (i)** Siano  $I, J$  intervalli di  $\mathbb{R}$  e siano  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  due curve di classe  $C^r$ , con  $r \geq 0$ . Diciamo che  $\varphi$  e  $\psi$  sono  $C^r$ -equivalenti se esiste una funzione bigettiva  $p : J \rightarrow I$  tale che  $p$  e  $p^{-1}$  siano di classe  $C^r$  (dunque, se  $r \geq 1$ ,  $p$  è un diffeomorfismo di classe  $C^r$ ) e che risulti

$$\psi(\tau) = \varphi(p(\tau)) \quad \forall \tau \in J.$$

(ii) Supponiamo, in più, che le curve  $\varphi$  e  $\psi$  siano chiuse. Diciamo che  $\varphi$  e  $\psi$  sono  $C^r$ -equivalenti a tratti se esiste un numero finito  $m$  di sottointervalli  $I_1, \dots, I_m$  di  $I$  e di sottointervalli  $J_1, \dots, J_m$  di  $J$ , tali che:

(a)  $I_1, \dots, I_m$  sono intervalli adiacenti la cui unione è  $I$ , mentre  $J_1, \dots, J_m$  sono intervalli adiacenti la cui unione è  $J$ ;

(b) per  $h = 1, \dots, m$  le restrizioni  $\varphi|_{I_h}$  e  $\psi|_{J_h}$  sono curve fra loro  $C^r$ -equivalenti.

Si verifica facilmente che la  $C^r$ -equivalenza fra curve, così come la  $C^r$ -equivalenza a tratti fra curve chiuse, costituisce una relazione di equivalenza nella classe di tutte le curve

di classe  $C^r$  in  $\mathbb{R}^N$ . Inoltre, due curve chiuse  $C^r$ -equivalenti sono anche  $C^r$ -equivalenti a tratti, mentre il viceversa non è vero (si veda l'esempio 4.1.6 (4) che segue).

Osserviamo che due curve  $C^r$ -equivalenti, o  $C^r$ -equivalenti a tratti, hanno necessariamente lo stesso sostegno; inoltre, dovendo essere  $p'(\tau) \neq 0$  per ogni  $\tau \in J$ , se  $\varphi$  è regolare anche ogni curva  $\psi$  ad essa  $C^r$ -equivalente ( $r \geq 1$ ) lo è, dato che  $\psi'(\tau) = \varphi'(p(\tau))p'(\tau)$ . L'orientazione di  $\psi$  coincide con quella di  $\varphi$  se  $p' > 0$  in  $J$ , è l'opposta se  $p' < 0$  in  $J$ . Per la  $C^0$ -equivalenza vale la seguente

**Proposizione 4.1.5** *Due curve semplici di classe  $C^0$  sono  $C^0$ -equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno.*

**Dimostrazione** Sappiamo già che due curve  $C^0$ -equivalenti hanno lo stesso sostegno. Viceversa, siano  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  due curve continue e semplici, aventi lo stesso sostegno  $\Gamma$ . La funzione  $\lambda : [a, b] \rightarrow \Gamma$  è bigettiva e continua: proviamo che  $\lambda^{-1} : \Gamma \rightarrow [a, b]$  è anch'essa continua. Supponiamo per assurdo che  $\lambda^{-1}$  sia discontinua in un punto  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ . Allora esistono  $\delta > 0$  ed una successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq \Gamma$  tali che  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$  per  $n \rightarrow \infty$ , ma  $|\lambda^{-1}(\mathbf{x}_n) - \lambda^{-1}(\mathbf{x}_0)| \geq \delta$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Sarà  $\mathbf{x}_0 = \lambda(t_0)$  e  $\mathbf{x}_n = \lambda(t_n)$ , e dunque  $|t_n - t_0| \geq \delta$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Però,  $\{t_n\} \subset [a, b]$  ha una sottosuccessione  $\{t_{n_k}\}$  convergente per  $k \rightarrow \infty$  ad un punto  $\bar{t} \in [a, b]$ . Per continuità di  $\lambda$ , si ha  $\lambda(t_{n_k}) \rightarrow \lambda(\bar{t})$  per  $k \rightarrow \infty$ . Dato che  $\lambda(t_{n_k}) = \mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \mathbf{x}_0 = \lambda(t_0)$ , deve essere  $\lambda(\bar{t}) = \lambda(t_0)$ , e siccome  $\lambda$  è semplice, si deduce  $\bar{t} = t_0$ . Ma le condizioni  $|t_n - t_0| \geq \delta$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $|t_{n_k} - t_0| = |t_{n_k} - \bar{t}| \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$  sono contraddittorie: assurdo. Dunque  $\lambda^{-1}$  è continua, e di conseguenza la funzione  $p = \lambda^{-1} \circ \gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è continua: essa costituisce il cambiamento di parametro che dà la  $C^0$ -equivalenza, in quanto per costruzione risulta

$$\gamma(t) = \lambda(p(t)) \quad \forall t \in [c, d]. \quad \square$$

**Esempi 4.1.6 (1)** La funzione  $p : [a, b] \rightarrow [a, b]$  data da  $p(\tau) = a + b - \tau$  è bigettiva, con  $p, p^{-1}$  di classe  $C^\infty$ . Dunque ogni curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  è  $C^0$ -equivalente alla curva  $\psi(\tau) = \varphi(a + b - \tau)$ , che ha verso opposto a quello di  $\varphi$ . Si dice che  $\psi$  è l'*opposta* di  $\varphi$ .

**(2)** Le due curve del piano

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{e} \quad \psi(\tau) = (\cos 2\tau, \sin 2\tau), \quad \tau \in [0, \pi],$$

hanno lo stesso sostegno e sono  $C^r$ -equivalenti, mediante il diffeomorfismo  $p(\tau) = 2\tau$ ,  $\tau \in [0, \pi]$ . Invece  $\varphi$  non è  $C^r$ -equivalente a  $\eta(\tau) = (\cos 2\tau, \sin 2\tau)$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]$ , pur avendo lo stesso sostegno, perché il diffeomorfismo  $p$  non manda  $[0, 2\pi]$  in  $[0, 2\pi]$ ; si noti che le curve  $\varphi$  e  $\psi$  sono semplici mentre  $\eta$  non lo è.

**(3)** Sia  $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ ; il sostegno di  $\varphi$  è la semicirconferenza  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$ . La curva cartesiana (di verso opposto)  $\psi(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$ ,  $x \in [-1, 1]$ , è  $C^0$ -equivalente a  $\varphi$ , ma non è  $C^1$ -equivalente ad essa, perché  $\varphi$  è di classe  $C^1$  mentre  $\psi$  no (si ha  $|\psi'(\pm 1)|_2 = +\infty$ ). Il cambiamento di parametro è  $t = p(x) = \arccos x$ ,  $x \in [-1, 1]$ , che non è derivabile negli estremi.

(4) Le due curve regolari

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [0, 2\pi], \\ \psi(\tau) &= (\cos(\tau + \pi), \sin(\tau + \pi)), & \tau \in [0, 2\pi],\end{aligned}$$

pur essendo semplici e avendo lo stesso sostegno non sono  $C^r$ -equivalenti: infatti si ha evidentemente  $\psi(\tau) = \varphi(\tau + \pi)$ , ma il diffeomorfismo  $p(\tau) = \tau + \pi$  non manda  $[0, 2\pi]$  in sé. Le due curve sono però  $C^r$ -equivalenti a tratti, perché sono chiuse ed inoltre  $\varphi|_{[0, \pi]}$  è  $C^r$ -equivalente a  $\psi|_{[\pi, 2\pi]}$  e  $\varphi|_{[\pi, 2\pi]}$  è  $C^r$ -equivalente a  $\psi|_{[0, \pi]}$ . In effetti, affinché due curve regolari, semplici e chiuse  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  siano  $C^1$ -equivalenti (e non solo  $C^1$ -equivalenti a tratti) è necessario che risulti  $\varphi(a) = \varphi(b) = \psi(c) = \psi(d)$ . Come vedremo, questa condizione è anche sufficiente.

## Retta tangente a una curva regolare

Abbiamo già osservato che le curve regolari, o regolari a tratti, hanno particolare interesse dal punto di vista geometrico: per esse, infatti, il vettore derivata in ciascun punto ha un significato geometrico legato alla esistenza della retta tangente al sostegno.

Sia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva regolare. Consideriamo due punti distinti  $t_0, t_1 \in I$ : la retta passante per  $\varphi(t_0)$  e  $\varphi(t_1)$  ha equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \varphi(t_0) + (t - t_0) \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Facendo tendere  $t_1$  a  $t_0$  si ottiene la retta limite

$$\mathbf{x} = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

che, per definizione, si chiama *retta tangente* a  $\Gamma = \varphi(I)$  nel punto  $\varphi(t_0)$ .

Questa definizione è giustificata dal fatto che tale retta è l'unica, fra tutte quelle passanti per  $\varphi(t_0)$ , dunque della forma

$$\mathbf{x} = \varphi(t_0) + \mathbf{v}(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

per la quale risulti

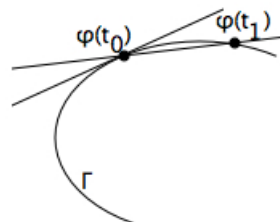
$$|\varphi(t) - \varphi(t_0) - \mathbf{v}(t - t_0)|_N = \mathbf{o}(t - t_0) \quad \text{per } t \rightarrow t_0;$$

infatti ciò accade, per definizione di derivata, se e solo se  $\mathbf{v} = \varphi'(t_0)$ .

Si noti che questa argomentazione ha senso se e solo se  $\varphi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , e questo è il motivo per cui è necessario supporre  $\varphi$  regolare. Il ragionamento funziona anche se  $\varphi$  è regolare a tratti, pur di prendere  $t_0$  interno ad uno dei sottointervalli di regolarità: invece  $\varphi(t_0)$ , quando  $t_0$  è uno degli estremi di tali intervalli, sarà, in generale, un punto angoloso o una cuspidale.

Il versore

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|_N}$$



è il versore tangente al sostegno di  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t_0)$ , ed il suo verso ci dà l'orientazione della curva. Se  $\psi$  è una curva equivalente a  $\varphi$  (anch'essa regolare, quindi), e se  $\psi(\tau_0) = \varphi(t_0)$ , allora si ha

$$\frac{\psi'(\tau_0)}{|\psi'(\tau_0)|_N} = \pm \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|_N},$$

a seconda che  $\psi$  e  $\varphi$  abbiano versi uguali od opposti. Quindi, com'è geometricamente prevedibile, il versore tangente  $\mathbf{T}$  in un dato punto del sostegno dipende solo dal sostegno e dall'orientazione ad esso attribuita, e non dalla particolare curva regolare con cui esso viene parametrizzato.

**Osservazione 4.1.7** Sia  $F \in C^1(A)$ , ove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , e consideriamo il luogo di zeri delle funzione  $F$ :

$$Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}.$$

Supponendo  $Z \neq \emptyset$  e  $\nabla F(x, y) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $(x, y) \in Z$ , sappiamo dal teorema del Dini che  $Z$  è localmente grafico di una curva cartesiana regolare (esempio 4.1.3 (3)). Il versore normale a  $Z$  in un punto  $(x_0, y_0) \in Z$  è dato, come si sa, da

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{|\nabla F(x_0, y_0)|_2};$$

pertanto il versore tangente a  $Z$  nello stesso punto è

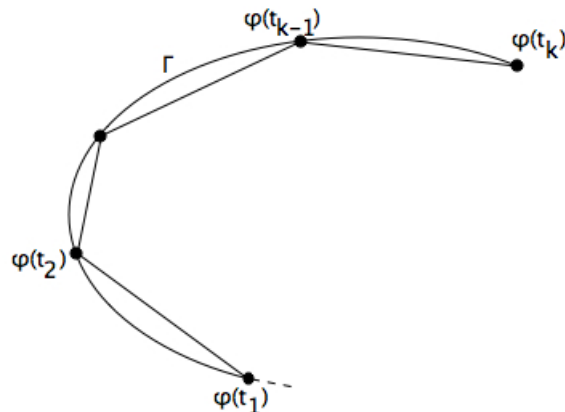
$$\mathbf{T} = \pm \left( \frac{F_y(x_0, y_0)}{|\nabla F(x_0, y_0)|_2}, -\frac{F_x(x_0, y_0)}{|\nabla F(x_0, y_0)|_2} \right),$$

dove il segno dipende da come decidiamo di orientare  $Z$ .

## Lunghezza di una curva

È possibile associare ad ogni curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ , in modo del tutto naturale, la nozione di "lunghezza", andando a misurarne il sostegno per mezzo di un procedimento geometricamente assai intuitivo.

Consideriamo una suddivisione finita  $\sigma$  dell'intervallo  $I$  mediante certi punti  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ . Se  $I = [a, b]$ , sceglieremo in particolare  $t_0 = a$  e  $t_k = b$ , mentre se  $I$  è non limitato o non chiuso non faremo alcuna altra ipotesi sulla scelta dei punti. Poniamo  $\mathbf{x}_i = \varphi(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , e consideriamo la spezzata, o *poligonale*,  $S_\sigma$  di vertici  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ : ad essa evidentemente attribuiamo come lunghezza il numero



$$\ell(S_\sigma) = \sum_{i=1}^k |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|_N = \sum_{i=1}^k |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N.$$

È chiaro che, infittendo la suddivisione  $\sigma$ , aumenterà la quantità  $\ell(S_\sigma)$ ; più precisamente, per ogni coppia di suddivisioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  di  $I$  ne esiste una terza,  $\sigma$ , che è più fine di entrambe: ad esempio quella costituita dall'unione dei punti di  $\sigma_1$  e di quelli di  $\sigma_2$ . Per la nuova suddivisione  $\sigma$  si avrà chiaramente

$$\ell(S_\sigma) \geq \max\{\ell(S_{\sigma_1}), \ell(S_{\sigma_2})\}.$$

Siamo così indotti a formulare la seguente

**Definizione 4.1.8** *Sia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva. La lunghezza di  $\varphi$  è il numero non negativo, eventualmente infinito,*

$$\ell(\varphi) = \sup_{\sigma} \ell(S_\sigma),$$

ove l'estremo superiore è fatto al variare di tutte le possibili suddivisioni finite  $\sigma$  di  $I$ . Diciamo che  $\varphi$  è rettificabile se  $\varphi$  ha lunghezza finita.

Questa definizione, sebbene intuitiva, è alquanto scomoda, poiché coinvolge un estremo superiore fatto su un'infinità di possibili spezzate. È facile comunque verificare, sulla base di essa, che esistono curve continue non rettificabili: ciò può accadere non solo quando l'intervallo  $I$  è illimitato o non chiuso, il che rende la cosa evidente (si pensi al caso della retta dell'esempio 4.1.3 (1)), ma anche quando  $I = [a, b]$ : si veda l'esercizio 4.1.4.

Per le curve di classe  $C^1$  il calcolo della lunghezza è semplificato da una formula molto importante:

**Teorema 4.1.9** *Sia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva di classe  $C^1$ . Allora la lunghezza di  $\varphi$  è data da*

$$\ell(\varphi) = \int_I |\varphi'(t)|_N dt.$$

In particolare, ogni curva di classe  $C^1$  definita su un intervallo chiuso e limitato è rettificabile.

**Dimostrazione** ( $\leq$ ) Non è restrittivo supporre che l'integrale a secondo membro sia convergente. Sia  $\sigma$  una suddivisione finita di  $I$  mediante i punti  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ : allora

$$\begin{aligned} \ell(S_\sigma) &= \sum_{i=1}^k |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N = \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\tau) d\tau \right|_N \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N d\tau \leq \int_I |\varphi'(\tau)|_N d\tau; \end{aligned}$$

quindi, per l'arbitrarietà di  $\sigma$ ,  $\ell(\varphi) = \sup_{\sigma} \ell(S_\sigma) \leq \int_I |\varphi'(\tau)|_N d\tau$ .

( $\geq$ ) Siccome l'intervallo  $I$  non è in generale chiuso e limitato, cominciamo col fissare

un arbitrario sottointervallo  $[a, b] \subseteq I$ . Poiché  $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ , la funzione  $\varphi'$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ . Quindi, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$t, \tau \in [a, b], |t - \tau| < \delta \implies |\varphi'(t) - \varphi'(\tau)|_N < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Sia  $\sigma$  una suddivisione di  $[a, b]$  mediante i punti  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  tale che  $t_i - t_{i-1} < \delta$  per  $i = 1, \dots, k$ . Allora per  $i = 1, \dots, k$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N d\tau &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau) - \varphi'(t_i) + \varphi'(t_i)|_N d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau) - \varphi'(t_i)|_N d\tau + |\varphi'(t_i)|_N (t_i - t_{i-1}) = \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau) - \varphi'(t_i)|_N d\tau + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(t_i) - \varphi'(\tau) + \varphi'(\tau)] d\tau \right|_N \leq \\ &\leq 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau) - \varphi'(t_i)|_N d\tau + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\tau) d\tau \right|_N < 2\varepsilon \frac{t_i - t_{i-1}}{b - a} + |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N. \end{aligned}$$

Sommando rispetto a  $i$ , si ricava

$$\int_a^b |\varphi'(\tau)|_N d\tau \leq 2\varepsilon + \ell(S_\sigma) \leq 2\varepsilon + \ell(\varphi);$$

dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue

$$\int_a^b |\varphi'(\tau)|_N d\tau \leq \ell(\varphi) \quad \forall [a, b] \subset I,$$

e passando al limite per  $a \rightarrow \inf I$  e per  $b \rightarrow \sup I$ , si ottiene infine

$$\int_I |\varphi'(\tau)|_N d\tau \leq \ell(\varphi). \quad \square$$

**Osservazione 4.1.10** Dal teorema precedente segue che due curve di classe  $C^1$ , fra loro equivalenti, hanno la stessa lunghezza. Infatti, siano  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  due curve di classe  $C^1$  con  $\psi(\tau) = \varphi(p(\tau))$  per ogni  $\tau \in J$ , ove  $p : J \rightarrow I$  è un diffeomorfismo; allora dalla formula di cambiamento di variabile si ha

$$\begin{aligned} \ell(\varphi) &= \int_I |\varphi'(t)|_N dt = \int_J |\varphi'(p(\tau))|_N |p'(\tau)| d\tau = \\ &= \int_J \left| \frac{d}{d\tau} \varphi(p(\tau)) \right|_N d\tau = \int_J |\psi'(\tau)|_N d\tau = \ell(\psi). \end{aligned}$$

Se, in particolare, le curve equivalenti sono anche regolari e semplici, la loro lunghezza è qualcosa di intrinsecamente legato al sostegno. Proveremo nel paragrafo successivo che due curve regolari e semplici aventi lo stesso sostegno sono necessariamente equivalenti o, se chiuse, almeno equivalenti a tratti: quindi, se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$  è un insieme che è sostegno di una curva regolare e semplice, potremo utilizzare il simbolo  $\ell(\Gamma)$  per denotare la lunghezza di una *qualunque* curva regolare e semplice che abbia  $\Gamma$  come sostegno.

**Esempi 4.1.11 (1)** Sia  $\varphi(t) = (1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1$ ,  $t \in [0, 1]$ : il sostegno di  $\varphi$  è il segmento di  $\mathbb{R}^N$  che unisce  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$ . Poiché

$$|\varphi'(t)|_N = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|_N \quad \forall t \in [0, 1],$$

si ha, come era prevedibile,  $\ell(\varphi) = \int_0^1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|_N dt = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|_N$ .

**(2)** Poniamo  $\varphi(t) = (\cos mt, \sin mt)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ove  $m \in \mathbb{N}^+$ . Poiché  $|\varphi'(t)|_2 = m$ , si ha  $\ell(\varphi) = 2\pi m$  (il che non sorprende, visto che la curva percorre la circonferenza unitaria  $m$  volte).

**(3)** Sia  $\varphi$  la curva definita, in coordinate polari, dall'equazione  $\rho = e^{-\vartheta}$ ,  $\vartheta \geq 0$ . Poiché  $\varphi(\vartheta) = (e^{-\vartheta} \cos \vartheta, e^{-\vartheta} \sin \vartheta)$ , si ha

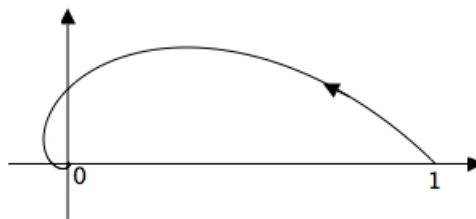
$$\varphi'(\vartheta) = (e^{-\vartheta}(-\cos \vartheta - \sin \vartheta), e^{-\vartheta}(-\sin \vartheta + \cos \vartheta)),$$

cosicché otteniamo  $|\varphi'(\vartheta)|_2 = \sqrt{2} e^{-\vartheta}$ .

Ne segue

$$\ell(\varphi) = \int_0^\infty \sqrt{2} e^{-\vartheta} d\vartheta = \sqrt{2}.$$

La spirale quindi ha lunghezza finita, pur avvolgendosi infinite volte intorno all'origine.



## Esercizi 4.1

1. Si verifichi che le seguenti curve piane sono semplici ed hanno lo stesso sostegno, e si scriva esplicitamente un cambiamento di parametro che ne certifichi la  $C^0$ -equivalenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \wedge 1 \\ y = 0 \vee (t - 1), \end{array} \right. \quad t \in [0, 2]; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \begin{cases} \tau^2(2 - \tau)^2 & \text{se } \tau \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } \tau \in [1, 2] \end{cases} \\ y = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \in [0, 1] \\ (\tau - 1)^2(3 - \tau)^2 & \text{se } \tau \in [1, 2]. \end{cases} \end{array} \right.$$

2. Si provi che le seguenti curve piane sono  $C^1$ -equivalenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right., \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \\ y = \frac{2\tau}{1+\tau^2} \end{array} \right., \quad t \in [-1, 1].$$

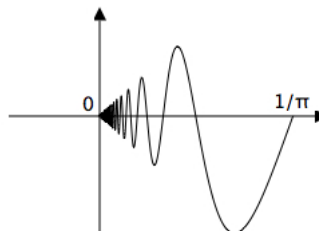
3. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e crescente. Si provi che  $\varphi(t) = (t, f(t))$  è una curva rettificabile e che

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2} \leq \ell(\varphi) \leq b - a + f(b) - f(a).$$



4. Sia  $\varphi(t) = (t, f(t))$ , ove

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ t \sin \frac{1}{t} & \text{se } 0 < t < \frac{1}{\pi}, \end{cases}$$



Si provi che  $\varphi$  non è rettificabile.

[**Traccia:** per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  sia  $\sigma_n$  la suddivisione di  $[0, 1/\pi]$  determinata dai punti  $0 < \frac{1}{(2n-1)\pi/2} < \dots < \frac{1}{3\pi/2} < \frac{1}{\pi}$ ; si provi che  $\ell(S_{\sigma_n}) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1}$ .]

5. Se  $\varphi$  è una curva piana definita, in coordinate polari, dall'equazione  $\rho = f(\vartheta)$ , con  $f \in C^1(I)$  e  $f \geq 0$ , si verifichi che

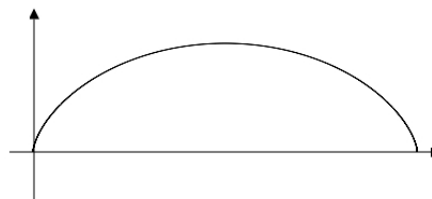
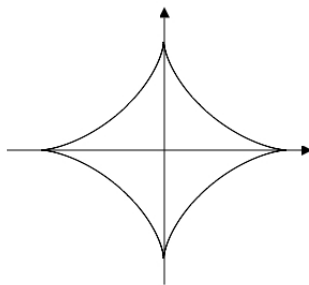
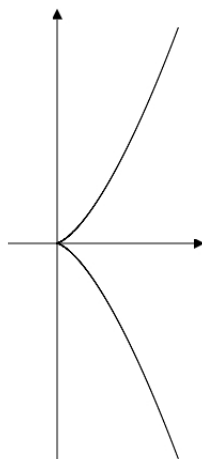
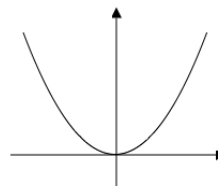
$$\ell(\varphi) = \int_I \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2} d\vartheta.$$

6. Calcolare la lunghezza delle curve seguenti:

(i) (arco di parabola)  $x = x, y = x^2, x \in [-a, a]$ ;

(ii) (parabola semicubica)  $x = t^2, y = t^3, |t| \leq 2$ ;

(iii) (astroide o ipocicloide)  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$ ;



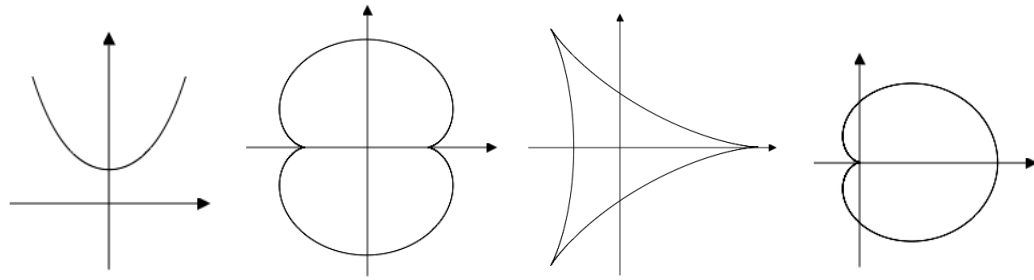
(iv) (cicloide)  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$ ;

(v) (catenaria)  $x = x, y = \cosh x, x \in [-a, a]$ ;

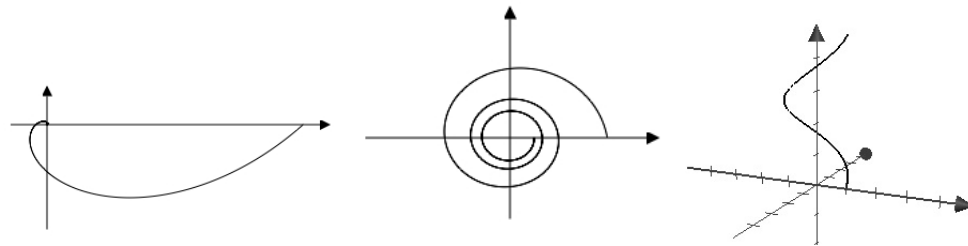
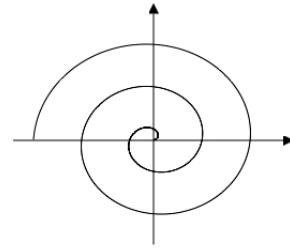
(vi) (nefroide)  $x = 3 \cos t - \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t, t \in [0, 2\pi]$ ;

(vii) (deltoide)  $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, t \in [0, 2\pi]$ ;

(viii) (cardioide)  $\rho = 2(1 + \cos \vartheta), \vartheta \in [-\pi, \pi]$ ;



- (ix) (spirale di Archimede)  $\rho = \vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 2n\pi]$ ;
- (x) (spirale logaritmica)  $\rho = e^\vartheta$ ,  $\vartheta \in [-2n\pi, 2\pi]$ ;
- (xi) (spirale iperbolica)  $\rho = 1/\vartheta$ ,  $\vartheta \in [2\pi, 2n\pi]$ ;
- (xii) (elica cilindrica)  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  
 $t \in [0, 2n\pi]$ .



## 4.2 Ascissa curvilinea

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva regolare, con sostegno  $\Gamma$ . Fra tutti i cambiamenti di parametro che danno luogo a curve  $C^1$ -equivalenti, ce n'è uno privilegiato, perché intrinsecamente legato alla geometria di  $\Gamma$ . Per descriverlo, introduciamo la variabile

$$s = \lambda(t) = \int_a^t |\varphi'(\tau)|_N d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Il parametro  $s$ , detto *ascissa curvilinea* o *parametro lunghezza d'arco*, misura la lunghezza della curva regolare  $\varphi|_{[a,t]}$ ; quando  $t$  descrive  $[a, b]$ ,  $s$  descrive  $[0, \ell(\varphi)]$ . Si noti che  $\lambda$  è un diffeomorfismo fra  $[a, b]$  e  $[0, \ell(\varphi)]$ , perché

$$\lambda'(t) = |\varphi'(t)|_N > 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Dunque  $\varphi$  è  $C^1$ -equivalente alla curva  $\alpha : [0, \ell(\varphi)] \rightarrow \mathbb{R}^N$  data da

$$\alpha(s) = \varphi(\lambda^{-1}(s)), \quad s \in [0, \ell(\varphi)],$$

che è definita in termini del parametro lunghezza d'arco. Il punto  $\alpha(s)$ , per costruzione, è quel punto di  $\Gamma$  che si trova a distanza  $s$  (misurata lungo la curva) dal primo estremo  $\alpha(0) = \varphi(a)$ . Osserviamo che

$$\alpha'(s) = \varphi'(\lambda^{-1}(s)) \cdot (\lambda^{-1})'(s) = \frac{\varphi'(\lambda^{-1}(s))}{|\varphi'(\lambda^{-1}(s))|_N},$$

e quindi  $|\boldsymbol{\alpha}'(s)|_N = 1$  per ogni  $s \in [0, \ell(\boldsymbol{\varphi})]$ . Perciò  $\boldsymbol{\alpha}'(s)$  è in ogni punto di  $\Gamma$  il versore tangente a  $\Gamma$ , orientato secondo il verso di percorrenza. Interpretando  $s$  come lo spazio percorso da un punto materiale vincolato a muoversi lungo  $\Gamma$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(s)$  è la posizione del punto e  $\boldsymbol{\alpha}'(s)$  è la sua velocità, che per quanto visto è un vettore unitario.

L'ascissa curvilinea può essere definita anche nel caso di curve definite su intervalli illimitati: se  $I = [a, \infty[$  si ripete il discorso precedente, se  $I = ]-\infty, b]$  sarà naturale parlare di lunghezza negativa, definendo  $s$  nel modo formalmente analogo

$$s = \lambda(t) = \int_b^t |\boldsymbol{\varphi}'(\tau)|_N d\tau, \quad t \in I;$$

infine se  $I$  è una semiretta aperta, o anche tutto  $\mathbb{R}$ , si parlerà di lunghezza a partire da un fissato punto  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(a) \in \Gamma$ , misurata dal parametro

$$s = \lambda(t) = \int_a^t |\boldsymbol{\varphi}'(\tau)|_N d\tau, \quad t \in I:$$

essa sarà positiva per i punti che seguono  $\boldsymbol{\varphi}(a)$  e negativa per quelli che lo precedono secondo l'orientazione fissata.

Da quanto detto segue che il simbolo  $ds$  rappresenta l'*elemento di lunghezza* lungo il sostegno  $\Gamma$ . Esso si esprime in termini del differenziale  $dt$  relativo alla parametrizzazione  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (x^1(t), \dots, x^N(t))$  tramite la relazione  $ds = |\boldsymbol{\varphi}'(t)|_N dt = \sqrt{(x^1)'(t)^2 + \dots + (x^N)'(t)^2} dt$ ; d'altronde, poiché  $ds$  è indipendente dalla parametrizzazione scelta, si può formalmente scrivere l'identità  $(ds)^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^N)^2$ .

Utilizzando l'ascissa curvilinea è facile provare questo risultato già annunciato e geometricamente plausibile.

**Proposizione 4.2.1** *Due curve regolari e semplici, non chiuse, sono  $C^1$ -equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno; due curve chiuse, regolari e semplici sono  $C^1$ -equivalenti a tratti se e solo se hanno lo stesso sostegno.*

**Dimostrazione** Se due curve regolari e semplici sono  $C^1$ -equivalenti, oppure sono chiuse e  $C^1$ -equivalenti a tratti, esse hanno lo stesso sostegno, come è stato osservato subito dopo la definizione 4.1.4.

Proviamo i due enunciati opposti, limitandoci al caso più semplice in cui le curve sono definite su intervalli chiusi e limitati; per il caso generale si rimanda all'esercizio 4.2.9. Siano dunque  $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\boldsymbol{\psi} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  due curve regolari e semplici, non chiuse, tali che  $\boldsymbol{\varphi}[a, b] = \boldsymbol{\psi}[c, d] = \Gamma$ . Inoltre ammettiamo dapprima che  $\boldsymbol{\varphi}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  abbiano lo stesso verso, ossia che si abbia  $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\psi}(c)$  e  $\boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{\psi}(d)$ . Poniamo

$$\lambda(t) = \int_a^t |\boldsymbol{\varphi}'(v)|_N dv, \quad t \in [a, b], \quad \ell(\tau) = \int_c^\tau |\boldsymbol{\psi}'(u)|_N du, \quad \tau \in [c, d],$$

e definiamo

$$\boldsymbol{\varphi}_0(s) = \boldsymbol{\varphi}(\lambda^{-1}(s)), \quad s \in [0, \ell(\boldsymbol{\varphi})], \quad \boldsymbol{\psi}_0(s) = \boldsymbol{\psi}(\ell^{-1}(s)), \quad s \in [0, \ell(\boldsymbol{\psi})].$$

Come sappiamo,  $\varphi_0$  è  $C^1$ -equivalente a  $\varphi$  e  $\psi_0$  è  $C^1$ -equivalente a  $\psi$ ; ci proponiamo di verificare che  $\varphi_0 \equiv \psi_0$  e che, in particolare,  $\ell(\varphi) = \ell(\psi)$ . A questo scopo notiamo che, detto  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  il versore tangente a  $\Gamma$  nel punto  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , si ha

$$\varphi'_0(s) = \mathbf{T}(\varphi_0(s)) \quad \forall s \in [0, \ell(\varphi)],$$

e similmente

$$\psi'_0(\sigma) = \mathbf{T}(\psi_0(\sigma)) \quad \forall \sigma \in [0, \ell(\psi)].$$

Osserviamo adesso che per ogni  $s \in [0, \ell(\varphi)]$  esiste un unico punto  $\mathbf{x}_s \in \Gamma$  tale che  $\mathbf{x}_s = \varphi_0(s)$ , ed esiste un unico punto  $\sigma_s \in [0, \ell(\psi)]$  tale che  $\psi_0(\sigma_s) = \mathbf{x}_s = \varphi_0(s)$ . Denotiamo con  $p$  la corrispondenza  $s \mapsto \sigma_s$ , cosicché la funzione  $p : [0, \ell(\varphi)] \rightarrow [0, \ell(\psi)]$  verifica  $\psi_0(p(s)) = \varphi_0(s)$  per ogni  $s \in [0, \ell(\varphi)]$ . Proviamo che  $p$  è continua: siccome

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi_0(p(s+h)) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_0(s+h) = \varphi_0(s) = \psi_0(p(s)),$$

deve risultare  $p(s+h) \rightarrow p(s)$  per  $h \rightarrow 0$  poiché altrimenti, per compattezza, esisterebbe una successione  $\{h_n\}$  infinitesima tale che  $p(s+h_n) \rightarrow \sigma_0 \in [0, \ell(\psi)]$ , ove necessariamente  $\sigma_0 \neq p(s)$ : ma allora  $\psi_0(p(s+h_n)) \rightarrow \psi_0(\sigma_0)$  e, per unicità del limite,  $\psi_0(\sigma_0) = \psi_0(p(s))$ : dato che  $\psi_0$  è iniettiva, se ne dedurrebbe  $\sigma_0 = p(s)$ , assurdo. Pertanto  $p$  è una funzione continua. Per  $h$  sufficientemente piccolo possiamo allora scrivere

$$\frac{\varphi_0(s+h) - \varphi_0(s)}{h} = \frac{\psi_0(\sigma_{s+h}) - \psi_0(\sigma_s)}{h} = \frac{\psi_0(\sigma_{s+h}) - \psi_0(\sigma_s)}{\sigma_{s+h} - \sigma_s} \cdot \frac{\sigma_{s+h} - \sigma_s}{h},$$

da cui, moltiplicando scalarmente per il vettore  $\frac{\varphi_0(s+h) - \varphi_0(s)}{h}$ ,

$$\left| \frac{\varphi_0(s+h) - \varphi_0(s)}{h} \right|_N^2 = \left\langle \frac{\psi_0(\sigma_{s+h}) - \psi_0(\sigma_s)}{\sigma_{s+h} - \sigma_s}, \frac{\varphi_0(s+h) - \varphi_0(s)}{h} \right\rangle_N \cdot \frac{\sigma_{s+h} - \sigma_s}{h};$$

ne segue

$$\frac{\sigma_{s+h} - \sigma_s}{h} = \frac{\left| \frac{\varphi_0(s+h) - \varphi_0(s)}{h} \right|_N^2}{\left\langle \frac{\psi_0(\sigma_{s+h}) - \psi_0(\sigma_s)}{\sigma_{s+h} - \sigma_s}, \frac{\varphi_0(s+h) - \varphi_0(s)}{h} \right\rangle_N}$$

e pertanto, essendo  $\sigma_{s+h} \rightarrow \sigma_s$  per  $h \rightarrow 0$ ,

$$\exists p'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_{s+h} - \sigma_s}{h} = \frac{|\mathbf{T}(\varphi_0(s))|_N^2}{\langle \mathbf{T}(\psi_0(\sigma_s)), \mathbf{T}(\varphi_0(s)) \rangle_N} = 1 \quad \forall s \in [0, \ell(\varphi)].$$

Dunque,  $p'(s) = 1$  e  $p(0) = \sigma_0 = 0$ : se ne deduce che  $p(s) = s$  ed in particolare  $\varphi_0(s) \equiv \psi_0(s)$  e  $\ell(\psi) = p(\ell(\varphi)) = \ell(\varphi)$ . Dal fatto che  $\varphi_0$  è  $C^1$ -equivalente a  $\varphi$  e  $\psi_0$  è  $C^1$ -equivalente a  $\psi$  segue ovviamente che  $\varphi$  e  $\psi$  sono curve  $C^1$ -equivalenti.

Se invece  $\varphi$  e  $\psi$  hanno verso opposto, l'argomentazione precedente mostra che  $\psi$  è  $C^1$ -equivalente all'opposta  $\varphi(a+b-t)$  di  $\varphi$ . Ne segue che  $\psi$  è anche  $C^1$ -equivalente a  $\varphi$ .

Siano ora  $\varphi$  e  $\psi$  due curve regolari, semplici e chiuse, aventi lo stesso sostegno e tali che

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \mathbf{x}, \quad \psi(c) = \psi(d) = \mathbf{y},$$

con  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  punti distinti del sostegno  $\Gamma$ : dobbiamo provare che  $\varphi$  e  $\psi$  sono  $C^1$ -equivalenti a tratti. Per iniettività, esistono unici  $h \in ]a, b[$  e  $k \in ]c, d[$  tali che  $\varphi(h) = \mathbf{y}$  e  $\psi(k) = \mathbf{x}$ . Poniamo

$$I_1 = [a, h], \quad I_2 = [h, b]; \quad J_1 = [c, k], \quad J_2 = [k, d].$$

Se  $\varphi$  e  $\psi$  hanno la stessa orientazione, si verifica subito, per la parte già dimostrata, che  $\varphi|_{I_1}$  è  $C^1$ -equivalente a  $\psi|_{J_2}$  e  $\varphi|_{I_2}$  è  $C^1$ -equivalente a  $\psi|_{J_1}$ ; se invece  $\varphi$  e  $\psi$  hanno orientazioni opposte, si vede che  $\varphi|_{I_1}$  è  $C^1$ -equivalente a  $\psi|_{J_1}$  e  $\varphi|_{I_2}$  è  $C^1$ -equivalente a  $\psi|_{J_2}$ . Si noti che se risulta, in particolare,  $\varphi(a) = \varphi(b) = \psi(c) = \psi(d)$  (condizione che, come sappiamo dall'esempio 4.1.6 (4), è necessaria per avere la  $C^1$ -equivalenza fra curve chiuse), allora si può ripetere l'argomento della prima parte, e si prova che le due curve sono  $C^1$ -equivalenti. La tesi è provata.  $\square$

Come già osservato, questo risultato ci permette di parlare di *lunghezza del sostegno*  $\Gamma$ , intendendo con ciò la lunghezza di qualunque curva regolare e semplice  $\varphi$  avente  $\Gamma$  come sostegno.

**Osservazione 4.2.2** Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una curva di classe  $C^1$  a tratti, la sua lunghezza può essere definita per additività: se  $I_1, \dots, I_m$  sono sottointervalli adiacenti di  $I$  la cui unione è  $I$ , e se  $\varphi_j = \varphi|_{I_j}$  sono curve di classe  $C^1$  per  $j = 1, \dots, m$ , si definisce

$$\ell(\varphi) = \sum_{j=1}^m \ell(\varphi_j);$$

è facile verificare che questa definizione non dipende dagli infiniti modi in cui  $\varphi$  può essere decomposta in "sottocurve" di classe  $C^1$ . Nel caso in cui  $\varphi$  è anche semplice e regolare a tratti, la sua lunghezza dipende solo dal sostegno  $\Gamma$ , cosicchè potremo analogamente parlare di lunghezza di  $\Gamma$ .

**Esempio 4.2.3** Calcoliamo la lunghezza della *lemniscata di Bernoulli*, data da

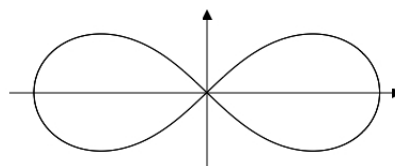
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Utilizzando le coordinate polari, si trova facilmente che l'insieme  $\Gamma$  è descritto da

$$\rho = \sqrt{2 \cos 2\vartheta}, \quad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

(ricordiamo che deve essere  $\cos 2\vartheta \geq 0$ ). L'insieme  $\Gamma$  è dunque sostegno di due curve, l'una definita per  $\vartheta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , l'altra per  $\vartheta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ , nessuna delle quali è regolare, in quanto entrambe sono di classe  $C^1$  solo nei punti interni. Le lunghezze delle due curve sono uguali fra loro, per evidenti ragioni di simmetria; la lunghezza della prima è

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\varphi'(\vartheta)|_2 d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\cos 2\vartheta}} d\vartheta,$$



e dunque la lunghezza cercata è data da

$$\ell(\Gamma) = 2I = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\cos 2\vartheta}} d\vartheta = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}.$$

Questo integrale è certamente finito, essendo

$$\cos 2\vartheta = -2\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) \quad \text{per } \vartheta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-.$$

Sebbene esso non sia calcolabile esplicitamente, se ne può trovare uno sviluppo in serie. Ponendo

$$\sqrt{2} \sin \vartheta = \sin t, \quad \text{ossia } \vartheta = \arcsin\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right),$$

si ha  $t \in [0, \pi/2]$  e, come si verifica facilmente,

$$\ell(\Gamma) = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \vartheta}} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}};$$

ricordando la serie binomiale

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad x \in ]-1, 1[ ,$$

troviamo, in virtù del teorema di B. Levi,

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{-n} \sin^{2n} t \right] dt = \\ &= 2\pi + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{-n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt. \end{aligned}$$

Infine, per l'esercizio 4.2.7(iii) si conclude che

$$\ell(\Gamma) = 2\pi \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 2^{-n} \right].$$

## Integrali curvilinei

Sia  $f$  una funzione continua definita su un insieme  $\Gamma$  che è sostegno di una curva  $\varphi$  di classe  $C^1$ . Andiamo a definire l'integrale di  $f$  lungo  $\varphi$  nel modo seguente:

**Definizione 4.2.4** Sia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva di classe  $C^1$ , con sostegno  $\Gamma$ . Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione misurabile definita su un aperto  $A \supset \Gamma$ , l'integrale curvilineo di  $f$  lungo  $\varphi$  è il numero, finito o infinito,

$$\int_{\varphi} f ds = \int_I f(\varphi(t)) |\varphi'(t)|_N dt,$$

sempre che la quantità a secondo membro sia ben definita.

Nel seguito ci interesseranno soprattutto i casi in cui  $f$  è continua e  $\varphi$  è definita su un intervallo  $I = [a, b]$ , casi nei quali l'integrale curvilineo ha sempre senso.

Si verifica facilmente, con un cambiamento di variabile, che se  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una curva  $C^1$ -equivalente a  $\varphi$ , allora si ha

$$\int_{\varphi} f ds = \int_{\psi} f ds.$$

Se, in particolare,  $\varphi$  è regolare e semplice, otteniamo che l'integrale curvilineo  $\int_{\varphi} f ds$  dipende soltanto, oltre che da  $f$ , dal sostegno  $\Gamma$ , e non dalla particolare curva regolare e semplice di cui tale insieme è sostegno: possiamo quindi scrivere

$$\int_{\Gamma} f ds$$

per indicare l'integrale di  $f$  lungo una qualunque curva regolare e semplice che abbia  $\Gamma$  come sostegno.

Un discorso analogo vale per le curve di classe  $C^1$  a tratti: se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una curva di classe  $C^1$  a tratti e  $\varphi_j = \varphi_{I_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , sono le curve di classe  $C^1$  che compongono  $\varphi$ , si definisce

$$\int_{\varphi} f ds = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j} f ds;$$

considerazioni analoghe alle precedenti portano a definire l'integrale  $\int_{\Gamma} f ds$  quando  $\Gamma$  è sostegno di una curva semplice e regolare a tratti.

**Osservazione 4.2.5** È immediato verificare che  $\int_{\Gamma} 1 ds = \ell(\Gamma)$ ; inoltre, si vede facilmente che se  $\Gamma$  è un segmento  $T$  dell'asse  $x$ , allora l'integrale curvilineo di  $f$  si riduce all'ordinario integrale  $\int_T f(x) dx$ .

**Esempi 4.2.6 (1)** Sia  $f(x, y) = x$ . L'integrale di  $f$  lungo la curva

$$\varphi(t) = (\sin t, 0), \quad t \in [0, \pi],$$

il cui sostegno è il segmento  $T$  dell'asse  $x$  di estremi 0 e 1, vale

$$\int_{\varphi} f ds = \int_0^{\pi} \sin t |\cos t| dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 1.$$

La curva  $\varphi$  non è semplice (e nemmeno regolare). Una curva regolare e semplice che ha per sostegno il segmento  $T$  è, ovviamente,

$$\psi(x) = (x, 0), \quad x \in [0, 1],$$

e per essa si ha

$$\int_{\psi} f ds = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Possiamo perciò concludere che

$$\int_T f ds = \frac{1}{2}.$$

Il valore 1 ottenuto per l'integrale lungo  $\varphi$  è giustificato dal fatto che tale curva percorre il sostegno due volte: la prima, crescendo, per  $t \in [0, \pi/2]$ , e la seconda, decrescendo, per  $t \in [\pi/2, \pi]$ .

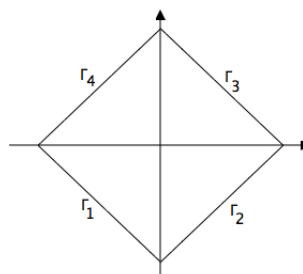
(2) Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\Gamma} e^{x-y} ds,$$

ove  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ .

L'insieme  $\Gamma$  è costituito da quattro segmenti:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : & x = x, \quad y = -1 - x, \quad x \in [-1, 0], \\ \Gamma_2 : & x = x, \quad y = x - 1, \quad x \in [0, 1], \\ \Gamma_3 : & x = x, \quad y = 1 - x, \quad x \in [0, 1], \\ \Gamma_4 : & x = x, \quad y = x + 1, \quad x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$



Si ha allora

$$\int_{\Gamma} e^{x-y} ds = \int_{-1}^0 e^{2x+1} \sqrt{2} dx + \int_0^1 e\sqrt{2} dx + \int_0^1 e^{2x-1} \sqrt{2} dx + \int_{-1}^0 e^{-1} \sqrt{2} dx = 2\sqrt{2} e.$$

Gli integrali curvilinei godono delle usuali proprietà degli integrali: linearità, monotonia, additività, eccetera. Gli esercizi 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5 sono dedicati alla dimostrazione di queste proprietà.

## Esercizi 4.2

1. Scrivere le seguenti curve in funzione del parametro lunghezza d'arco:

- (i)  $x = r \cos mt, y = r \sin mt, t \in [0, 2\pi]$  ( $r > 0, m \in \mathbb{N}^+$ );
- (ii)  $x = r \cos^3 t, y = r \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$  ( $r > 0$ );
- (iii)  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, t \in \mathbb{R}$ ;
- (iv)  $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, t \in [0, 2\pi]$ .

2. Sia  $\Gamma$  sostegno di una curva semplice e regolare (o regolare a tratti). Si provi che se  $f, g$  sono funzioni continue definite su  $\Gamma$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  si ha

$$\int_{\Gamma} (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_{\Gamma} f ds + \mu \int_{\Gamma} g ds.$$

3. Sia  $\Gamma$  sostegno di una curva semplice e regolare (o regolare a tratti). Si provi che se  $f, g$  sono funzioni continue definite su  $\Gamma$  con  $f \leq g$ , allora si ha

$$\int_{\Gamma} f ds \leq \int_{\Gamma} g ds;$$



se ne deduca che

$$\left| \int_{\Gamma} f ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f| ds.$$

4. Sia  $\Gamma$  sostegno di una curva semplice e regolare (o regolare a tratti)  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , e sia  $f$  una funzione continua definita su  $\Gamma$ . Se  $c \in ]a, b[$  e  $\Gamma_1 = \varphi[a, c]$ ,  $\Gamma_2 = \varphi[c, b]$ , si provi che

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds.$$

5. (*Teorema della media*) Sia  $\Gamma$  sostegno di una curva semplice e regolare (o regolare a tratti), e sia  $f$  una funzione continua definita su  $\Gamma$ . Si provi che

$$\min_{\Gamma} f \leq \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} f ds \leq \max_{\Gamma} f,$$

e che esiste  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  tale che

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} f ds.$$

6. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

(i)  $\int_{\Gamma} \sqrt{x+2y} ds$ , ove  $\Gamma$  è il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(2, 4)$ ;

(ii)  $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2} ds$ , ove  $\Gamma: x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t \in [0, 2\pi]$ ;

(iii)  $\int_{\Gamma} (x^3 + y) ds$ , ove  $\Gamma: x = 2t, y = t^3, t \in [0, 1]$ ;

(iv)  $\int_{\Gamma} \frac{x}{y^2} ds$ , ove  $\Gamma: \rho = e^{-\vartheta}, \vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ;

(v)  $\int_{\Gamma} (x^3 + y^2) ds$ , ove  $\Gamma: y^2 = x^3, x \in [0, 2]$ ;

(vi)  $\int_{\Gamma} xy ds$ , ove  $\Gamma =$  semiellisse di centro  $(2, 0)$ , semiassi 2 e 1,  $y \geq 0$ ;

(vii)  $\int_{\Gamma} \arctan \frac{y}{x} ds$ , ove  $\Gamma: \rho = 2\vartheta, \vartheta \in [0, \pi/2]$ ;

(viii)  $\int_{\Gamma} y ds$ , ove  $\Gamma: x^2 + y^2 = 9z^2, x = 3z^2, y \geq 0, z \in [0, 1]$ .

7. (i) Si verifichi che l'ellisse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ( $a \geq b$ ) è sostegno della curva regolare

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ed ha lunghezza pari a

$$\ell = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx,$$

ove  $k = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  è l'*eccentricità* dell'ellisse.

(ii) Procedendo come nell'esempio 4.2.3, si deduca che

$$\ell = 4a \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx \right].$$

(iii) Si verifichi per induzione che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

(iv) Si concluda che

$$\ell = 2\pi a \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right].$$

8. Posto  $\varphi(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , se ne disegni il sostegno  $\Gamma$ , si verifichi che la curva è chiusa e regolare, ma che  $\Gamma$  non è una varietà 1-dimensionale; si calcoli infine l'integrale  $\int_{\Gamma} y \, ds$ .

9. Dimostrare la proposizione 4.2.1 nel caso di curve definite su intervalli qualsiasi. [Traccia: fissare un punto  $\mathbf{x}_0 = \varphi(a_0) = \psi(c_0) \in \Gamma$  che funga da "origine" per l'ascissa curvilinea; poi, posto  $\lambda(t) = \int_{a_0}^t |\varphi'(v)|_N \, dv$ ,  $t \in I$ , e  $\ell(\tau) = \int_{c_0}^{\tau} |\psi'(u)|_N \, du$ ,  $\tau \in J$ , si proceda come nel caso di intervalli compatti.]

### 4.3 Geometria delle curve piane

Consideriamo una curva piana  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , che supporremo regolare e di classe  $C^2$ ; scriviamo  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . Come sappiamo, il suo versore tangente è

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|_2} = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

Sia  $\mathbf{N}(t)$  il versore normale a  $\mathbf{T}(t)$ , ottenuto ruotando  $\mathbf{T}(t)$  di un angolo retto in verso antiorario, cioè di  $+\pi/2$ : si ha

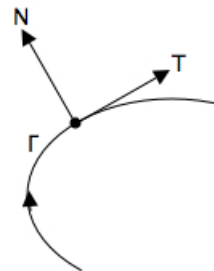
$$\mathbf{N}(t) = \left( \frac{-y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

L'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto  $\varphi(t)$  è dunque

$$(x - x(t))y'(t) - (y - y(t))x'(t) = 0,$$

mentre l'equazione cartesiana della retta normale alla curva nel punto  $\varphi(t)$  è

$$(x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0.$$



Supponiamo adesso che  $\varphi$  sia riferita al parametro lunghezza d'arco: sarà allora  $\varphi(s) = (x(s), y(s))$ , e quindi, per ogni  $s$ ,

$$\begin{cases} x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1, \\ \mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s)), \\ \mathbf{N}(s) = (-y'(s), x'(s)). \end{cases}$$

Questo ci aiuterà a semplificare i calcoli: per il caso generale in cui  $\varphi$  dipende da un parametro generico  $t$ , si veda l'esercizio 4.3.3.

Poiché  $\varphi \in C^2$ , il vettore  $\mathbf{N}(s)$  è derivabile; essendo  $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_2 = 1$ , si ha

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_2 = 2(x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)) = 2\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle_2,$$

ossia  $\mathbf{T}'(s)$  è ortogonale a  $\mathbf{T}(s)$ . Similmente, essendo  $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_2 = 1$ , anche  $\mathbf{N}'(s)$  è ortogonale a  $\mathbf{N}(s)$ .

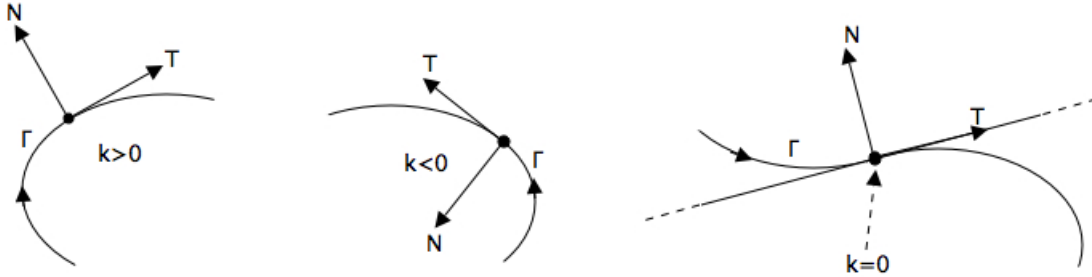
Dato che  $\mathbf{T}'(s)$  e  $\mathbf{N}(s)$  sono paralleli, esiste un numero  $k(s) \in \mathbb{R}$  tale che

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s);$$

il numero  $k(s)$  si dice *curvatura* di  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ . Si noti che

$$k(s) = k(s)\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_2 = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_2 = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s),$$

e quindi  $k$  è una funzione continua; inoltre si ha  $|k(s)| = |\mathbf{T}'(s)|_2$ , quindi  $k(s)$  misura il tasso di variazione di  $\mathbf{T}(s)$  il quale, essendo un versore, può solo ruotare. Si ha  $k(s) > 0$  se, al crescere di  $s$ ,  $\mathbf{T}(s)$  ruota in direzione di  $\mathbf{N}(s)$ , mentre  $k(s) < 0$  se  $\mathbf{T}(s)$  ruota in direzione di  $-\mathbf{N}(s)$ ; nei punti in cui la curvatura cambia segno, pertanto, la curva attraversa la propria retta tangente.



Dato che anche  $\mathbf{N}'(s)$  e  $\mathbf{T}(s)$  sono paralleli, esiste un numero  $h(s) \in \mathbb{R}$  tale che

$$\mathbf{N}'(s) = h(s)\mathbf{T}(s),$$

ma la relazione

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_2 = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_2 + \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle_2 = \\ &= k(s) |\mathbf{N}(s)|_2^2 + h(s) |\mathbf{T}(s)|_2^2 = k(s) + h(s) \end{aligned}$$

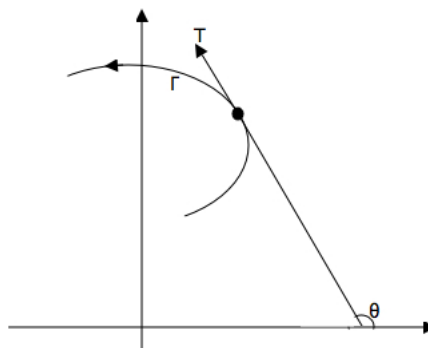
implica  $h(s) = -k(s)$ . Ne seguono le due *formule di Frénet-Serret* per le curve piane:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s). \end{cases}$$

## Anomalia

Continuiamo a considerare una curva piana  $\varphi(s)$  regolare e di classe  $C^2$ , riferita al parametro lunghezza d'arco. Introduciamo l'*anomalia*  $\vartheta(s)$  come l'angolo fra  $\mathbf{T}(s)$  ed il verso positivo dell'asse  $x$ . Essa è univocamente definita se si fissa  $\vartheta(0) \in [0, 2\pi[$ , e risulta

$$\cos \vartheta(s) = x'(s), \quad \sin \vartheta(s) = y'(s).$$



L'anomalia è una funzione di classe  $C^1$ , poiché localmente essa si esprime nella forma

$$\vartheta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)} + 2k\pi, \quad \text{oppure} \quad \vartheta(s) = \operatorname{arccot} \frac{x'(s)}{y'(s)} + 2k\pi.$$

Derivando, si trova

$$x''(s) = -\sin \vartheta(s) \vartheta'(s), \quad y''(s) = \cos \vartheta(s) \vartheta'(s),$$

da cui

$$k(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \vartheta'(s).$$

la curvatura  $k(s)$  è dunque il tasso di variazione dell'anomalia  $\vartheta(s)$ , a conferma delle osservazioni fatte sul legame fra  $k(s)$  e la variazione di  $\mathbf{T}(s)$ .

È interessante notare che la curvatura individua univocamente una curva piana, naturalmente a meno di spostamenti rigidi del piano. Si ha infatti:

**Teorema 4.3.1** *Sia  $\ell > 0$ . Per ogni  $k \in C[0, \ell]$  e per ogni  $x_0, y_0, \vartheta_0 \in \mathbb{R}$  esiste una e una sola curva  $\varphi(s)$ ,  $s \in [0, \ell]$ , di classe  $C^2$ , tale che*

$$\varphi(0) = (x_0, y_0), \quad \varphi'(0) = (\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0),$$

e che abbia  $k(s)$  come funzione curvatura in  $[0, \ell]$ .

**Dimostrazione** Definiamo

$$\vartheta(s) = \vartheta_0 + \int_0^s k(\tau) d\tau, \quad s \in [0, \ell].$$

La curva  $\varphi(s) = (x(s), y(s))$ , data da

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos \vartheta(\tau) d\tau, \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin \vartheta(\tau) d\tau, \quad s \in [0, \ell],$$

risponde ai requisiti richiesti.

Se poi  $\varphi_1(s)$ ,  $s \in [0, \ell]$ , è un'altra curva con le stesse proprietà, la sua anomalia  $\vartheta_1(s)$  verificherà

$$\vartheta_1'(s) = k(s) = \vartheta'(s), \quad \vartheta_1(0) = \vartheta_0 = \vartheta(0),$$

e quindi, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy,  $\vartheta_1 \equiv \vartheta$  in  $[0, \ell]$ . Ne segue che le componenti  $x_1(s), y_1(s)$  di  $\varphi_1(s)$  soddisferanno

$$\begin{cases} x_1'(s) = \cos \vartheta(s) = x'(s), & \begin{cases} y_1'(s) = \sin \vartheta(s) = y'(s), \\ y_1(0) = y_0 = y(0), \end{cases} \\ x_1(0) = x_0 = x(0), \end{cases}$$

da cui finalmente  $x_1 \equiv x$  e  $y_1 \equiv y$ , ossia  $\varphi_1 \equiv \varphi$ .  $\square$

Analizziamo adesso l'ordine di contatto fra una curva regolare  $\varphi$  (di classe  $C^\infty$ ), sempre riferita al parametro lunghezza d'arco  $s$ , ed una qualunque retta di equazione  $ax + by + c = 0$ . Se la retta incontra la curva nel punto  $\varphi(s_0)$ , diremo che la retta ha un contatto di ordine  $\geq 1$  con la curva in tale punto; in tal caso, dette  $x(s), y(s)$  le componenti di  $\varphi(s)$ , la funzione

$$g(s) = ax(s) + by(s) + c$$

deve annullarsi per  $s = s_0$ , cioè  $c = -ax(s_0) - by(s_0)$ . Il contatto avrà ordine  $\geq 2$  se la nostra retta, oltre ad intersecare la curva, le è tangente nel punto  $\varphi(s_0)$ : in questo caso, a meno di costanti moltiplicative dovrà aversi  $a = -y'(s_0)$  e  $b = x'(s_0)$ , cosicché la funzione  $g$  diventa

$$g(s) = -y'(s_0)[x(s) - x(s_0)] + x'(s_0)[y(s) - y(s_0)]$$

e soddisfa  $g(s_0) = 0$  e  $g'(s_0) = 0$ . Le espressioni di  $g''$  e  $g'''$  sono

$$\begin{aligned} g''(s) &= -y'(s_0)x''(s) + x'(s_0)y''(s) \\ g'''(s) &= -y'(s_0)x'''(s) + x'(s_0)y'''(s); \end{aligned}$$

si verifica allora che

$$g''(s_0) = k(s_0), \quad g'''(s_0) = k'(s_0),$$

da cui si deduce che se  $k(s_0) \neq 0$  l'ordine di contatto con la retta tangente è esattamente 2; se  $k(s_0) = 0$  e  $k'(s_0) \neq 0$ , l'ordine è 3, ed in tal caso, poiché  $k(s)$  cambia segno in  $s_0$ , come già osservato la curva attraversa la propria tangente in  $\varphi(s_0)$ ; se infine  $k(s_0) = k'(s_0) = 0$  l'ordine di contatto è almeno 4 e in quel punto la curvatura ha un massimo o un minimo locale, oppure un flesso di ordine superiore.



Analizziamo lo stesso problema nel caso di una generica circonferenza, la cui equazione è del tipo

$$|\mathbf{x} - \mathbf{u}|_2^2 = R^2.$$

La circonferenza tocca la curva in un punto  $\varphi(s)$  se e solo se la funzione

$$G(s) = |\varphi(s) - \mathbf{u}|_2^2 - R^2$$

si annulla; ciò naturalmente implica  $R = |\boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u}|_2$  ed in questo caso si ha un ordine di contatto  $\geq 1$ . Il contatto avrà ordine  $\geq 2$  se e solo se

$$G'(s) = \langle 2\boldsymbol{\varphi}'(s), \boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u} \rangle_2 = 0,$$

ossia se e solo se  $\boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u}$  è ortogonale al versore tangente  $\mathbf{T}(s)$ . Il centro della circonferenza è dunque sulla retta per  $\boldsymbol{\varphi}(s)$  perpendicolare a  $\mathbf{T}(s)$ , e la circonferenza è tangente alla curva in  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ : in particolare potremo scrivere  $\boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u} = \mu(s)\mathbf{N}(s)$  per un opportuno numero  $\mu(s)$  (il cui modulo è il raggio della circonferenza).

Il contatto è di ordine almeno 3 se e solo se

$$G''(s) = \langle 2\boldsymbol{\varphi}''(s), \boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u} \rangle_2 + 2|\boldsymbol{\varphi}'(s)|_2^2 = 0,$$

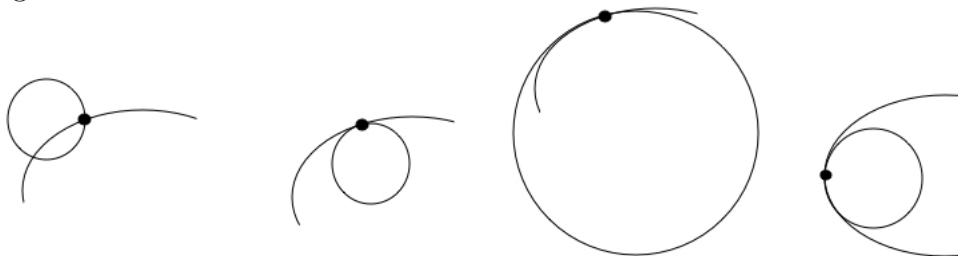
ossia, utilizzando le formule di Frénet-Serret, se e solo se

$$\frac{1}{2}G''(s) = \langle k(s)\mathbf{N}(s), \mu(s)\mathbf{N}(s) \rangle_2 + 1 = k(s)\mu(s) + 1 = 0.$$

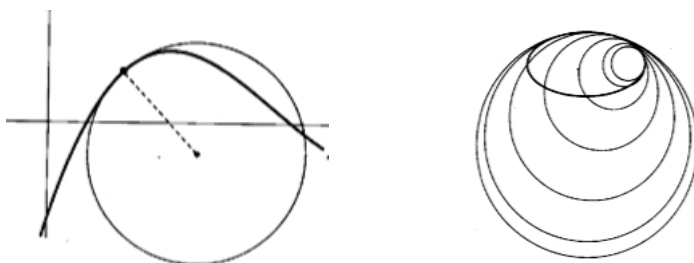
In definitiva si ha contatto di ordine  $\geq 3$  se e solo se  $\mu(s) = -\frac{1}{k(s)}$ , cioè

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{N}(s), \quad R = \frac{1}{|k(s)|}.$$

Si noti che quando  $k(s) = 0$  il raggio diventa infinito e la circonferenza degenera nella retta tangente.



Dunque, vi è un unico cerchio il cui bordo ha ordine di contatto  $\geq 3$  con la curva nel punto  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ : è quello di raggio  $\frac{1}{|k(s)|}$ , il cui centro sta sulla retta per  $\boldsymbol{\varphi}(s)$  normale alla curva; esso sta dalla parte del versore  $\mathbf{N}(s)$  se  $k(s) > 0$ , dalla parte opposta se  $k(s) < 0$ , e quindi sempre, per così dire, dalla parte dove la curva gira. Tale cerchio si chiama *cerchio osculatore* alla curva  $\boldsymbol{\varphi}$  nel punto  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ , mentre il centro del cerchio osculatore si chiama *centro di curvatura* di  $\boldsymbol{\varphi}$  in tale punto. Si noti che se  $k'(s) \neq 0$ , cosicché  $k$  è strettamente monotona in un intorno di  $s$ , allora la curva, rispetto al punto  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ , ha curvatura minore di  $k(s)$  da una parte e maggiore di  $k(s)$  dall'altra: quindi il cerchio osculatore, la cui curvatura (costante) è  $k(s)$  (esercizio 4.3.2), deve attraversare la curva nel punto  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ .



Il contatto del cerchio osculatore con la curva è di ordine  $\geq 4$  quando

$$\frac{1}{2}G'''(s) = k'(s) \langle \mathbf{N}(s), \boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u} \rangle_2 + k(s) \langle \mathbf{N}'(s), \boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u} \rangle_2 + k(s) \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_2 = 0,$$

ossia, ricordando che  $\mathbf{N}' \perp \mathbf{N}$  e  $\mathbf{N} \perp \mathbf{T}$ , quando

$$0 = k'(s) \langle \mathbf{N}(s), \boldsymbol{\varphi}(s) - \mathbf{u} \rangle_2 = -\frac{k'(s)}{k(s)};$$

ciò naturalmente, accade se e solo se  $k'(s) = 0$ . I punti nei quali la curvatura ha derivata nulla si dicono *vertici* della curva: quelli ordinari, dove il contatto è di ordine esattamente 4, corrispondono a punti di massimo o di minimo relativo per la curvatura. Ad esempio, nel caso dell'ellisse i vertici si trovano all'intersezione con i due semiassi principali. Si può dimostrare che ogni curva regolare chiusa (di classe  $C^3$ ) possiede almeno quattro vertici.

### Esercizi 4.3

1. Verificare che una circonferenza di raggio  $R > 0$  ha curvatura costante  $k(s) = \frac{1}{R}$ .
2. Sia  $\boldsymbol{\alpha}$  una curva piana regolare di classe  $C^2$ , riferita al parametro lunghezza d'arco. Si provi che se la curvatura  $k(s)$  verifica  $k(s) \equiv A$ , con  $A$  costante non nulla, allora il sostegno di  $\boldsymbol{\alpha}$  è un arco di circonferenza di raggio  $\frac{1}{|A|}$ . Che cosa succede quando  $A = 0$ ?  
[**Traccia:** si consideri la curva  $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + \frac{1}{A}\mathbf{N}(s)\dots$ ]
3. Sia  $\boldsymbol{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare di classe  $C^2$  di componenti  $x(t), y(t)$ . Si provi che il versore tangente, il versore normale e la curvatura sono dati dalle formule

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \left( \frac{x'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}}, \frac{y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}} \right), \\ \mathbf{N}(t) &= \left( \frac{-y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}}, \frac{x'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}} \right), \\ k(t) &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

mentre il centro del cerchio osculatore ha coordinate

$$\left( x(t) - \frac{y'(t)}{k(t)[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}}, y(t) + \frac{x'(t)}{k(t)[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}} \right).$$

Si verifichi inoltre che le formule di Frénet-Serret diventano

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(t) = k(t)|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2 \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{N}'(t) = -k(t)|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2 \mathbf{T}(t). \end{cases}$$

4. Si provi che se una curva  $\varphi$  è il grafico di una funzione  $f \in C^2[a, b]$ , allora la curvatura di  $\varphi$  è data da

$$k(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}},$$

e che di conseguenza  $k > 0$  dove  $f$  è convessa e  $k < 0$  dove  $f$  è concava.

5. Determinare la curvatura e il cerchio osculatore nei punti dell'astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0).$$

6. Determinare la curvatura e il cerchio osculatore nei punti della parabola

$$y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Dimostrare che se  $f \in C^2[a, b]$  e  $\varphi$  è la curva espressa in coordinate polari dall'equazione  $\rho = f(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [a, b]$ , allora la curvatura di  $\varphi$  è data dalla formula

$$k(\vartheta) = \frac{f(\vartheta)^2 + 2f'(\vartheta)^2 - f''(\vartheta)f(\vartheta)}{[f'(\vartheta)^2 + f(\vartheta)^2]^{3/2}}.$$

8. Sia  $\varphi(t) = (t^\alpha, t^\beta)$ ,  $t > 0$ , ove  $\beta > \alpha > 0$ . Si provi che  $\varphi$  è regolare e di classe  $C^\infty$ , se ne calcoli la curvatura  $k(t)$ , si verifichi che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} k(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta > 2\alpha \\ +\infty & \text{se } \alpha < \beta < 2\alpha, \end{cases}$$

e infine si disegni la curva.

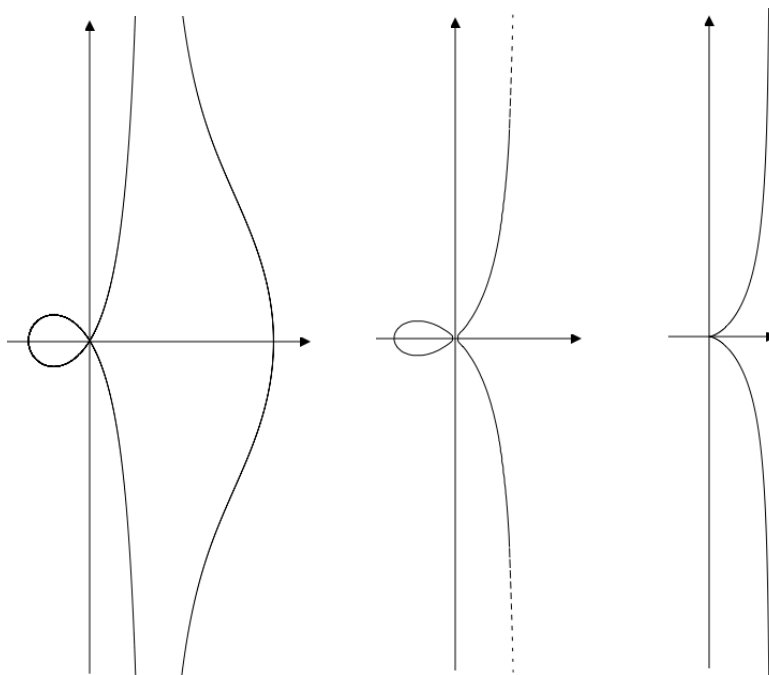
9. Calcolare la curvatura delle seguenti curve:

(i) (concoide di Nicomede)  $\rho = \frac{a}{\cos \vartheta} + b$ ,  $\vartheta \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}\}$  ( $a, b > 0$ );

(ii) (strofoide)  $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$ ,  $|x| < a$  ( $a > 0$ );

(iii) (cissoide di Diocle)  $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ ,  $x \in [0, a[$  ( $a > 0$ );

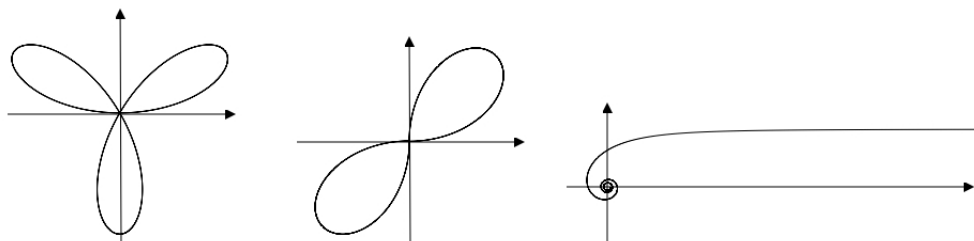




(iv) (rosa a 3 petali)  $\rho = a \sin 3\vartheta$  ( $a > 0$ );

(v) (rosa a 2 petali)  $\rho = a \sin 2\vartheta$  ( $a > 0$ );

(vi) (spirale iperbolica)  $\rho = \frac{a}{\vartheta}$  ( $a > 0$ ).



10. Per una curva piana  $\varphi$  di classe  $C^3$ , riferita al parametro lunghezza d'arco, tale che  $\varphi(0) = \mathbf{0}$  e  $\varphi'(0) = (1, 0)$ , provare che

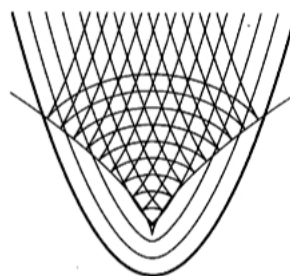
$$\varphi''(0) = (0, k(0)), \quad \varphi'''(0) = (-k(0)^2, k'(0)),$$

ed interpretare geometricamente questi fatti.

11. Dato  $b > 0$  e fissata una curva regolare  $\varphi$ , di classe  $C^2$ , riferita al parametro lunghezza d'arco, la curva

$$\delta(s) = \varphi(s) + b\mathbf{N}(s)$$

è detta *parallela* a  $\varphi$ . Si provi che  $\delta$  è una curva regolare tranne che nei punti ove  $k(s) = 1/b$ ; si verifichi che in tali punti  $\delta(s)$  è il centro del cerchio osculatore di  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ . Nella figura a fianco sono riportate le parallele della parabola.



## 4.4 Involuppi

Consideriamo una funzione  $F$  di classe  $C^1$ , definita in  $A \times I$ , ove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ , tale che

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, a) \right]^2 + \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, a) \right]^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in A, \quad \forall a \in I.$$

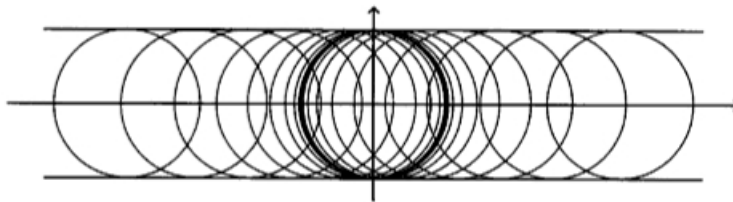
In queste ipotesi, per ogni fissato  $a \in I$ , l'equazione

$$F(x, y, a) = 0$$

definisce implicitamente, in virtù del teorema del Dini (teorema 1.9.2), una curva piana regolare  $\Gamma_a$ .

Provando a disegnare tutte le curve della famiglia  $\{\Gamma_a\}_{a \in I}$ , in molti casi si nota che le curve “si addensano” in certe zone del piano, spesso delineando il profilo di una nuova curva non appartenente alla famiglia.

**Esempio 4.4.1** Posto  $F(x, y, a) = (x - a)^2 + y^2 - 1$ , le curve  $\Gamma_a$  sono circonferenze di raggio 1, centrate in  $(a, 0)$ ; l'insieme in cui queste curve “si addensano” è costituito dalle due rette  $y = \pm 1$ .



Andiamo ad interpretare matematicamente questo fenomeno. Consideriamo due curve “vicine”  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_{a+h}$ , con  $|h|$  piccolo. Se queste due curve hanno punti in comune, essi risolveranno il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ F(x, y, a + h) = 0, \end{cases}$$

che si scrive anche nella forma equivalente

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \frac{F(x, y, a + h) - F(x, y, a)}{h} = 0, \end{cases}$$

Al variare di  $h$ , questi punti (se esistono), che indichiamo con  $(x_h, y_h)$ , variano in  $\Gamma_a$ ; se per  $h \rightarrow 0$  essi convergono verso determinati punti di  $\Gamma_a$ , questi altri punti  $(\bar{x}, \bar{y})$  si dicono *punti caratteristici* di  $\Gamma_a$ . È facile verificare che i punti caratteristici, se esistono, sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a}(x, y, a) = 0, \end{cases}$$

Infatti, per ogni  $h$  si ha, dal teorema del valor medio,

$$\begin{cases} F(x_h, y_h, a) = 0 \\ \frac{F(x_h, y_h, a+h) - F(x_h, y_h, a)}{h} = \frac{\partial F}{\partial a}(x_h, y_h, a + \delta_h) = 0, \end{cases}$$

ove  $\delta_h$  è un opportuno numero tale che  $0 < |\delta_h| < |h|$ . Quindi, per la continuità di  $F$  e  $\frac{\partial F}{\partial a}$ , se  $(x_h, y_h) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ , passando al limite per  $h \rightarrow 0$  si ottiene

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}, a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a}(\bar{x}, \bar{y}, a) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo fatto una lista di ipotesi alquanto arbitrarie: che i punti  $(x_h, y_h)$  esistano per ogni  $|h|$  sufficientemente piccolo, e che tali punti convergano per  $h \rightarrow 0$ . Tuttavia si tratta di ipotesi spesso verificate in svariati esempi significativi.

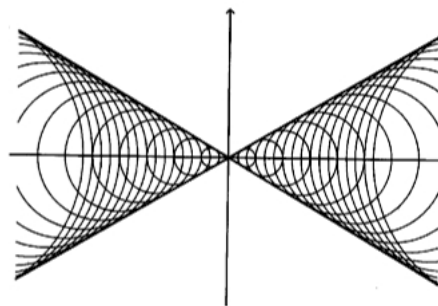
**Esempio 4.4.2** Posto  $F(x, y, a) = (x - a)^2 + y^2 - a^2/4$ , l'insieme  $\Gamma_a$  è la circonferenza di centro  $(a, 0)$  e raggio  $|a|/2$ . Risolvendo il sistema fra  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_{a+h}$  si trovano i punti

$$x_h = \frac{h}{2} + \frac{3a}{4}, \quad y_h = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{3h}{8} - \frac{a}{4}\right)^2},$$

e per  $h \rightarrow 0$  si ottiene il punto caratteristico

$$\bar{x} = \frac{3a}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

Il luogo dei punti caratteristici, al variare di  $a$ , dà la coppia di rette  $y = \pm x/\sqrt{3}$ , sulle quali i punti delle circonferenze “si addensano”.



**Osservazione 4.4.3** Le soluzioni del sistema  $F = \frac{\partial F}{\partial a} = 0$  non sono necessariamente punti caratteristici della famiglia  $\{\Gamma_a\}$ : ad esempio se  $\Gamma_a$  è la circonferenza di centro  $(a^3, 0)$  e raggio 1, i punti caratteristici sono soltanto quelli delle rette  $y = \pm 1$ , mentre le soluzioni di  $F = \frac{\partial F}{\partial a} = 0$  sono anche i punti della circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ , oltre a quelli di tali rette. Le verifiche di tutto ciò sono facili.

Sotto opportune e ragionevoli ipotesi, comunque, le soluzioni del sistema  $F = \frac{\partial F}{\partial a} = 0$  formano una curva con proprietà geometriche assai interessanti.

**Teorema 4.4.4** Sia  $F : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$ . Supponiamo che

$$(i) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial a} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial a} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } A \times I; \quad (ii) \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \neq 0 \text{ in } A \times I.$$

Allora le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a}(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

formano una curva regolare  $\Gamma$ , parametrizzata da  $a \in I$ , la quale è tangente in ogni suo punto alla corrispondente curva  $\Gamma_a$  definita implicitamente dall'equazione  $F(x, y, a) = 0$ . La curva  $\Gamma$  si dice involuppo della famiglia  $\{\Gamma_a\}_{a \in I}$ .

**Dimostrazione** La condizione (i), intanto, assicura che  $F_x^2 + F_y^2 > 0$  in  $A \times I$ , e che quindi  $\Gamma_a$  è una curva regolare; tale condizione inoltre, in virtù del teorema del Dini (esercizio 1.9.4), assicura che il sistema dato definisce implicitamente una curva  $\Gamma$ , parametrizzata nella forma  $x = p(a)$ ,  $y = q(a)$ ,  $a \in I$ , con  $p, q$  di classe  $C^1$  e

$$\begin{pmatrix} p'(a) \\ q'(a) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial a} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial a} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial^2 a} \end{pmatrix},$$

ove le derivate di  $F$  sono tutte calcolate in  $(p(a), q(a), a)$  e si è usato il fatto che  $F_a(p(a), q(a), a) = 0$ . In particolare,  $\Gamma$  è una curva regolare, poiché da (ii) segue che  $p'(a)^2 + q'(a)^2 > 0$ .

Derivando rispetto ad  $a$  l'identità  $F(p(a), q(a), a) = 0$  e tenendo conto ancora una volta della condizione  $F_a(p(a), q(a), a) = 0$ , si ricava

$$F_x(p(a), q(a), a) p'(a) + F_y(p(a), q(a), a) q'(a) = 0;$$

perciò il vettore tangente  $(p'(a), q'(a))$  è ortogonale a  $(F_x(p(a), q(a), a), F_y(p(a), q(a), a))$ , il quale è normale alla curva  $\Gamma_a$ : dunque  $\Gamma$  risulta tangente a  $\Gamma_a$  nel punto  $(p(a), q(a))$ .

□

## Evoluta di una curva piana

Data una curva piana  $\varphi$ , regolare e di classe  $C^2$ , con curvatura  $k(s)$  mai nulla, il luogo dei suoi centri di curvatura (cioè dei centri dei suoi cerchi osculatori) è una nuova curva  $\epsilon$  che si chiama *evoluta* della curva  $\varphi$ . Se  $\varphi$  è riferita al parametro lunghezza d'arco, le equazioni parametriche dell'evoluta  $\epsilon$  sono

$$\epsilon(s) = \varphi(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{N}(s)$$

(si noti che  $s$  non è il parametro lunghezza d'arco su  $\epsilon$ ). L'evoluta è una curva regolare, ad eccezione dei punti in cui  $k'(s) = 0$ , che corrispondono ai vertici della curva  $\varphi$ : infatti, per le formule di Frénet-Serret si ha

$$\epsilon'(s) = -\frac{k'(s)}{k(s)^2} \mathbf{N}(s).$$

In particolare, la normale alla curva  $\varphi$  è tangente alla sua evoluta; il punto di tangenza è  $\epsilon(s)$ , ossia il centro di curvatura relativo al punto  $\varphi(s)$ .

Vediamo due proprietà interessanti dell'evoluta.

**Proposizione 4.4.5** *L'evoluta di una curva regolare, di classe  $C^2$ , con curvatura mai nulla, è l'involuppo delle rette normali ad essa.*

**Dimostrazione** Sia  $\varphi$  una curva piana, regolare e di classe  $C^2$ , con curvatura  $k(s)$  mai nulla, riferita al parametro lunghezza d'arco, e sia  $\epsilon$  la sua evoluta. La retta normale a  $\varphi(s) = (x(s), y(s))$  ha equazione

$$F(x, y, s) = (x - x(s))x'(s) + (y - y(s))y'(s) = 0;$$

derivando questa relazione rispetto a  $s$  troviamo, ponendo  $(N_1(s), N_2(s)) = \mathbf{N}(s)$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial s}(x, y, s) &= (x - x(s))x''(s) + (y - y(s))y''(s) - x'(s)^2 - y'(s)^2 = \\ &= (x - x(s))k(s)N_1(s) + (y - y(s))k(s)N_2(s) - 1. \end{aligned}$$

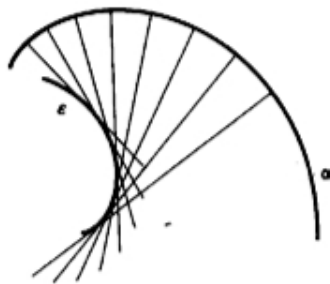
Ricordando che  $\epsilon = \varphi(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{N}(s)$ , si deduce che  $\epsilon(s)$  risolve il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, s) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial s}(x, y, s) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte si vede facilmente che quando  $\varphi(s)$  non è un vertice di  $\varphi$  si ha

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial s} \end{pmatrix} = k(s) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{k'(s)}{k(s)^2} \neq 0;$$



pertanto il teorema 4.4.4 ci fornisce la tesi.  $\square$

**Proposizione 4.4.6** *Data una curva regolare  $\varphi$ , di classe  $C^2$ , con curvatura mai nulla, sia  $\epsilon$  la sua evoluta. Fissato un intervallo  $[s_0, s_1]$  tale che  $\varphi[s_0, s_1]$  non contenga vertici, la lunghezza dell'arco di evoluta relativo a tale intervallo è uguale alla differenza fra i raggi di curvatura (cioè i raggi dei cerchi osculatori) relativi ai due estremi  $\varphi(s_0)$  e  $\varphi(s_1)$ .*

**Dimostrazione** Sia  $\sigma$  il parametro lunghezza d'arco dell'evoluta a partire da  $s_0$ :

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^s |\epsilon'(\tau)|_2 d\tau;$$

poiché, per ipotesi,  $k$  e  $k'$  non si annullano in  $[s_0, s_1]$ , si ha

$$\sigma'(s) = |\epsilon'(s)|_2 = \frac{|k'(s)|}{k(s)^2} = \left| \frac{d}{ds} \frac{1}{k(s)} \right| = \left| \frac{d}{ds} \frac{1}{|k(s)|} \right|.$$

Dunque, integrando fra  $s_0$  e  $s_1$  otteniamo

$$\ell(\epsilon|_{[s_0, s_1]}) = |\sigma(s_1) - \sigma(s_0)|_2 = \left| \frac{1}{|k(s_1)|} - \frac{1}{|k(s_0)|} \right|.$$

La tesi segue ricordando che  $\frac{1}{|k(s)|}$  è il raggio di curvatura relativo al punto  $\varphi(s)$ .  $\square$

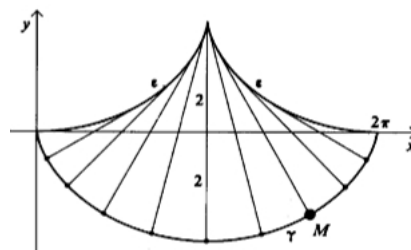
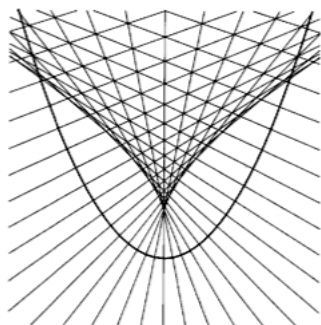
Dalla proposizione 4.4.6 ricaviamo che, immaginando di tendere un pezzo di filo inestensibile lungo l'evolva  $\epsilon$  fra  $\epsilon(s_1)$  e  $\epsilon(s_0)$ , con la parte residua tesa fra  $\epsilon(s_0)$  e  $\varphi(s_0)$ , accade la cosa seguente: "tirando" il filo teso in modo che si stacchi via via dall'evolva fino a tendersi in linea retta da  $\epsilon(s_1)$ , il suo secondo estremo, che prima era in  $\varphi(s_0)$ , descriverà la curva  $\varphi$  (l'evolvente di  $\epsilon$ ) fino a trovarsi teso fra  $\epsilon(s_1)$  e  $\varphi(s_1)$ .

**Esempi 4.4.7 (1)** Per la parabola  $y = x^2$ , il luogo dei centri di curvatura (esercizio 4.3.6) è la curva

$$x(t) = -4t^3, \quad y(t) = 3t^2 + \frac{1}{2};$$

eliminando la  $t$ , si ottiene come evolva la *parabola semicubica* di equazione

$$16 \left( y - \frac{1}{2} \right)^3 = 27x^2.$$



(2) La *cicloide* (curva descritta da un punto su una circonferenza di raggio 1, centrata in un punto di quota 1, che rotola senza strisciare lungo l'asse  $x$ ) è data dalle equazioni parametriche

$$x = \pi + t + \sin t, \quad y = -1 - \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Ricordando l'esercizio 4.3.3, l'evolva di una curva  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  di parametro generico  $t$  è data da

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \varphi(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}(t) = \\ &= \left( x(t) - y'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, y(t) + x'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \right). \end{aligned}$$

Dato che

$$x'(t) = 1 + \cos t, \quad y'(t) = \sin t, \quad x''(t) = -\sin t, \quad y''(t) = \cos t,$$

si deduce facilmente che

$$\epsilon(t) = (\pi + t - \sin t, 1 + \cos t), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

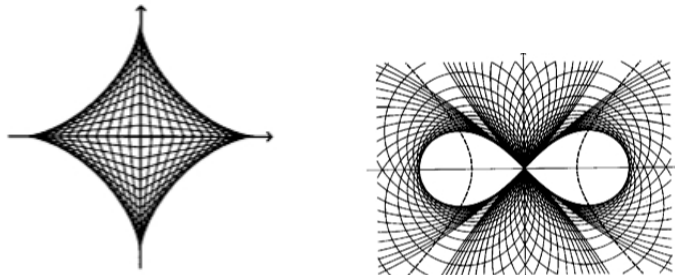
ovvero, ponendo  $\tau = t + \pi$ ,

$$\epsilon(\tau - \pi) + (\pi, -2) = (\pi + \tau + \sin \tau, -1 - \cos \tau), \quad \tau \in [0, 2\pi].$$

Queste sono le equazioni di una cicloide, ottenuta traslando del vettore  $(\pi, -2)$  la cicloide originaria  $\varphi$ . Dunque, l'evoluta di una cicloide è la stessa cicloide.

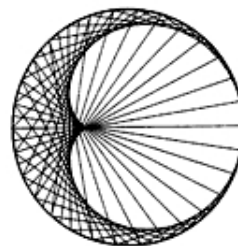
### Esercizi 4.4

1. Calcolare la curvatura dell'evoluta di una curva regolare  $\varphi$ , di classe  $C^2$ , con curvatura mai nulla, riferita al parametro lunghezza d'arco.
2. Determinare l'inviluppo della famiglia di segmenti di lunghezza  $\ell$ , aventi gli estremi sui due assi coordinati di  $\mathbb{R}^2$ , nonché l'evoluta di tale inviluppo.



3. Provare che l'inviluppo delle circonferenze passanti per l'origine e con centro sull'iperbole  $y^2 - x^2 = 1$  è la lemniscata di Bernoulli (esempio 4.2.3).
4. Una sorgente posta sul bordo di un cerchio emette raggi luminosi che vengono riflessi dal bordo del cerchio. Si trovi l'equazione dell'inviluppo dei raggi riflessi (*caustica di riflessione*).

[**Traccia:** si supponga che il cerchio abbia equazione  $x^2 + y^2 \leq 1$  e che la sorgente si trovi in  $P = (1, 0)$ . Il raggio che colpisce  $(\cos t, \sin t)$  viene riflesso in  $(\cos 2t, \sin 2t)$ ; si mostri che l'equazione del raggio riflesso ha la forma  $F(x, y, t) = x(\sin t - \sin 2t) + y(\cos t - \cos 2t) - \sin t = 0$ .

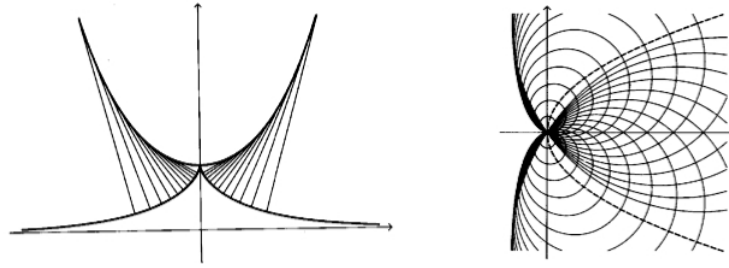
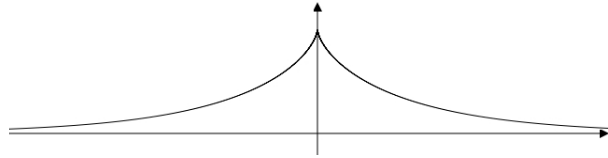


Si provi poi che le soluzioni di  $F(x, y, t) = F_t(x, y, t) = 0$  sono date da  $x = \frac{2}{3} \cos t(1 + \cos t) - \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3} \sin t(1 + \cos t)$ , ed usando coordinate polari di centro  $(-\frac{1}{3}, 0)$  si provi che si arriva all'equazione  $\rho = \frac{2}{3}(1 + \cos \vartheta)$ , che è quella della *cardioide* (esercizio 4.1.6(xii)).]

5. Provare che l'evoluta della *trattrice*

$$\begin{cases} x = \ln\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right) - \sin t \\ y = \cos t, \end{cases} \quad |t| \leq \frac{\pi}{2},$$

è la *catenaria*  $y = \cosh x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .



6. Trovare l'involuppo delle circonferenze passanti per l'origine e con centro sulla parabola  $y^2 = x$  (*cissoide di Diocle*, esercizio 4.3.9(iii)).

## 4.5 Curve sghembe

Analizziamo alcuni aspetti della geometria delle curve in  $\mathbb{R}^3$ , dette anche “curve sghembe”. Sia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare, di classe  $C^3$ , riferita al parametro lunghezza d'arco. Il versore tangente è, come sappiamo,

$$\mathbf{T}(s) = \varphi'(s);$$

diversamente dal caso delle curve piane, definiamo la *curvatura* di  $\varphi$  nel modo seguente:

$$k(s) = |\mathbf{T}'(s)|_3.$$

Dunque per le curve sghembe la curvatura è sempre non negativa (ricordiamo che nel caso piano vale comunque  $|k(s)| = |\mathbf{T}'(s)|_2$ ). Se poi  $k(s)$  non è nulla, ricordando che la derivata di un versore è un vettore ad esso ortogonale, definiamo il *versore normale principale* come

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{k(s)}$$

(quando  $k(s) = 0$ , ossia  $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{0}$ , il versore normale principale non viene definito). Vale di conseguenza la relazione

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$$

come nel caso piano.

Supporremo d'ora in avanti  $k(s)$  strettamente positiva. Il piano individuato da  $\mathbf{T}(s)$  e  $\mathbf{N}(s)$  si chiama *piano osculatore* alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ ; il punto  $\mathbf{c}(s)$  di tale piano, a distanza  $\frac{1}{k(s)}$  da  $\varphi(s)$  nella direzione di  $\mathbf{N}(s)$ , si chiama *centro di curvatura*, mentre il cerchio di centro  $\mathbf{c}(s)$  e raggio  $\frac{1}{k(s)}$ , contenuto nel piano osculatore, si dice



*cerchio osculatore*. La retta ortogonale al piano osculatore si chiama *retta binormale*, e il *versore binormale*  $\mathbf{B}(s)$  è definito, come è naturale, dal prodotto vettoriale

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s),$$

cosicché la terna  $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ , detta *triedro principale* della curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ , è sinistrorsa al pari dei tre assi cartesiani  $x, y, z$  (e in particolare il determinante della matrice che ha tali vettori come vettori colonna vale  $+1$ ).

Il piano individuato da  $\mathbf{N}(s)$  e  $\mathbf{B}(s)$  si dice (ovviamente) *piano normale*, mentre quello individuato da  $\mathbf{B}(s)$  e  $\mathbf{T}(s)$  si chiama *piano rettificante*.

**Osservazioni 4.5.1 (1)** Il significato geometrico del piano osculatore è il seguente: fra tutti i piani che passano per il punto  $\varphi(s)$  e contengono il vettore  $\mathbf{T}(s)$  (che pensiamo uscente da  $\varphi(s)$ ), esso è l'unico che abbia un contatto con la curva di ordine  $\geq 3$ . Infatti i piani della forma

$$\langle \mathbf{x} - \varphi(s), \mathbf{a} \rangle_3 = 0$$

hanno contatto in  $\varphi(s)$  di ordine  $\geq 1$ . La derivata rispetto a  $s$  del primo membro è  $-\langle \varphi'(s), \mathbf{a} \rangle_3$ , quindi il contatto è di ordine  $\geq 2$  se e solo se

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{T}(s) \rangle_3 = 0;$$

la derivata seconda è  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{T}'(s) \rangle_3 = k(s) \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}(s) \rangle_3$ , per cui il contatto è di ordine  $\geq 3$  se e solo se

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{T}(s) \rangle_3 = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}(s) \rangle_3 = 0.$$

L'unica retta ortogonale sia a  $\mathbf{T}(s)$  che a  $\mathbf{N}(s)$  è ovviamente la retta binormale; ne segue  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{B}(s)$  e dunque il nostro piano ha equazione

$$\langle \mathbf{x} - \varphi(s), \mathbf{B}(s) \rangle_3 = 0,$$

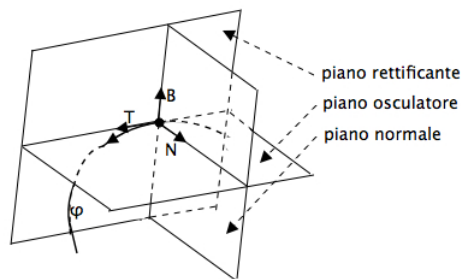
ed è perciò il piano osculatore.

(2) L'equazione del piano normale è

$$\langle \mathbf{x} - \varphi(s), \mathbf{T}(s) \rangle_3 = \langle \mathbf{x} - \varphi(s), \varphi'(s) \rangle_3 = 0,$$

e quella del piano rettificante è

$$\langle \mathbf{x} - \varphi(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 = \langle \mathbf{x} - \varphi(s), \varphi''(s) \rangle_3 = 0;$$



dette  $x(s), y(s), z(s)$  le componenti di  $\varphi(s)$ , e ricordando l'espressione delle componenti di un prodotto vettoriale, l'equazione del piano osculatore può scriversi nella forma

$$\langle \mathbf{x} - \varphi(s), \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \rangle_3 = \frac{1}{k(s)} \det \begin{pmatrix} x - x(s) & y - y(s) & z - z(s) \\ x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \end{pmatrix}.$$

Vediamo adesso come si ricavano le formule di Frénet-Serret nello spazio. Sappiamo già che  $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$ . Ricordando che  $\mathbf{N}'(s)$  è ortogonale a  $\mathbf{N}(s)$ , sarà

$$\mathbf{N}'(s) = \lambda(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)$$

per certi  $\lambda(s), \tau(s) \in \mathbb{R}$ . Ma, essendo  $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_3 = 0$ , si ha anche

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 + \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle_3 = \\ &= k(s)|\mathbf{N}(s)|_3^2 + \lambda(s)|\mathbf{T}(s)|_3^2 + \tau(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle_3 = k(s) + \lambda(s), \end{aligned}$$

da cui  $\lambda(s) = -k(s)$ . Quindi

$$\mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s);$$

il numero  $\tau(s)$  si chiama *torsione* della curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ .

Analogamente, sarà

$$\mathbf{B}'(s) = \mu(s)\mathbf{T}(s) + \nu(s)\mathbf{N}(s)$$

per certi  $\mu(s), \nu(s) \in \mathbb{R}$ ; ma

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_3 = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{T}(s) \rangle_3 + \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle_3 = \\ &= \mu(s)|\mathbf{T}(s)|_3^2 + \nu(s) \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_3 + k(s) \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 = \mu(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 + \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle_3 = \\ &= \mu(s) \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle_3 + \nu(s)|\mathbf{N}(s)|_3^2 - k(s) \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s) \rangle_3 + \tau(s)|\mathbf{B}(s)|_3^2 = \\ &= \nu(s) + \tau(s), \end{aligned}$$

e pertanto  $\mu(s) = 0$  e  $\nu(s) = -\tau(s)$ , ossia

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s).$$

In definitiva si hanno le relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s) \end{cases}$$

che costituiscono le *formule di Frénet-Serret* per le curve sghembe.

Qual è il significato geometrico della curvatura e della torsione? Indicando con  $\omega(h)$  l'angolo fra  $\mathbf{T}(s+h)$  e  $\mathbf{T}(s)$ , si ha  $\omega(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  e

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}'(s)|_3^2 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)|_3^2}{h^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \langle \mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s) \rangle_3 + \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos \omega(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos \omega(h)}{\omega(h)^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\omega(h)}{h} \right]^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\omega(h)}{h} \right]^2. \end{aligned}$$

D'altra parte, il primo membro di questa catena di uguaglianze è il quadrato della curvatura, per cui

$$k(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\omega(h)|}{|h|}.$$

Dunque la curvatura misura quanto rapidamente la curva si stacca dalla sua retta tangente in  $\varphi(s)$ .

Similmente, se indichiamo con  $\Omega(h)$  l'angolo fra  $\mathbf{B}(s+h)$  e  $\mathbf{B}(s)$ , procedendo allo stesso modo si trova

$$|\tau(s)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\Omega(h)|}{|h|}.$$

Dato che  $\Omega(h)$  è anche l'angolo fra il piano osculatore in  $\varphi(s+h)$  e quello in  $\varphi(s)$ , otteniamo che il modulo della torsione misura quanto rapidamente la curva si stacca dal piano osculatore.

Anche il segno di  $\tau(s)$  ha un'interpretazione geometrica: se conveniamo di scegliere come faccia positiva del piano osculatore quella che guarda verso  $\mathbf{B}(s)$  e come faccia negativa quella che guarda verso  $-\mathbf{B}(s)$ , allora la torsione è positiva se  $\varphi(s+h)$ , per  $h > 0$ , si stacca dal piano osculatore sulla sua faccia positiva (ossia  $\langle \frac{\varphi(s+h)-\varphi(s)}{h}, \mathbf{B}(s) \rangle_3 > 0$ ), mentre la torsione è negativa se  $\varphi(s+h)$ , sempre per  $h > 0$ , si stacca dal piano osculatore sulla sua faccia negativa (ossia  $\langle \frac{\varphi(s+h)-\varphi(s)}{h}, \mathbf{B}(s) \rangle_3 < 0$ ). Per provare questo fatto, consideriamo il rapporto incrementale di  $\varphi$  nel punto  $s$ : dalla formula di Taylor si ha

$$\frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} = \varphi'(s) + \varphi''(s)\frac{h}{2} + \varphi'''(s)\frac{h^2}{6} + \mathbf{o}(h^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

ed usando le formule di Frénet-Serret

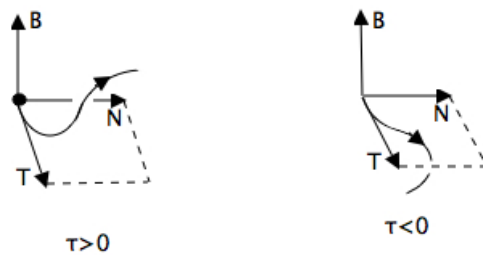
$$\begin{aligned} \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} &= \mathbf{T}(s) + \mathbf{N}(s)k(s)\frac{h}{2} + [k(s)\mathbf{N}(s)]'\frac{h^2}{6} + \mathbf{o}(h^2) = \\ &= \mathbf{T}(s) \left[ 1 - k(s)^2\frac{h^2}{6} \right] + \mathbf{N}(s) \left[ k(s)\frac{h}{2} + k'(s)\frac{h^2}{6} \right] + \\ &\quad + \mathbf{B}(s)k(s)\tau(s)\frac{h^2}{6} + \mathbf{o}(h^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque, per  $h \rightarrow 0$ ,

$$\left\langle \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h}, \mathbf{B}(s) \right\rangle_3 = k(s)\tau(s)\frac{h^2}{6} + \mathbf{o}(h^2),$$

cosicché per  $|h|$  sufficientemente piccolo tale prodotto scalare ha esattamente il segno di  $\tau(s)$ .

Le curve sghembe sono caratterizzate, a meno di moti rigidi dello spazio, dalla curvatura e dalla torsione. Vale infatti il



**Teorema 4.5.2** Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  contenente 0, e siano  $k \in C^1(I)$  e  $\tau \in C(I)$  funzioni assegnate, con  $k > 0$ . Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  e per ogni coppia di versori ortogonali  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  esiste un'unica curva regolare  $\boldsymbol{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^3$ , riferita al parametro lunghezza d'arco, tale che

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}'(0) = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\varphi}''(0) = \mathbf{v},$$

e che abbia  $k(s)$  come curvatura e  $\tau(s)$  come torsione.

**Dimostrazione** Le formule di Frénet-Serret costituiscono un sistema di nove equazioni differenziali lineari, a coefficienti continui definiti in  $I$ , nelle incognite  $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$  (tre per ciascun vettore). Le condizioni iniziali sono

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{u}, \quad \mathbf{N}(0) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Dalla teoria dei sistemi differenziali lineari otteniamo l'esistenza e l'unicità di tre funzioni vettoriali  $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$  definite sull'intero intervallo  $I$ , che risolvono le equazioni di Frénet-Serret. La curva cercata sarà

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_0^s \mathbf{T}(r) dr, \quad s \in I :$$

è immediato infatti controllare che tale curva ha  $k(s)$  come curvatura e  $\tau(s)$  come torsione.

Occorre però mostrare che la terna  $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$  è, per ogni  $s \in I$ , una terna di versori ortogonali orientati come gli assi  $x, y, z$ : questa verifica è accennata nell'esercizio 4.5.1.  $\square$

Come si calcolano esplicitamente la curvatura e la torsione di una curva assegnata? Consideriamo dapprima il caso di una curva  $\boldsymbol{\varphi}(s) = (x(s), y(s), z(s))$  riferita al parametro lunghezza d'arco. Anzitutto, per la curvatura si ha

$$k(s) = |\mathbf{T}'(s)|_3 = |\boldsymbol{\varphi}''(s)|_3 = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}.$$

Per la torsione possiamo scrivere, utilizzando le prime due formule di Frénet-Serret,

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle_3 = \left\langle \mathbf{B}(s), \frac{d}{ds} \frac{\mathbf{T}'(s)}{k(s)} \right\rangle_3 = \\ &= \left\langle \mathbf{B}(s), \frac{\mathbf{T}''(s)}{k(s)} - \frac{\mathbf{T}'(s)k'(s)}{k(s)^2} \right\rangle_3 = \left\langle \mathbf{B}(s), \frac{\boldsymbol{\varphi}'''(s)}{k(s)} - \frac{\mathbf{N}(s)k'(s)}{k(s)} \right\rangle_3 = \\ &= \left\langle \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s), \frac{\boldsymbol{\varphi}'''(s)}{k(s)} \right\rangle_3 = \frac{\langle \boldsymbol{\varphi}'(s) \times \boldsymbol{\varphi}''(s), \boldsymbol{\varphi}'''(s) \rangle_3}{k(s)^2} = \\ &= \frac{1}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2} \det \begin{pmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la curva  $\boldsymbol{\varphi}$  dipenda da un generico parametro  $t$ : l'ascissa curvilinea  $s$  è data da

$$s = \ell(t) = \int_0^t |\boldsymbol{\varphi}'(r)|_3 dr,$$

da cui  $\ell'(t) = |\varphi'(t)|_3$ . Dunque, denotando con  $\varphi_0(s)$ ,  $\mathbf{T}_0(s)$ ,  $\mathbf{N}_0(s)$ ,  $\mathbf{B}_0(s)$ ,  $k_0(s)$ ,  $\tau_0(s)$  le funzioni  $\varphi$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $k$ ,  $\tau$  calcolate in  $t = \ell^{-1}(s)$ , si ha

$$\varphi'(t) = \varphi'_0(\ell(t))\ell'(t), \quad \varphi''(t) = \varphi''_0(\ell(t))\ell'(t)^2 + \varphi'_0(\ell(t))\ell''(t),$$

da cui, essendo  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \times \varphi''(t) &= [\varphi'_0(\ell(t)) \times \varphi''_0(\ell(t))] \ell'(t)^3 + \mathbf{0} = \\ &= k_0(\ell(t)) [\mathbf{T}(\ell(t)) \times \mathbf{N}_0(\ell(t))] |\varphi'(t)|_3^3 = \\ &= k(t) \mathbf{B}_0(\ell(t)) |\varphi'(t)|_3^3 = k(t) |\varphi'(t)|_3^3 \mathbf{B}(t), \end{aligned}$$

da cui, passando ai moduli,

$$k(t) = \frac{|\varphi'(t) \times \varphi''(t)|_3}{|\varphi'(t)|_3^3}.$$

Similmente, utilizzando la relazione

$$\begin{aligned} \varphi'''(t) &= \varphi'''_0(\ell(t))\ell'(t)^3 + 3\varphi''_0(\ell(t))\ell'(t)\ell''(t) + \varphi'_0(\ell(t))\ell'''(t) = \\ &= \varphi'''_0(\ell(t))\ell'(t)^3 + 3k_0(\ell(t))\mathbf{N}_0(\ell(t))\ell'(t)\ell''(t) + \mathbf{T}_0(\ell(t))\ell'''(t) = \\ &= \varphi'''_0(\ell(t))|\varphi'(t)|_3^3 + 3k(t)\ell'(t)\ell''(t)\mathbf{N}(t) + \ell'''(t)\mathbf{T}(t), \end{aligned}$$

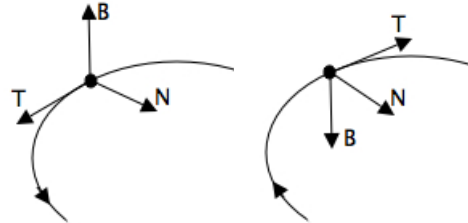
si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(t) \times \varphi''(t), \varphi'''(t) \rangle_3 &= k(t) |\varphi'(t)|_3^6 \langle \mathbf{B}(t), \varphi'''(\ell(t)) \rangle_3 + \mathbf{0} = \\ &= k(t) |\varphi'(t)|_3^6 \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{T}'_0(s) \rangle_3 = k(t) |\varphi'(t)|_3^6 \left\langle \mathbf{B}_0(s), \frac{d}{ds}[k_0(s)\mathbf{N}_0(s)] \right\rangle_3 = \\ &= k(t)^2 |\varphi'(t)|_3^6 \langle \mathbf{B}_0(s), \mathbf{N}'_0(s) \rangle_3 + \mathbf{0} = \\ &= k(t)^2 |\varphi'(t)|_3^6 \langle \mathbf{B}_0(s), \tau_0(s)\mathbf{B}_0(s) \rangle_3 = k(t)^2 |\varphi'(t)|_3^6 \tau(t), \end{aligned}$$

da cui finalmente

$$\tau(t) = \frac{\langle \varphi'(t) \times \varphi''(t), \varphi'''(t) \rangle_3}{k(t)^2 |\varphi'(t)|_3^6} = \frac{\langle \varphi'(t) \times \varphi''(t), \varphi'''(t) \rangle_3}{|\varphi'(t) \times \varphi''(t)|_3^2}.$$

Si noti che se invertiamo l'orientazione di una curva  $\varphi$ , il vettore  $\mathbf{T}$  cambia verso, mentre la sua derivata  $\mathbf{T}'$  rimane invariata; quindi  $\mathbf{N}$  resta a sua volta invariata. Dunque  $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$  cambia verso: ne segue che le due facce del piano osculatore si invertono fra loro.



È facile allora vedere che la curvatura e la torsione in un fissato punto del sostegno di  $\varphi$  non dipendono dall'orientazione di  $\varphi$ ; per giunta esse non cambiano passando da  $\varphi$  ad un'altra curva ad essa  $C^3$ -equivalente. Ciò conferma l'intuizione geometrica che si tratti di grandezze intrinsecamente legate alla forma del sostegno.

**Esempio 4.5.3** *L'elica cilindrica*

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad s \in \mathbb{R},$$

ove  $a, b \in \mathbb{R}$ , è riferita al parametro lunghezza d'arco, poiché  $x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$ . Si ha, come è facile verificare,

$$k(s) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \tau(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

quindi l'elica cilindrica ha curvatura e torsione costanti. Il teorema 4.5.2 ci dice che è l'unica curva di  $\mathbb{R}^3$  con questa proprietà.

**Esempio 4.5.4** Calcoliamo curvatura e torsione dell'elica cilindrica “discendente”

$$x = a \sin t, \quad y = a \cos t, \quad z = -bt, \quad t \in \mathbb{R},$$

ove  $a$  e  $b$  sono numeri reali non nulli. Si ha

$$\begin{aligned} x'(t) &= a \cos t, & y'(t) &= -a \sin t, & z'(t) &= -b, \\ x''(t) &= -a \sin t, & y''(t) &= -a \cos t, & z''(t) &= 0, \\ x'''(t) &= -a \cos t, & y'''(t) &= a \sin t, & z'''(t) &= 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$|\varphi'(t)|_3 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi'(t) \times \varphi''(t) = \begin{pmatrix} -ab \cos t \\ ab \sin t \\ -a^2 \end{pmatrix},$$

e pertanto, coerentemente con l'esempio precedente,

$$k(t) = \frac{|a|}{a^2 + b^2}, \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**Esercizi 4.5**

1. Provare che le soluzioni delle equazioni di Frénet-Serret

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s), \quad \mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s), \quad \mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s),$$

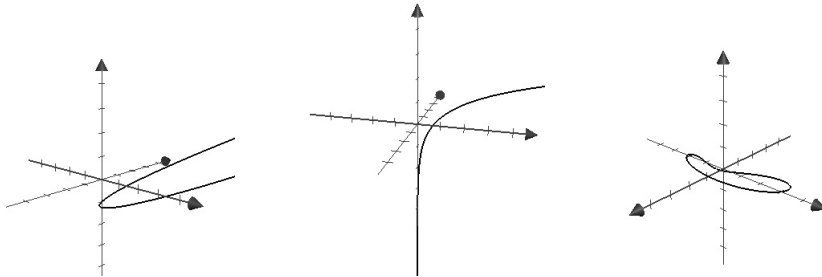
con le condizioni iniziali

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{u}, \quad \mathbf{N}(0) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

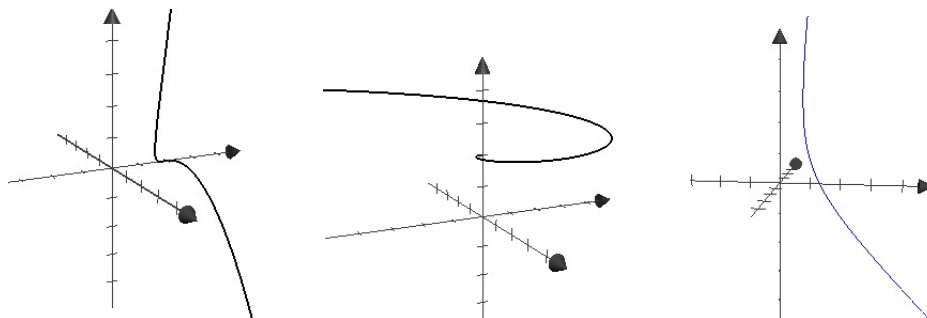
formano per ogni  $s \in I$  una terna sinistrorsa.

[**Traccia:** dimostrare che le sei funzioni  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle_3$ ,  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle_3$ ,  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle_3$ ,  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_3$ ,  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle_3$ ,  $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle_3$  risolvono un sistema di sei equazioni differenziali lineari con condizioni iniziali (per  $s = 0$ ) rispettivamente 1, 0, 0, 1, 0, 1, e verificare che anche le funzioni costanti 1, 0, 0, 1, 0, 1 risolvono tale sistema. Se ne deduca che  $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$  è una terna ortonormale e sinistrorsa per ogni  $s$ .]

2. Si provi che se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva regolare il cui sostegno giace su un piano  $\Pi$ , allora in ogni suo punto il piano osculatore coincide con  $\Pi$ , e che, viceversa, se una curva regolare ha in ogni punto lo stesso piano osculatore  $\Pi$ , allora il sostegno della curva giace su  $\Pi$ .
3. Si provi che se una curva regolare ha in ogni punto piani osculatori paralleli fra loro, allora la curva è piana.
4. Si verifichi che una curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , il cui sostegno sia una retta, ha piano osculatore indeterminato; viceversa, si provi che se una curva regolare in ogni punto ha piano osculatore indeterminato, allora il suo sostegno è rettilineo.
5. Sia  $\varphi$  una curva regolare (di classe  $C^2$ ) in  $\mathbb{R}^3$  riferita al parametro lunghezza d'arco. Provare che  $\varphi$  e la proiezione ortogonale di  $\varphi$  sul proprio piano osculatore in  $\varphi(s)$  hanno la stessa curvatura nel punto  $\varphi(s)$ .
6. Sia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare, di classe  $C^3$ , riferita al parametro lunghezza d'arco, con curvatura e torsione non nulle, e si definiscano  $R(s) = \frac{1}{k(s)}$ ,  $\vartheta(s) = \frac{1}{\tau(s)}$ . Si provi che il sostegno di  $\varphi$  giace su una superficie sferica se e solo se  $R(s)^2 + R'(s)^2\vartheta(s)^2$  è costante.
7. Calcolare la curvatura e la torsione delle curve seguenti:
  - (i)  $x = t, y = 2t^2, z = t - 1$  ( $t \in \mathbb{R}$ );
  - (ii)  $x = e^{2t}, y = 2e^t, z = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ );
  - (iii)  $x = (2 + \cos t) \sin t, y = (2 + \cos t) \cos t, z = \sin t$  ( $t \in [0, 2\pi]$ );



- (iv)  $x = t^2, y = 2 - t, z = t^3$  ( $t \in \mathbb{R}$ );
- (v)  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = 2$  ( $t \in \mathbb{R}$ );
- (vi)  $x = t, y = \frac{1+t}{t}, z = \frac{1-t^2}{t}$  ( $t > 0$ ).



## 4.6 Forme differenziali lineari

Un argomento strettamente legato all'ambito degli integrali curvilinei, e che ha importanti applicazioni alla fisica, è quello delle *forme differenziali lineari di grado 1*, ovvero, più brevemente, delle *1-forme*. Una 1-forma è un'applicazione  $\mathbf{x} \mapsto \omega(\mathbf{x})$ , definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  ed a valori nel duale  $(\mathbb{R}^N)^*$ , cioè nello spazio vettoriale  $N$ -dimensionale delle applicazioni lineari da  $\mathbb{R}^N$  a  $\mathbb{R}$ .

Ricordiamo che una base di  $(\mathbb{R}^N)^*$  è costituita dalle  $N$  proiezioni canoniche  $\pi_1, \dots, \pi_N$ , date da

$$\pi_j(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle_N = x^j \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad j = 1, \dots, N.$$

Di solito, lo spazio  $(\mathbb{R}^N)^*$  viene identificato con  $\mathbb{R}^N$  mediante la corrispondenza

$$v^* = \sum_{j=1}^N v_j \pi_j \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^N v_j \mathbf{e}_j,$$

la quale trasforma la dualità fra  $(\mathbb{R}^N)^*$  e  $\mathbb{R}^N$ , che denotiamo con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_N^*$ , nel prodotto scalare fra vettori di  $\mathbb{R}^N$ :

$$\langle v^*, \mathbf{x} \rangle_N^* = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_N = \sum_{j=1}^N v_j x^j \quad \forall v^* \in (\mathbb{R}^N)^*, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N;$$

tuttavia nella teoria delle forme differenziali conviene tenere distinti i due spazi ed utilizzare la dualità anziché il prodotto scalare. Gli elementi di  $\mathbb{R}^N$  sono, naturalmente, vettori; chiameremo *covettori* gli elementi di  $(\mathbb{R}^N)^*$ , ed useremo notazioni diverse per le componenti dei vettori e dei covettori: scriveremo cioè per  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  (come abbiamo già fatto fin qui) e per  $y \in (\mathbb{R}^N)^*$

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N) = \sum_{j=1}^N x^j \mathbf{e}_j, \quad y = (y_1, \dots, y_N) = \sum_{j=1}^N y_j \pi_j,$$

cosicché

$$\langle y, \mathbf{x} \rangle_N^* = \sum_{j=1}^N y_j x^j \quad \forall y \in (\mathbb{R}^N)^*, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Sulla base di tutto ciò, data una 1-forma  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$ , per ciascun  $\mathbf{x} \in A$  l'applicazione lineare  $\omega(\mathbf{x}) \in (\mathbb{R}^N)^*$  può scriversi come

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \omega_j(\mathbf{x}) \pi_j, \quad \mathbf{x} \in A.$$

D'altra parte, ricordiamo che le  $\pi_j$ , essendo funzioni lineari, sono differenziabili, con differenziale dato da

$$d\pi_j(\mathbf{x}) = \pi_j \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N;$$



quindi possiamo scrivere, secondo l'uso corrente anche se alquanto impropriamente,

$$\pi_j = d\pi_j(\mathbf{x}) = dx^j,$$

e dunque rappresentare la 1-forma  $\omega$  nel modo seguente, che è standard nella letteratura matematica:

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \omega_j(\mathbf{x}) dx^j.$$

Le funzioni  $\omega_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , si dicono *coefficienti* della 1-forma  $\omega$ . Se  $\omega_j \in C^k(A)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , diremo che la 1-forma  $\omega$  è di classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$  oppure  $k = \infty$ ).

**Esempio 4.6.1** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile, il suo differenziale  $df : A \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$  è una 1-forma che agisce così:

$$\langle df(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle_N^* = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}) h^i = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle_N \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Questo esempio è talmente importante che le 1-forme  $\omega$  che sono differenziali di funzioni hanno una denominazione speciale.

**Definizione 4.6.2** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$  una 1-forma. Diciamo che  $\omega$  è esatta in  $A$  se esiste una funzione differenziabile  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $df = \omega$  in  $A$ . In tal caso, la funzione  $f$  si dice primitiva della 1-forma  $\omega$ .

È chiaro che se  $f$  è una primitiva della forma esatta  $\omega$ , allora per ogni  $c \in \mathbb{R}$  anche  $f + c$  è una primitiva di  $\omega$ . Viceversa, se l'aperto  $A$  è connesso allora ogni primitiva  $g$  di  $\omega$  è della forma  $g = f + c$ : infatti

$$d(g - f) = dg - df = \omega - \omega = 0,$$

ed essendo  $A$  connesso, si deduce che  $g - f$  è costante.

Notiamo anche che se  $\omega$  è esatta e di classe  $C^k$ , allora ogni sua primitiva appartiene a  $C^{k+1}(A)$ .

A noi interesserà individuare condizioni necessarie o sufficienti affinché una data 1-forma sia esatta.

## Integrali curvilinei di 1-forme

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva di classe  $C^1$ , sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  contenente il sostegno di  $\varphi$ , e sia  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$  una 1-forma di classe  $C^0$ .

**Definizione 4.6.3** L'integrale curvilineo di  $\omega$  su  $\varphi$  è il numero

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \langle \omega(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle_N^* dt = \sum_{i=1}^N \int_a^b \omega_i(\varphi(t)) (\varphi^i)'(t) dt.$$

Osserviamo che se  $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  è un'altra curva  $C^1$ -equivalente a  $\varphi$  e con la stessa orientazione di  $\varphi$ , allora si ha  $\int_{\psi} \omega = \int_{\varphi} \omega$ , mentre se le due curve sono  $C^1$ -equivalenti e con orientazioni opposte si ha  $\int_{\psi} \omega = -\int_{\varphi} \omega$ ; lo stesso accade nel caso di due curve chiuse  $C^1$ -equivalenti a tratti. Questo fatto è di facile verifica: detto  $p : [c, d] \rightarrow [a, b]$  il diffeomorfismo tale che  $\psi(\tau) = \varphi(p(\tau))$ , col cambiamento di variabile  $t = p(\tau)$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \int_a^b \langle \omega(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle_N dt = \int_{p^{-1}(a)}^{p^{-1}(b)} \langle \omega(\varphi(p(\tau))), \varphi'(p(\tau))p'(\tau) \rangle_N d\tau = \\ &= \int_{p^{-1}(a)}^{p^{-1}(b)} \langle \omega(\psi(\tau)), \psi'(\tau) \rangle_N d\tau = \pm \int_c^d \langle \omega(\psi(\tau)), \psi'(\tau) \rangle_N d\tau = \pm \int_{\psi} \omega, \end{aligned}$$

a seconda che sia  $p' > 0$  (e dunque  $p(c) = a$ ,  $p(d) = b$ ) oppure  $p' < 0$  (e dunque  $p(c) = b$ ,  $p(d) = a$ ). In definitiva, a differenza di quello che accade per gli integrali curvilinei di funzioni, che sono invarianti per curve  $C^1$ -equivalenti a prescindere dalla loro orientazione, per fare gli integrali curvilinei di forme differenziali occorre assegnare un'orientazione alla curva. Se poi la curva  $\varphi$  è regolare e semplice, allora il valore dell'integrale  $\int_{\varphi} \omega$  dipende solo dal sostegno  $\Gamma$  di  $\varphi$  e dall'orientazione che si assegna ad esso: lo denoteremo allora con  $\int_{+\Gamma} \omega$  o con  $\int_{-\Gamma} \omega$ .

**Esempio 4.6.4** Sia  $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  definita da

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Se  $\Gamma$  è la circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio  $r$ , e scegliamo il verso antiorario (positivo), allora  $\Gamma$  è parametrizzata dalla curva  $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , e risulta

$$\int_{+\Gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-r \sin t}{r^2} (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2} (r \cos t) \right] dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Scegliendo invece il verso orario (negativo), possiamo parametrizzare  $\Gamma$  mediante la curva  $\psi(t) = (r \sin t, r \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , e si trova

$$\int_{-\Gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-r \cos t}{r^2} (r \cos t) + \frac{r \sin t}{r^2} (-r \sin t) \right] dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi.$$

Torneremo in seguito su questo esempio.

**Osservazione 4.6.5** Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva di classe  $C^1$  a tratti: come si sa, ciò significa che  $\varphi$  è continua ed esistono  $t_0 = a < t_1, \dots, t_{m-1} < b = t_m$  tali che  $\varphi_i = \varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , è una curva di classe  $C^1$ . Scriveremo in tal caso

$$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_m.$$

Se  $A$  è un aperto che contiene il sostegno di  $\varphi$ , e  $\omega$  è una 1-forma di classe  $C^0$  su  $A$ , definiamo

$$\int_{\varphi} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\varphi_i} \omega,$$

ed è facile verificare che tale definizione è indipendente dai vari modi di decomporre  $\varphi$  in sottocurve di classe  $C^1$ .

Il teorema che segue fornisce, tramite l'uso degli integrali curvilinei, condizioni necessarie e sufficienti affinché una 1-forma sia esatta.

**Teorema 4.6.6** *Sia  $\omega$  una 1-forma di classe  $C^0$  definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ . I seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i)  $\omega$  è esatta in  $A$ ;
- (ii) per ogni curva chiusa  $\varphi$  di classe  $C^1$  a tratti, con sostegno contenuto in  $A$ , risulta  $\int_{\varphi} \omega = 0$ ;
- (iii) per ogni coppia di curve  $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow A$  e  $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow A$ , di classe  $C^1$  a tratti, tali che  $\varphi_1(a) = \varphi_2(c)$  e  $\varphi_1(b) = \varphi_2(d)$ , risulta  $\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$ .

**Dimostrazione** (i)  $\implies$  (ii) Per ipotesi,  $\omega$  ha una primitiva  $f$ . Allora, se  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  è una curva chiusa di classe  $C^1$  a tratti, utilizzando la decomposizione illustrata nell'osservazione 4.6.5 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \sum_{i=1}^k \int_{\varphi_i} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle \nabla f(\varphi_i(t)), \varphi_i'(t) \rangle_N dt = \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} f(\varphi_i(t)) dt = \sum_{i=1}^k [f(\varphi_i(t_i)) - f(\varphi_i(t_{i-1}))] = \\ &= \sum_{i=1}^k [f(\varphi(t_i)) - f(\varphi(t_{i-1}))] = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = 0. \end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (iii) Siano  $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow A$  e  $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow A$  due curve di classe  $C^1$  a tratti, tali che  $\varphi_1(a) = \varphi_2(c)$  e  $\varphi_1(b) = \varphi_2(d)$ . Allora, rimpiazzando  $\varphi_2(t)$  con  $\psi(t) = \varphi_2(t - b + c)$ , che è definita su  $[b, b + d - c]$ , consideriamo la curva chiusa  $\varphi_1 \vee (-\psi) : [a, b + d - c] \rightarrow A$ , che è di classe  $C^1$  a tratti. Per ipotesi,

$$\int_{\varphi_1} \omega - \int_{\varphi_2} \omega = \int_{\varphi_1} \omega - \int_{\psi} \omega = \int_{\varphi_1 \vee (-\psi)} \omega = 0.$$

(iii)  $\implies$  (i) Dobbiamo definire una primitiva  $f$  di  $\omega$ . Sia  $\mathbf{x}_0$  un fissato punto di  $A$  e sia  $\mathbf{x}$  un generico punto di  $A$  che sia congiungibile a  $\mathbf{x}_0$  con una curva di classe  $C^1$  a tratti: ad esempio, una poligonale contenuta in  $A$ . Osserviamo che se l'aperto  $A$  è connesso, *tutti* i punti di  $A$  sono congiungibili a  $\mathbf{x}_0$  con una poligonale (esercizio 4.6.5). Altrimenti, sceglieremo  $\mathbf{x}$  nella stessa componente connessa a cui appartiene  $\mathbf{x}_0$ . Per ipotesi, sappiamo che l'integrale curvilineo  $\int_{\varphi} \omega$  assume lo stesso valore *per ogni* curva  $\varphi$  di classe  $C^1$  a tratti, che abbia  $\mathbf{x}_0$  come primo estremo,  $\mathbf{x}$  come secondo estremo e abbia sostegno contenuto in  $A$ . Possiamo perciò porre

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\varphi} \omega$$

ove  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  è una qualunque curva del tipo descritto. Proveremo che le derivate parziali di  $f$  esistono e coincidono con i coefficienti della forma  $\omega$ ; dunque  $f$  risulterà di

classe  $C^1$ , quindi differenziabile, con  $df = \omega$ , e il teorema sarà dimostrato.

Sia  $h \in \mathbb{R}$  sufficientemente piccolo, in modo che  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$  stia nella stessa componente connessa in cui sta  $\mathbf{x}_0$  ( si ricordi che tale componente connessa è un aperto). Sia  $\psi$  un'opportuna parametrizzazione del segmento con primo estremo  $\mathbf{x}$  e secondo estremo  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$ : precisamente

$$\psi(t) = \begin{cases} \mathbf{x} + (t - b)\mathbf{e}_i, & t \in [b, b + h] \quad \text{se } h > 0 \\ \mathbf{x} + (b - t)\mathbf{e}_i, & t \in [b, b + |h|] \quad \text{se } h < 0. \end{cases}$$

Allora si ha  $f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) = \int_{\varphi \vee \psi} \omega$ , da cui

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_{\varphi \vee \psi} \omega - \int_{\varphi} \omega \right] = \frac{1}{h} \int_{\psi} \omega = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \langle \omega(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle_N ds = \frac{1}{h} \int_0^h \omega_i(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i) ds; \end{aligned}$$

per la continuità della funzione  $\omega_i$  si ottiene

$$\exists D_i f(\mathbf{x}) = \omega_i(\mathbf{x}).$$

Ripetendo la costruzione per ciascuna componente connessa di  $A$ , si costruisce la primitiva  $f$  di  $\omega$  su tutto  $A$ .  $\square$

**Esempio 4.6.7** Dalla fisica si sa che il lavoro compiuto da un campo di forze  $\mathbf{F}$  di componenti  $A, B, C$  nel corso di uno spostamento lungo una curva  $\varphi$  è dato dall'integrale curvilineo

$$\int_{\varphi} (A dx + B dy + C dz).$$

Se il campo è *conservativo*, cioè esiste una "funzione potenziale"  $U$  tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = C,$$

allora la 1-forma  $A dx + B dy + C dz$  è esatta e, per il teorema precedente, il lavoro compiuto per spostarsi da  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ , con  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  punti arbitrari, non dipende dal cammino percorso ma solo dagli estremi  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ , ed in particolare il lavoro è nullo quando  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ . Questo è il caso che si presenta quando si considera il campo gravitazionale Newtoniano, generato da un corpo di massa  $M$  posto nell'origine:

$$\mathbf{g}(x, y, z) = -GM \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

ove  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $G$  è la costante di gravitazione universale. La forza esercitata su un altro corpo di massa  $m$  è

$$\mathbf{F}(x, y, z) = m \mathbf{g}(x, y, z),$$

ed in tal caso la 1-forma è

$$\omega = -\frac{mMGx}{r^3} dx - \frac{mMGy}{r^3} dy - \frac{mMGz}{r^3} dz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Questa forma è esatta e una primitiva è  $V(x, y, z) = \frac{mMG}{r}$ : la funzione  $V$  è il potenziale gravitazionale, mentre la quantità  $U = -V = -\frac{mMG}{r}$  è l'energia potenziale.

Il termine “conservativo” deriva dal fatto che se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  è una curva di estremi  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ , dall'equazione Newtoniana  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  si ha, essendo  $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \varphi''(t)$  ( $\mathbf{v}$  è la velocità,  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione),

$$\begin{aligned} U(\mathbf{P}) - U(\mathbf{Q}) &= V(\mathbf{Q}) - V(\mathbf{P}) = \int_{\varphi} \omega = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle_3 dt = \\ &= m \int_a^b \langle \varphi''(t), \varphi'(t) \rangle_3 dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\varphi'(t)|_3^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} m [|\mathbf{v}(\mathbf{Q})|_3^2 - |\mathbf{v}(\mathbf{P})|_3^2]. \end{aligned}$$

Dunque la variazione di energia cinetica  $E = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|_3^2$  è uguale all'opposto della variazione di energia potenziale  $V$ , cioè l'energia totale  $E + V$  si conserva.

## 1-forme di classe $C^1$

Per le 1-forme di classe  $C^1$  ci sono condizioni per l'esattezza più facili da verificare. Infatti se  $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx^i$  è di classe  $C^1$  ed è esatta nell'aperto  $A$ , allora ogni sua primitiva  $f$  è di classe  $C^2$ : quindi, per il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione (esercizio 3.13.9), si ha per ogni  $i, j = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \quad \text{in } A.$$

Questa condizione è dunque necessaria affinché la 1-forma sia esatta.

**Definizione 4.6.8** Una 1-forma  $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx^i$ , di classe  $C^1$  in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ , si dice chiusa se si ha

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \quad \text{in } A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Quindi ogni 1-forma esatta è chiusa; il viceversa però è falso. Consideriamo infatti la 1-forma dell'esempio 4.6.4, che è di classe  $C^\infty$  nell'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ : essa è chiusa, perché

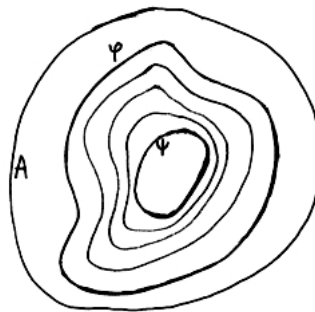
$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2};$$

d'altra parte essa non può essere esatta in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , perché il suo integrale curvilineo sulla curva chiusa  $(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , non è nullo.

Sotto ipotesi aggiuntive sull'aperto  $A$ , tuttavia, proveremo che ogni 1-forma chiusa è esatta. Prima di enunciare questo risultato occorrono comunque alcune premesse.

**Definizione 4.6.9** Siano  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  due curve chiuse di classe  $C^0$  con sostegni contenuti in un aperto  $A$ . Diciamo che  $\varphi$  è omòtopa a  $\psi$  se esiste un'applicazione continua  $\mathbf{G} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$ , tale che:

- (i)  $\mathbf{G}(0, t) = \varphi(t)$  per ogni  $t \in [a, b]$ ;
- (ii)  $\mathbf{G}(1, t) = \psi(t)$  per ogni  $t \in [a, b]$ ;
- (iii)  $\mathbf{G}(\lambda, a) = \mathbf{G}(\lambda, b)$  per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ .



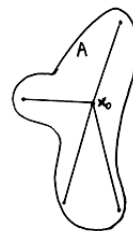
La funzione  $\mathbf{G}$ , se esiste, si dice omotopia fra  $\varphi$  e  $\psi$ .

In sostanza, l'applicazione  $\mathbf{G}$ , la cui immagine è una superficie  $\Sigma$  bi-dimensionale, deforma con continuità al variare di  $\lambda$  il sostegno di  $\varphi$  (corrispondente a  $\lambda = 0$ ) in quello di  $\psi$  (corrispondente a  $\lambda = 1$ ); le curve “intermedie”  $t \mapsto \mathbf{G}(\lambda, t)$  sono tutte chiuse. È facile verificare che l'omotopia è una relazione di equivalenza nell'insieme delle curve continue e chiuse con sostegno contenuto in  $A$ . In modo analogo si può definire l'omotopia fra due funzioni qualsiasi  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ , ove  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ .

**Definizione 4.6.10** Un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  è semplicemente connesso se è connesso ed inoltre ogni curva continua chiusa, con sostegno contenuto in  $A$ , è omòtopa ad una costante (cioè ad una curva il cui sostegno è un punto di  $A$ :  $\varphi(t) \equiv \mathbf{x}_0 \in A$ ).

**Esempi 4.6.11 (1)** Gli aperti convessi sono semplicemente connessi. Infatti, sia  $A$  un aperto convesso e sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  una curva continua chiusa: dato che, per ipotesi, si ha  $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}' \in A$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$  e  $\lambda \in [0, 1]$ , basta fissare  $\mathbf{x} \in A$  e definire  $\mathbf{G}(\lambda, t) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \varphi(t)$  per ogni  $(\lambda, t) \in [0, 1] \times [a, b]$ .

Più in generale sono semplicemente connessi gli aperti stellati rispetto a un punto, ossia tali che esista  $\mathbf{x}_0 \in A$  per cui, qualunque sia  $\mathbf{x} \in A$ , il segmento di estremi  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$  è contenuto in  $A$ . Se  $A$  è stellato rispetto a  $\mathbf{x}_0$ , l'omotopia fra una curva  $\varphi$  e  $\mathbf{x}_0$  è  $\mathbf{G}(\lambda, t) = \mathbf{x}_0 + \lambda[\varphi(t) - \mathbf{x}_0]$ .



**(2)** L'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è connesso, ma non semplicemente connesso: ciò si vede a livello intuitivo osservando che la circonferenza unitaria non può contrarsi ad un punto con continuità senza “attraversare” l'origine, cioè senza uscire dall'aperto. A livello rigoroso, questa affermazione seguirà dal teorema che stabiliremo tra poco.

**Osservazione 4.6.12** Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  è una curva di classe  $C^1$  omotopa ad una costante, è sempre possibile costruire un'omotopia  $\mathbf{G}_0$  di classe  $C^1$  in  $[0, 1] \times [a, b]$ , ed inoltre tale che  $\frac{\partial^2 \mathbf{G}_0}{\partial t \partial \lambda} \in C^0([0, 1] \times [a, b])$ . Ciò è evidente nel caso in cui  $A$  è stellato rispetto a un punto, ma è vero in generale (esercizio 4.6.14).

**Teorema 4.6.13** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto semplicemente connesso. Se  $\omega$  è una 1-forma di classe  $C^1$  su  $A$  e chiusa, allora  $\omega$  è esatta.

**Dimostrazione** Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  una curva di classe  $C^1$  a tratti e chiusa: proveremo che  $\int_{\varphi} \omega = 0$ . Per l'esercizio 4.6.4 possiamo supporre che  $\varphi$  sia di classe  $C^1$ . Poiché  $A$  è semplicemente connesso,  $\varphi$  è omotopa ad una costante  $\mathbf{x}_0 \in A$  tramite un'omotopia  $\mathbf{G}$  che possiamo supporre di classe  $C^1$  in  $[0, 1] \times [a, b]$ , e tale che  $\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t \partial \lambda} \in C^0([0, 1] \times [a, b])$ . Poniamo

$$\varphi_{\lambda}(t) = \mathbf{G}(\lambda, t), \quad t \in [a, b]; \quad I(\lambda) = \int_{\varphi_{\lambda}} \omega, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Allora si ha  $I(0) = \int_{\varphi} \omega$ ,  $I(1) = \int_{\mathbf{x}_0} \omega = 0$ , ed inoltre

$$\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_a^b \left\langle \omega(\mathbf{G}(\lambda, t)), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}(\lambda, t) \right\rangle_N^* dt;$$

dal teorema di derivazione degli integrali dipendenti da parametro (esercizio 3.12.17) ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} I(\lambda) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\langle \omega(\mathbf{G}(\lambda, t)), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}(\lambda, t) \right\rangle_N^* dt = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial G^j}{\partial \lambda}(\lambda, t) \frac{\partial G^i}{\partial t}(\lambda, t) + \omega_i(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial^2 G^i}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Utilizziamo ora il fatto che  $\omega$  è chiusa: si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} I(\lambda) &= \\ &= \int_a^b \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial G^i}{\partial t}(\lambda, t) \right] \frac{\partial G^j}{\partial \lambda}(\lambda, t) + \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial^2 G^i}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \omega_j(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial G^j}{\partial \lambda}(\lambda, t) + \omega_j(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial^2 G^j}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^N \omega_j(\mathbf{G}(\lambda, t)) \frac{\partial G^j}{\partial \lambda}(\lambda, t) \right] dt = \\ &= \left\langle \omega(\mathbf{G}(\lambda, b)), \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda}(\lambda, b) \right\rangle_N^* - \left\langle \omega(\mathbf{G}(\lambda, a)), \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda}(\lambda, a) \right\rangle_N^*. \end{aligned}$$

Dall'identità

$$\mathbf{G}(\lambda, b) = \mathbf{G}(\lambda, a) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

segue allora  $\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = 0$ , ossia  $I(\lambda)$  è costante. Pertanto

$$\int_{\varphi} \omega = I(0) = I(1) = 0.$$

Dal teorema 4.6.6 segue che  $\omega$  è esatta.  $\square$

**Osservazioni 4.6.14 (1)** La dimostrazione precedente mostra che se  $\omega$  è una forma chiusa e  $\varphi$  è una curva omotopa ad una costante, allora  $\int_{\varphi} \omega = 0$ . Da questo fatto segue che  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è semplicemente connesso: infatti, se lo fosse, la curva chiusa  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , sarebbe omotopa ad una costante: quindi dovrebbe essere

$$\int_{\varphi} \left[ \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right] = 0,$$

dato che, come osservato in precedenza, la forma che viene integrata lungo  $\varphi$  è chiusa; ma ciò non è, come abbiamo visto nell'esempio 4.6.4.

**(2)** Nel caso di  $\mathbb{R}^3$ , una 1-forma

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

è chiusa se  $A, B, C$  sono funzioni di classe  $C^1$  e

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Posto  $(A, B, C) = \mathbf{F}$ , introduciamo il *rotore* di  $\mathbf{F}$ , cioè il vettore definito formalmente da

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right),$$

ove abbiamo posto, alla maniera dei fisici,  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$ . Allora la 1-forma  $\omega$  è chiusa in un aperto  $A$  se e solo se  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  in  $A$ .

## Esercizi 4.6

1. Calcolare i seguenti integrali curvilinei di 1-forme:

- (i)  $\int_{+\Gamma} (x^2 dx + xy dy)$ , ove  $\Gamma : y = x^2$ ,  $|x| \leq 1$  (verso delle  $x$  crescenti);
- (ii)  $\int_{+\Gamma} (xy dx + (y^2 + 1) dy)$ , ove  $\Gamma$  è il segmento da  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ ;
- (iii)  $\int_{-\Gamma} (xy^2 dx + x^2 y dy)$ , ove  $\Gamma$  è la poligonale  $(0, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 4)$ ;
- (iv)  $\int_{+\Gamma} (x^2 dx + xy^2 dy)$ , ove  $\Gamma = \partial([0, 1] \times [0, 1])$  (verso antiorario);
- (v)  $\int_{-\Gamma} (y^2 dx - x^2 dy)$ , ove  $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ ,  $x, y \geq 0$  (verso antiorario);
- (vi)  $\int_{+\Gamma} ((x - z) dx + (1 - xy) dy + y dz)$ , ove  $\Gamma = \varphi([0, 1])$ ,  $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$ ;
- (vii)  $\int_{-\Gamma} (e^z dx + e^x dy + e^y dz)$ , ove  $\Gamma = \varphi([0, 1])$ ,  $\varphi(t) = (1, t, e^t)$ ;
- (viii)  $\int_{+\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2)(dx + dy + dz)$ , ove  $\Gamma = \varphi([0, \frac{\pi}{2}])$ , con  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ;
- (ix)  $\int_{+\Gamma} 2(x + y)(x dx + y dy)$ , ove  $\Gamma : \rho = 3\vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (verso delle  $\vartheta$  crescenti);
- (x)  $\int_{-\Gamma} (\sqrt{z} dx + x dy + y dz)$ , ove  $\Gamma = \varphi[0, \frac{\pi}{2}]$ , con  $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t^2)$ .



2. Verificare che le seguenti 1-forme sono esatte e calcolarne le primitive:

(i)  $\sin x \, dx + \cos y \, dy$ ;

(ii)  $(x^2y + y^2 + 1) \, dx + \left(\frac{x^3}{3} + 2xy\right) \, dy$ ;

(iii)  $(2e^y - ye^x) \, dx + (2xe^y - e^x) \, dy$ ;

(iv)  $\frac{1}{1+y^2} \, dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2} \, dy$ .

[**Traccia:** se una primitiva  $F$  di  $f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy$  esiste, dovrà essere  $F_x = f$  e  $F_y = g$ ; quindi  $F(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y) \, dt + h(y)$ , con  $h$  arbitraria funzione  $C^1$ ; ma allora  $g = F_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x f(t, y) \, dt + h'(y)$ . Integrando rispetto a  $y$  si ricava  $h$  e quindi  $F$ . Infine si verifica che  $F$  è davvero una primitiva.]

3. Determinare una funzione  $f \in C^1(\mathbb{R})$  in modo che la 1-forma

$$\omega(x, y) = f(y) \, dx + x(ye^y + f(y)) \, dy$$

sia esatta in  $\mathbb{R}^2$ , e trovarne le primitive.

4. Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva di classe  $C^1$  a tratti della forma  $\varphi = \alpha \vee \beta$ , ove  $\alpha = \varphi|_{[a, c]}$  e  $\beta = \varphi|_{[c, b]}$  sono di classe  $C^1$ . Si provi che la curva  $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , definita da

$$\eta(t) = \begin{cases} \alpha \left( c - \frac{(t-c)^2}{c-a} \right) & \text{se } t \in [a, c] \\ \beta \left( c + \frac{(t-c)^2}{b-c} \right) & \text{se } t \in [c, b] \end{cases}$$

è di classe  $C^1$ , ha lo stesso sostegno di  $\varphi$  e si ha

$$\int_{\eta} \omega = \int_{\varphi} \omega$$

per ogni 1-forma  $\omega$  di classe  $C^0$ , definita su un aperto  $A$  contenente il sostegno di  $\varphi$ .

5. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto connesso (dunque  $A$  non è l'unione di due aperti non vuoti e disgiunti). Si provi che ogni coppia di punti di  $A$  è congiungibile con un'opportuna poligonale contenuta in  $A$ .

[**Traccia:** fissato  $\mathbf{x}_0 \in A$ , poniamo  $E = \{\mathbf{x} \in A : \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{x}_0 \text{ sono gli estremi di una poligonale contenuta in } A\}$ . Si provi che  $E$  e  $A \setminus E$  sono aperti e disgiunti, con  $E \neq \emptyset$ . Se ne deduca che  $A \setminus E$  è vuoto.]

6. Sia  $A$  un aperto connesso. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile in  $A$  con differenziale nullo in ogni punto di  $A$ , si provi che  $f$  è costante.

[**Traccia:** fissato  $\mathbf{x}_0 \in A$ , e dato un punto  $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , utilizzando l'esercizio precedente si determini una poligonale, contenuta in  $A$ , di estremi  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ ; in ogni segmento di estremi  $\mathbf{x}_{i-1}$  e  $\mathbf{x}_i$  si applichi il teorema di Lagrange alla funzione  $t \mapsto f(\mathbf{x}_{i-1} + t(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})) \dots$ ]

7. Sia  $\omega$  la 1-forma definita su  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  da  $\omega = f dx$ , ove  $f \in C[a, b]$ . Verificare che se  $\Gamma$  è l'intervallo  $[a, b]$  con il suo orientamento naturale, allora

$$\int_{+\Gamma} \omega = \int_a^b f(x) dx.$$

8. Sia  $\omega$  una 1-forma chiusa definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ , i cui coefficienti  $a_i$  siano funzioni omogenee di grado  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si provi che se  $\alpha \neq -1$  la forma  $\omega$  è esatta in  $A$ . Che succede per  $\alpha = -1$ ?

**Traccia:** si consideri la funzione  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{x})x^i \dots$

9. Riconoscere se le seguenti 1-forme sono esatte o no, trovandone eventualmente le primitive:

(i)  $x dx + (y - 1) dy$ ,

(ii)  $y dx + x dy$ ,

(iii)  $\frac{1}{2}(x dy - y dx)$ ,

(iv)  $\frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ ,

(v)  $(y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$ .

10. Trovare tutte le 1-forme del tipo  $A(y) dx + B(x) dy$ , con  $A, B \in C^1(\mathbb{R})$ , che sono esatte in  $\mathbb{R}^2$ .

11. Determinare una funzione  $Z(x, y)$  di classe  $C^1$  in modo che la 1-forma  $3x^2y^2z dx + 2x^3yz dy + Z(x, y) dz$  sia esatta in  $\mathbb{R}^2$ ; trovarne poi le primitive.

12. Trovare una funzione  $A(x, y, z)$  di classe  $C^1$  che renda esatta in  $\mathbb{R}^3$  la 1-forma  $y dx + x dy + A(x, y, z) dz$ ; trovarne poi le primitive.

13. Provare che la 1-forma

$$x \arcsin \sqrt{2 - x^2 - y^2} dx - y \arccos \sqrt{2 - x^2 - y^2} dy$$

è esatta nell'aperto (quale?) ove è definita e di classe  $C^1$ , e trovarne la primitiva  $f$  tale che  $f(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2) = -3\pi/16$ .

14. Dimostrare l'enunciato contenuto nell'osservazione 4.6.12.

**[Traccia:** Sia  $\mathbf{G} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$  un'omotetia continua fra le due curve  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow A$  di classe  $C^1$ . Per  $p \in \mathbb{N}^+$  definiamo il  $p$ -simo polinomio di Bernstein relativo alla funzione  $\mathbf{G}(\lambda, \cdot) - (1 - \lambda)\varphi - \lambda\psi$  rispetto alla variabile  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_p(\lambda, t) = & \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} \frac{(t-a)^h (b-t)^{p-h}}{(b-a)^p} \left[ \mathbf{G} \left( \lambda, a + \frac{h}{p}(b-a) \right) - \right. \\ & \left. - (1-\lambda)\varphi \left( \lambda, a + \frac{h}{p}(b-a) \right) - \lambda\psi \left( \lambda, a + \frac{h}{p}(b-a) \right) \right] \end{aligned}$$

(si veda la dimostrazione del teorema 1.7.9). Si definisca poi

$$\mathbf{H}_p(\lambda, t) = \mathbf{G}_p(\lambda, t) + (1 - \lambda)\boldsymbol{\varphi}(t) + \lambda\boldsymbol{\psi}(t), \quad \lambda \in [0, 1], \quad t \in [a, b].$$

Si verifichi che  $\mathbf{H}_p(\lambda, \cdot)$  è di classe  $C^1$ , che

$$\mathbf{H}_p(\lambda, a) = \mathbf{H}_p(\lambda, b), \quad \mathbf{H}_p(0, t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \mathbf{H}_p(1, t) = \boldsymbol{\psi}(t),$$

e che per  $p$  abbastanza grande l'immagine di  $\mathbf{H}_p$  è contenuta in  $A$ . Poniamo poi, per  $n \in \mathbb{N}^+$ ,

$$\mathbf{H}_{pn}(\lambda, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} \mathbf{H}_p\left(\frac{k}{n}, t\right);$$

si provi che per  $n$  e  $p$  grandi la funzione  $\mathbf{H}_{pn}$  è un'omotopia fra  $\boldsymbol{\varphi}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  che ha la proprietà richieste.]

15. Quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  sono stellati?

- (i)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^3\}$ ,
- (ii)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1 - 3|x|\}$ ,
- (iii)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z^2 > x^2 + y^2\}$ ,
- (iv)  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\}$ .

16. Un *fattore integrante* per una 1-forma non esatta  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  di classe  $C^1$ , definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , è una funzione  $\mu \in C^1(A)$ , mai nulla, tale che  $\mu P dx + \mu Q dy$  sia esatta.

(i) Provare che  $\mu$ , se esiste, risolve l'equazione alle derivate parziali

$$P \frac{\partial \mu}{\partial x} - Q \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

(ii) Dedurre che se  $\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$  è una funzione  $h(x)$  della sola variabile  $x$ , allora un fattore integrante è  $\mu(x) = e^{-H(x)}$ , con  $H$  primitiva di  $h$ , e che se  $\frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$  è una funzione  $k(y)$  della sola variabile  $y$ , allora un fattore integrante è  $\mu(y) = e^{K(y)}$ , con  $K$  primitiva di  $k$ .

(iii) Determinare un fattore integrante per le 1-forme

$$\omega_1 = xy^2 dx + 2x^2 y dy, \quad \omega_2 = \frac{xy}{1 + x^2 y^4} dx + \frac{2x^2}{1 + x^2 y^4} dy.$$

17. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto semplicemente connesso, siano  $B_1, \dots, B_m$  palle chiuse disgiunte contenute in  $A$  e sia  $\Omega = A \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i$ ; sia infine  $\omega$  una 1-forma di classe  $C^1$  e chiusa in  $\Omega$ . Si provi che  $\omega$  è esatta in  $\Omega$  se e solo per ogni  $i = 1, \dots, m$  esiste una curva  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , il cui sostegno è contenuto in  $\Omega$  e circonda  $B_i$ , tale che  $\int_{\boldsymbol{\varphi}_i} \omega = 0$ .

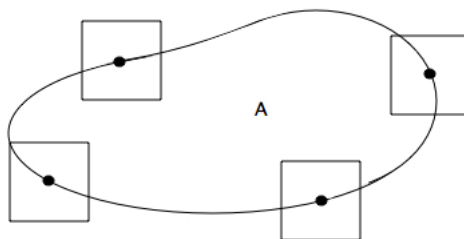
## 4.7 Aperti con frontiera di classe $C^r$

Gli aperti di  $\mathbb{R}^N$  possono avere frontiera estremamente irregolare: basta pensare all'insieme

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(\mathbf{r}_n, 2^{-n}),$$

ove  $\{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una numerazione di  $\mathbb{Q}^N$ ; questo insieme è aperto, è ovviamente denso in  $\mathbb{R}^N$  e la sua frontiera è un insieme di misura infinita di cui è difficile intuire la morfologia. Ci interessa allora individuare classi di aperti con frontiera "regolare", ai quali sia possibile applicare formule che generalizzino a  $\mathbb{R}^N$  il teorema fondamentale del calcolo integrale o l'integrazione per parti, formule che proveremo nel prossimo paragrafo.

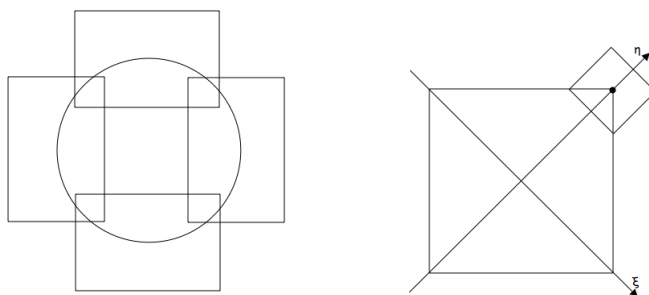
**Definizione 4.7.1** Sia  $A \subset \mathbb{R}^N$  un aperto. Diciamo che la frontiera  $\partial A$  è di classe  $C^r$  (ove  $r \in \mathbb{N}$  oppure  $r = \infty$ ), e scriviamo  $\partial A \in C^r$ , se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \partial A$  esistono un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  ed una funzione  $g$  di solo  $N - 1$  variabili, di classe  $C^1$ , il cui grafico è  $U \cap \partial A$  e il cui sottografico interseca  $U$  in  $U \cap A$ .



**Esempi 4.7.2 (1)** L'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  è aperto in  $\mathbb{R}^2$  ed ha frontiera di classe  $C^\infty$ . Infatti ogni punto  $(x_0, y_0) \in \partial A$  ha un intorno  $U$  tale che  $U \cap \partial A$  è grafico, e  $U \cap A$  è sottografico, di una delle quattro funzioni

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x = \sqrt{1 - y^2}, \quad x = -\sqrt{1 - y^2},$$

ristrette a un opportuno sottointervallo di  $] - 1, 1[$ .



**(2)** L'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$  è un quadrato aperto in  $\mathbb{R}^2$ , e la sua frontiera è di classe  $C^0$  ma non di classe  $C^1$ . Infatti i quattro vertici, ossia i punti  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$ , non hanno alcun intorno  $U$  tale che  $U \cap \partial A$  sia grafico di una funzione di classe  $C^1$ . Però, rispetto agli assi  $\xi, \eta$  definiti da  $\xi = x + y$  e  $\eta = x - y$ , il punto  $(1, 1)$  (ad esempio) ha un intorno  $U$  tale che  $U \cap \partial A$  è grafico, e  $U \cap A$  è sottografico, della funzione continua  $\xi = \sqrt{2} - |\eta|$ ,  $\eta \in ] - \delta, \delta[$ , con  $\delta > 0$  opportuno.

**(3)** L'insieme  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  non è un aperto con frontiera regolare. Infatti la sua frontiera  $\partial A$  è la retta di equazione  $y = 0$ : per ogni intorno  $U$  di ciascun punto  $(x, 0)$ ,  $U \cap \partial A$  è grafico della funzione  $g(x) = 0$ , ma  $U \cap A$  non ne è il sottografico.

**Osservazione 4.7.3** Tenuto conto del teorema del Dini (teorema 1.9.2), possiamo dire che un aperto  $A \subset \mathbb{R}^N$  ha frontiera di classe  $C^r$  se e solo se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \partial A$  esistono un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  ed una funzione  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^r$ , con  $\nabla F(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ , tale che

$$U \cap \partial A = \{\mathbf{x} \in U : F(\mathbf{x}) = 0\}, \quad A \cap U = \{\mathbf{x} \in U : F(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Ricordiamo che in questa situazione il vettore  $\nabla F(\mathbf{x})$  è perpendicolare al luogo descritto dall'equazione  $F(\mathbf{x}) = 0$ : dunque

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla F(\mathbf{x})}{|\nabla F(\mathbf{x})|_N}$$

è il versore normale a  $\partial A$ , nel punto  $\mathbf{x} \in \partial A$ , diretto verso l'esterno di  $A$ , mentre  $-\mathbf{n}(\mathbf{x})$  è il versore normale diretto verso l'interno di  $A$ .

**Osservazione 4.7.4** Vi è ancora un altro modo di caratterizzare gli aperti limitati con frontiera di classe  $C^r$ : tornando alla situazione considerata nell'osservazione precedente, supponiamo ad esempio  $F_{x^N}(\mathbf{x}_0) \neq 0$  e, posto  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x^N)$  con  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1}$ , consideriamo la funzione  $\mathbf{G} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0, -F(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in U;$$

essa è di classe  $C^r$  e localmente invertibile in  $\mathbf{x}_0$  in virtù del teorema 1.9.10, in quanto

$$\mathbf{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} I_{N-1} & 0 \\ -\nabla_{\mathbf{x}'} F(\mathbf{x}_0) & -F_{x^N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

ha rango  $N$ . Dunque esiste un intorno  $Z$  di  $\mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{G}$  è una bigezione fra  $U$  e  $Z$ ; scelto  $\rho > 0$  tale che  $B(\mathbf{0}, \rho) \subset Z$ , e posto  $W = \mathbf{G}^{-1}(B(\mathbf{0}, \rho))$ ,  $\mathbf{G}$  è una bigezione anche fra  $W$  e  $B(\mathbf{0}, \rho)$ . La funzione  $\mathbf{h} = \frac{1}{\rho} \mathbf{G}$  è allora una bigezione di classe  $C^r$  fra l'intorno  $W$  di  $(\mathbf{x}', x^N)$  e  $B(\mathbf{0}, 1)$ , tale che

$$\mathbf{h}(W \cap A) = \{(\xi', \xi^N) \in B(\mathbf{0}, 1) : \xi^N > 0\}.$$

In altre parole,  $\partial A$  è di classe  $C^r$  se e solo se ogni suo punto ha un intorno  $W$ , associato al quale esiste un diffeomorfismo di classe  $C^r$  fra  $W$  e  $B(\mathbf{0}, 1)$  tale che l'immagine di  $W \cap A$  sia la semisfera  $N$ -dimensionale in cui una delle coordinate è positiva.

Diamo ora la definizione di spazio  $C^1(\overline{A})$ , essendo  $A$  un aperto limitato.

**Definizione 4.7.5** Sia  $A \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato. Diciamo che  $f \in C^1(\overline{A})$  se  $f \in C^1(A)$  e se  $f, D_1 f, \dots, D_N f$  sono funzioni uniformemente continue in  $A$  e dunque prolungabili con continuità a tutto  $\overline{A}$ .

Ovviamente,  $C^1(\overline{A})$  è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{C^1(\overline{A})} = \sup_{\overline{A}} |f| + \sum_{i=1}^N \sup_{\overline{A}} |D_i f|.$$

Vogliamo adesso fornire una caratterizzazione alternativa dello spazio  $C^1(\overline{A})$ , valida per aperti di classe  $C^1$ .

**Proposizione 4.7.6** Sia  $A \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$  e sia  $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f \in C^1(\bar{A})$  se e solo se esiste  $F \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$  tale che  $F|_{\bar{A}} = f$  e  $\|F\|_{C^1(\mathbb{R}^N)} \leq K\|f\|_{C^1(\bar{A})}$ , ove  $K$  è una costante che dipende solo da  $N$ .

**Dimostrazione** ( $\Leftarrow$ ) Evidente.

( $\Rightarrow$ ) Premettiamo un lemma, in cui si costruisce esplicitamente l'estensione ad  $\mathbb{R}^N$  di funzioni di classe  $C^1$  su un semispazio chiuso. Successivamente, tramite una partizione dell'unità, il problema dell'estensione di una funzione sarà localizzato ad un fissato intorno di un punto del bordo: il bordo verrà "spianato" con un diffeomorfismo, in modo da ridursi al caso del semispazio per applicare il lemma.

**Lemma 4.7.7** Sia  $f \in C^1(R_+^N)$ , ove  $\mathbb{R}_+^N = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : y^N \geq 0\}$ . Allora la funzione

$$F(\mathbf{y}) = \begin{cases} f(\mathbf{y}) & \text{se } y^N \geq 0 \\ 3f(\mathbf{y}', -y^N) - 2f(\mathbf{y}', -2y^N) & \text{se } y^N < 0, \end{cases}$$

appartiene a  $C^1(\mathbb{R}^N)$ , estende  $f$  e verifica

$$\|F\|_{C^1(\mathbb{R}^N)} \leq 7\|f\|_{C^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

**Dimostrazione** Basta osservare che

$$D_i F(\mathbf{y}) = \begin{cases} D_i f(\mathbf{y}) & \text{se } y^N \geq 0 \\ 3D_i f(\mathbf{y}', -y^N) - 2D_i f(\mathbf{y}', -2y^N) & \text{se } y^N < 0, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

mentre

$$D_N F(\mathbf{y}) = \begin{cases} D_N f(\mathbf{y}) & \text{se } y^N \geq 0 \\ -3D_N f(\mathbf{y}', -y^N) + 4D_N f(\mathbf{y}', -2y^N) & \text{se } y^N < 0; \end{cases}$$

la stima segue facilmente.  $\square$

Torniamo alla dimostrazione della proposizione. Per l'osservazione 4.7.4 e per compattezza, esiste un ricoprimento aperto finito  $\{W_j\}_{1 \leq j \leq k_N}$  di  $\partial A$ , ed esistono diffeomorfismi  $\mathbf{h}_j$  fra  $W_j$  e  $B(\mathbf{0}, 1)$ , tali che

(i) esiste  $\delta > 0$  per cui

$$A_\delta = \{\mathbf{x} \in A : d(\mathbf{x}, \partial A) < \delta\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_N} \mathbf{h}_j^{-1}(B(\mathbf{0}, 1/2)),$$

(ii)  $\mathbf{h}_j(W_j \cap A) = \{\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 1) : y^N > 0\}$ ,

(iii)  $\mathbf{h}_j(W_j \cap \partial A) = \{\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 1) : y^N = 0\}$ ,

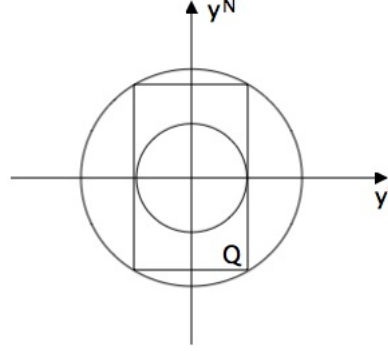
(iv) esiste  $M > 0$  per cui

$$\max_{1 \leq j \leq k_N} \|\mathbf{h}_j\|_{C^1(W_j, \mathbb{R}^N)} + \max_{1 \leq j \leq k_N} \|\mathbf{h}_j^{-1}\|_{C^1(B(\mathbf{0}, 1), \mathbb{R}^N)} \leq M.$$

Sia

$$Q = \left\{ \mathbf{y} = (\mathbf{y}', y^N) \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{y}'|_{N-1} < \frac{1}{2}, |y^N| < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

e poniamo  $Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N$ . Chiaramente si ha  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \subset Q \subset B(\mathbf{0}, 1)$ . Posto  $V_j = \mathbf{h}_j^{-1}(Q)$ , la famiglia  $\{V_j\}_{1 \leq j \leq k_N}$  è un ricoprimento aperto di  $A_\delta$ ; scelto allora un aperto  $V_0 \subset (A \setminus A_{\delta/2})$ , la famiglia  $\{V_j\}_{0 \leq j \leq k_N}$  è un ricoprimento aperto di  $A$ . Fissiamo una partizione dell'unità  $\{\varphi_j\}_{0 \leq j \leq k_N}$  associata al ricoprimento  $\{V_j\}$  (proposizioni 3.15.22 e 3.15.23).



Ciò premesso, sia  $u \in C^1(\bar{A})$ : vogliamo costruire una estensione  $U$  di  $u$ , che appartenga a  $C_0^1(\mathbb{R}^N)$  e abbia norma  $C^1$  dominata da quella di  $u$ . Definiamo le funzioni

$$\begin{aligned} \eta_0(\mathbf{x}) &= \varphi_0(\mathbf{x})u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in A, \\ \vartheta_j(\mathbf{y}) &= \varphi_j(\mathbf{h}_j^{-1}(\mathbf{y}))u(\mathbf{h}_j^{-1}(\mathbf{y})), & \mathbf{y} \in \bar{Q}_+, \quad j = 1, \dots, k_N. \end{aligned}$$

Chiaramente,  $\eta_0 \in C_0^1(A)$ , mentre le  $\vartheta_j$ ,  $1 \leq j \leq k_N$ , sono in  $C^1(\bar{Q}_+)$  e sono nulle su  $\{\mathbf{y} \in \partial Q_+ : y^N > 0\}$ ; pertanto queste ultime possono essere prolungate a 0 su  $\mathbb{R}_+^N \setminus Q_+$ , e ad esse può essere applicato il lemma 4.7.7.

Consideriamo dunque le estensioni  $\Theta_j(\mathbf{y})$ , definite su  $\mathbb{R}^N$ , delle  $\vartheta_j(\mathbf{y})$ : si ha in particolare  $\Theta_j \in C_0^1(Q)$  e  $\Theta_j = \vartheta_j$  su  $\bar{Q}_+$ , con

$$\|\Theta_j\|_{C^1(\bar{Q})} \leq K \|\vartheta_j\|_{C^1(\bar{Q}_+)}, \quad 1 \leq j \leq k_N.$$

Allora per  $1 \leq j \leq k_N$  la funzione

$$\eta_j(\mathbf{x}) = \Theta_j(\mathbf{h}_j(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in V_j,$$

appartiene a  $C_0^1(V_j)$ , dato che  $\Theta_j \in C_0^1(Q)$ ; inoltre se  $\mathbf{x} \in V_j \cap A$  si ha  $\mathbf{h}_j(\mathbf{x}) \in Q_+$  e dunque

$$\eta_j(\mathbf{x}) = \vartheta_j(\mathbf{h}_j(\mathbf{x})) = \varphi_j(\mathbf{x})u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_j \cap A.$$

Pertanto, prolungando a 0 fuori di  $V_j$  le funzioni  $\eta_j$ , abbiamo  $\eta_j \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$  per  $0 \leq j \leq k_N$ , e la funzione

$$U(\mathbf{x}) = \eta_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k_N} \eta_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

è un'estensione di  $u$  a tutto  $\mathbb{R}^N$  che ha supporto compatto e verifica

$$\|U\|_{C^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\eta_0\|_{C^1(V_0)} + k_N \max_{1 \leq j \leq k_N} \|\eta_j\|_{C^1(V_j)} \leq (1 + k_N K) \|u\|_{C^1(\bar{A})}.$$

Ciò conclude la dimostrazione della proposizione 4.7.6.  $\square$

**Osservazione 4.7.8** Lo spazio  $C^r(\overline{A})$  si definisce, analogamente a quanto fatto nella definizione 4.7.5, come l'insieme delle  $f \in C^r(A)$  tali che, per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  con  $|\alpha| \leq r$ , la funzione  $D^\alpha f$  è uniformemente continua su  $A$  e quindi è prolungabile con continuità su  $\overline{A}$ . Se  $A \subset \mathbb{R}^N$  è un aperto di classe  $C^r$ , allora vale una caratterizzazione dello spazio  $C^r(\overline{A})$  analoga a quella della proposizione 4.7.6, che si ottiene generalizzando il metodo del lemma 4.7.7: vale a dire,  $f \in C^r(\overline{A})$  se e solo se esiste  $F \in C_0^r(\mathbb{R}^N)$  tale che  $F|_{\overline{A}} = f$  e  $\|F\|_{C^r(\mathbb{R}^N)} \leq K\|f\|_{C^r(\overline{A})}$ , con  $K$  dipendente solo da  $N$  e  $r$ .

## Esercizi 4.7

1. Per ogni  $r \in \mathbb{N}$  si costruisca esplicitamente un aperto di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^r$  ma non di classe  $C^{r-1}$ .
2. Stabilire se i seguenti aperti hanno frontiera di classe  $C^r$  per qualche  $r$ :

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^{\frac{3}{2}} + |y|^{\frac{4}{3}} + |z|^2 < 1\};$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\};$$

$$A_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \max\{e^{-|\mathbf{x}|_N}, e^{-|\mathbf{x}|_N^2}\} < \frac{1}{2}\}.$$

## 4.8 Formule di Gauss-Green nel piano

Gli integrali doppi, sotto certe ipotesi, si possono trasformare in integrali curvilinei di opportune 1-forme lungo la frontiera dell'insieme. Questo fatto, che è suscettibile di ampie generalizzazioni che vedremo in seguito, è espresso dalle cosiddette *formule di Gauss-Green*.

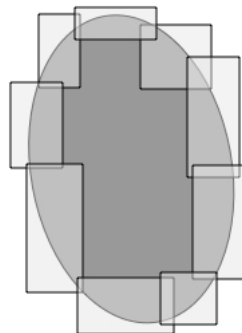
Per enunciare il teorema di Gauss-Green occorrono alcune premesse. Sia  $A$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^1$ . Non è restrittivo supporre che gli intorni  $U$  della definizione siano rettangolari; quindi  $\overline{A \cap U}$  sarà un insieme normale di  $\mathbb{R}^2$  (esempio 3.13.6 (1)). Poiché  $A$  è limitato,  $\partial A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  limitato e chiuso, dunque compatto. Perciò esistono  $n$  rettangoli  $U_1, \dots, U_n$ , tali che

$$\bigcup_{j=1}^n U_j \supseteq \partial A, \quad \overline{U_j \cap A} \text{ è un insieme normale.}$$

Posto  $R = \bigcup_{j=1}^n U_j$ ,  $R$  e  $A \setminus R$  sono plurirettangoli, quindi sono unioni finite di altri rettangoli (in particolare, insiemi normali) privi di punti interni comuni. In definitiva, potremo scrivere

$$\overline{A} = \bigcup_{i=1}^m N_i$$

ove gli  $N_i$  sono insiemi normali privi di punti interni comuni. Ciò premesso, possiamo enunciare il



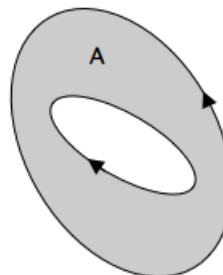


**Teorema 4.8.1 (di Gauss-Green)** Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$ . Detto  $\mathbf{n}(x, y) = (n_x(x, y), n_y(x, y))$  il versore normale a  $\partial A$  nel generico punto  $(x, y)$ , diretto verso l'esterno, per ogni  $f \in C^1(\bar{A})$  valgono le formule

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial A} f n_x ds = \int_{+\partial A} f dy,$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\partial A} f n_y ds = \int_{-\partial A} f dx,$$

ove l'orientazione positiva di  $\partial A$  è quella antioraria (e dunque lascia  $A$  sulla sinistra).



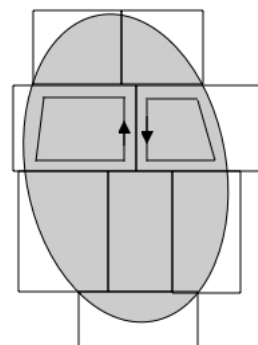
**Dimostrazione** Decomponiamo  $A$  nell'unione finita di insiemi normali  $N_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , ove gli  $N_i$  sono insiemi normali privi di punti interni comuni; la frontiera di ciascun  $N_i$  è sostegno di una curva di classe  $C^1$  a tratti. Osserviamo che, ovviamente,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \sum_{i=1}^m \int_{N_i} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy, \quad \int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^m \int_{N_i} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy.$$

Ma si ha anche

$$\int_{\partial A} f n_x ds = \sum_{i=1}^m \int_{\partial N_i} f n_x ds, \quad \int_{\partial A} f n_y ds = \sum_{i=1}^m \int_{\partial N_i} f n_y ds :$$

infatti i punti di  $\bigcup_{i=1}^m \partial N_i$  che non sono in  $\partial A$  sono segmenti interni ad  $A$  che fanno parte delle frontiere di due insiemi  $N_i$  e  $N_j$  adiacenti: questi segmenti vengono percorsi due volte con orientazioni opposte, per cui  $n_x$  e  $n_y$  cambiano segno ed i corrispondenti integrali curvilinei si cancellano. Restano perciò esattamente i pezzi di  $\bigcup_{i=1}^m \partial N_i$  che sono anche pezzi di  $\partial A$ , i quali sono percorsi una volta sola con verso coerente con l'orientazione di  $\partial A$ .



Da queste considerazioni segue che basta provare le due formule per ciascun insieme normale  $N_i$ , ovvero dimostrare le formule per un insieme  $B$  della forma

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

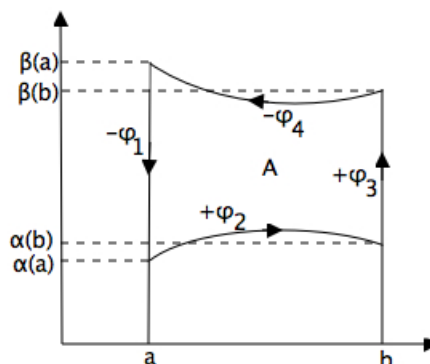
con  $\alpha, \beta \in C^1[a, b]$  e  $\alpha \leq \beta$ , oppure della forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con  $\gamma, \delta \in C^1[c, d]$  e  $\gamma \leq \delta$ .

Consideriamo l'insieme  $B$ . Per il teorema di Fubini (teorema 3.13.4) si ha

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \right] dx.$$



Ora applichiamo il teorema di derivazione rispetto a un parametro (teorema 3.12.11), il quale ci dice che

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy - \beta'(x)f(x, \beta(x)) + \alpha'(x)f(x, \alpha(x)).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy - \beta'(x)f(x, \beta(x)) + \alpha'(x)f(x, \alpha(x)) \right] dx = \\ &= \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b, y) dy - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a, y) dy - \int_a^b f(x, \beta(x))\beta'(x) dx + \int_a^b f(x, \alpha(x))\alpha'(x) dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso l'integrale curvilineo su  $\partial B$ : questo insieme è l'unione dei sostegni delle quattro curve seguenti:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= (a, y), & \alpha(a) \leq y \leq \beta(a) & \quad (\text{verso negativo}), \\ \varphi_2(x) &= (x, \alpha(x)), & a \leq x \leq b & \quad (\text{verso positivo}), \\ \varphi_3(y) &= (b, y), & \alpha(b) \leq y \leq \beta(b) & \quad (\text{verso positivo}), \\ \varphi_4(x) &= (x, \beta(x)), & a \leq x \leq b & \quad (\text{verso negativo}). \end{aligned}$$

I versori tangenti alle quattro curve, secondo le orientazioni scelte, sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(y) &= (0, -1), & \mathbf{T}_2(x) &= \left( \frac{1}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}, \frac{\alpha'(x)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}} \right), \\ \mathbf{T}_3(y) &= (0, 1), & \mathbf{T}_4(x) &= \left( \frac{-1}{\sqrt{1+\beta'(x)^2}}, \frac{-\beta'(x)}{\sqrt{1+\beta'(x)^2}} \right), \end{aligned}$$

mentre i versori normali esterni, che si ottengono ruotando i precedenti dell'angolo  $-\pi/2$ , sono

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(y) &= (-1, 0), & \mathbf{N}_2(x) &= \left( \frac{\alpha'(x)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}} \right), \\ \mathbf{N}_3(y) &= (1, 0), & \mathbf{N}_4(x) &= \left( \frac{-\beta'(x)}{\sqrt{1+\beta'(x)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\beta'(x)^2}} \right). \end{aligned}$$

Quindi, per definizione di integrale curvilineo di funzioni, e per quanto fatto in precedenza,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} f n_x ds &= \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i} f n_x ds = \\ &= - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a, y) dy + \int_a^b f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx + \\ &\quad + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b, y) dy - \int_a^b f(x, \beta(x)) \beta'(x) dx = \int_B \frac{\partial f}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

D'altra parte, per definizione di integrale curvilineo di 1-forme (definizione 4.6.3) si ha

$$\begin{aligned} \int_{+\partial B} f dy &= \sum_{i=1}^4 \int_{+\varphi_i} f dy = \\ &= - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a, y) dy + \int_a^b f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx + \\ &\quad + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b, y) dy - \int_a^b f(x, \beta(x)) \beta'(x) dx, \end{aligned}$$

e ciò prova la prima formula relativa all'insieme  $B$ .

La dimostrazione della seconda formula è analoga ma più semplice: si ha

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right] dx = \int_a^b [f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x))] dx,$$

mentre

$$\int_{\partial B} f n_y ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i} f n_y ds = 0 - \int_a^b f(x, \alpha(x)) dx + 0 + \int_a^b f(x, \beta(x)) dx,$$

e similmente

$$\int_{-\partial B} f dx = \sum_{i=1}^4 \int_{-\varphi_i} f dx = 0 - \int_a^b f(x, \alpha(x)) dx + 0 + \int_a^b f(x, \beta(x)) dx.$$

Ciò prova la seconda formula relativa all'insieme  $B$ .

I calcoli relativi all'insieme  $D$  sono del tutto analoghi. La dimostrazione è completa.

□

Le formule di Gauss-Green hanno svariate applicazioni: la prima riguarda l'area di insiemi piani.

**Proposizione 4.8.2** *Sia  $A$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$ , con frontiera di classe  $C^1$ . Allora risulta*

$$m_2(A) = \int_{+\partial A} x dy = \int_{-\partial A} y dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial A} (x dy - y dx).$$

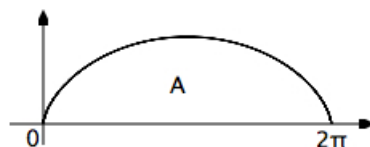
L'ultima relazione, che è evidente conseguenza delle prime due, è utile quando l'insieme  $A$  presenta simmetrie rispetto all'origine o agli assi  $x$  e  $y$ , perché può dar luogo a cancellazioni di termini.

**Dimostrazione** Scegliendo nelle formule di Gauss-Green  $f(x, y) = x$  oppure  $f(x, y) = y$  si ha

$$m_2(A) = \int_A 1 \, dx dy = \int_{+\partial A} x \, dy = \int_{-\partial A} y \, dx,$$

da cui la tesi.  $\square$

**Esempio 4.8.3** Calcoliamo l'area della regione  $A$  delimitata dall'asse  $x$  e dall'arco di cicloide



$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'insieme  $A$  è normale rispetto ad entrambi gli assi, ma il calcolo diretto dell'area di  $A$  tramite il teorema di Fubini non è certo agevole. Invece, usando la proposizione precedente si ha, detto  $\Gamma$  il segmento  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,

$$\begin{aligned} m_2(A) &= \frac{1}{2} \int_{+\Gamma} (x \, dy - y \, dx) + \frac{1}{2} \int_{-\varphi} (x \, dy - y \, dx) = \\ &= 0 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(t - \sin t)(\sin t) - (1 - \cos t)(1 - \cos t)] \, dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [t \sin t - \sin^2 t - 1 + 2 \cos t - \cos^2 t] \, dt = 2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = 3\pi. \end{aligned}$$

La seconda applicazione del teorema di Gauss-Green è il cosiddetto *teorema della divergenza*. Se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^N)$ , la *divergenza* di  $\mathbf{F}$  è la funzione scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F^i}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \langle \nabla, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle_N,$$

ove evidentemente l'ultimo membro ha significato puramente formale. Nel caso di  $\mathbb{R}^2$ , la divergenza del campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  è dunque

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

**Teorema 4.8.4 (della divergenza)** Sia  $A$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^1$ , e sia  $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ . Allora

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy = \int_{\partial A} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_2 \, ds,$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale a  $\partial A$ , diretto verso l'esterno di  $A$ .

Prima di dimostrare la formula, cerchiamo di interpretarla. L'integrale a destra misura il *flusso* del campo vettoriale  $\mathbf{F}$  attraverso la frontiera di  $A$ ; la quantità di flusso uscente è dunque uguale all'integrale della divergenza di  $\mathbf{F}$ . Se  $\mathbf{F}$  è il vettore velocità di un fluido avente densità  $\rho(x, y)$  (variabile da punto a punto), il vettore  $\rho\mathbf{F}$  è la *densità di corrente* e l'integrale  $\int_{\partial A} \rho \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_2 ds$  è la quantità di fluido che esce da  $A$  nell'unità di tempo. Sostituendo  $A$  con una palla  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , ove  $\mathbf{x}_0$  è un punto di  $A$ , possiamo scrivere

$$\operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}_0)\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} \operatorname{div}(\rho\mathbf{F}) dx dy = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} \rho \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_2 ds,$$

e quindi  $\operatorname{div}(\rho\mathbf{F})$  ha il significato di variazione della massa di fluido per unità di area e di tempo.

**Dimostrazione** Posto  $\mathbf{F} = (f, g)$ , dalle formule di Gauss-Green segue

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy = \int_A (f_x + g_y) dx dy = \int_{\partial A} (f n_x + g n_y) ds = \int_{\partial A} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_2 ds. \quad \square$$

La terza applicazione delle formule di Gauss-Green si riferisce ai campi vettoriali “irrotazionali”. Sia  $\mathbf{F}_0 = (f, g)$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  definito sull'aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , che supponiamo limitato e di classe  $C^1$ . Posto  $\mathbf{F} = (f, g, 0)$ , il *rotore* di  $\mathbf{F}$  è, come sappiamo dall'osservazione 4.6.14 (2), il vettore  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = (0, 0, g_x - f_y)$ . Dalle formule di Gauss-Green, osservando che il versore tangente a  $+\partial A$  è il versore normale esterno  $\mathbf{n}$  ruotato di  $+\pi/2$ , e che dunque  $\mathbf{T} = (-n_y, n_x)$  si ottiene

$$\int_A (\mathbf{rot} \mathbf{F})_z dx dy = \int_A \left[ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\partial A} \langle \mathbf{F}_0, \mathbf{T} \rangle_2 ds.$$

L'integrale curvilineo a destra è la *circuitazione* di  $\mathbf{F}_0$  lungo  $\partial A$ , ed è uguale al flusso del rotore di  $\mathbf{F}$ , nella direzione e nel verso dell'asse  $z$ , attraverso  $A$ . Con un procedimento simile a quello fatto per la divergenza, si vede che  $\mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  misura la “vorticità” di  $\mathbf{F}_0$ , cioè rappresenta una stima di quanto “ruota”  $\mathbf{F}_0$  per unità di area. Se il campo è *irrotazionale*, cioè  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , allora la circuitazione è nulla e la 1-forma  $\omega = f dx + g dy$  è chiusa in  $A$  (osservazione 4.6.14).

L'ultima applicazione delle formule di Gauss-Green riguarda le 1-forme chiuse definite su aperti non semplicemente connessi.

**Proposizione 4.8.5** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto limitato e connesso, e sia  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto tale che  $\overline{\Omega} \subset \Lambda$  (si dice che  $\overline{\Omega}$  è una lacuna dell'aperto non semplicemente connesso  $A = \Lambda \setminus \overline{\Omega}$ ). Sia poi  $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$  una 1-forma di classe  $C^1$ , chiusa in  $A$ . Allora esiste una costante  $c \in \mathbb{R}$  tale che*

$$\int_{+\varphi} \omega = c$$

per ogni curva semplice e chiusa  $\varphi$  regolare a tratti, contenuta in  $A$ , che circonda  $\overline{\Omega}$ ; tale numero  $c$  è detto periodo di  $\omega$  relativo alla lacuna  $\overline{\Omega}$ .

Si noti che se  $c = 0$  (e se  $\bar{\Omega}$  è l'unica lacuna dell'aperto  $A$ ) allora  $\omega$  è esatta in  $A$ , grazie al teorema 4.6.6.

**Dimostrazione** Consideriamo due curve  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , entrambe semplici e chiuse, regolari a tratti, contenute in  $A$  e che circondano la lacuna  $\Omega$ . Poiché i sostegni di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  possono intersecarsi in vari modi, consideriamo una terza curva  $\varphi$  con le stesse proprietà, che circonda entrambi i sostegni di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Osserviamo che i sostegni di  $\varphi_1$  e  $\varphi$  delimitano un aperto  $A_1$  con frontiera regolare a tratti, costituita dal sostegno di  $\varphi$ , orientato positivamente, e dal sostegno di  $\varphi_1$ , orientato negativamente. Dalla formula di Gauss-Green si ha allora

$$\int_{+\varphi} \omega - \int_{+\varphi_1} \omega = \int_{+\partial A_1} (f dx + g dy) = \int_{A_1} (-f_y + g_x) dx dy;$$

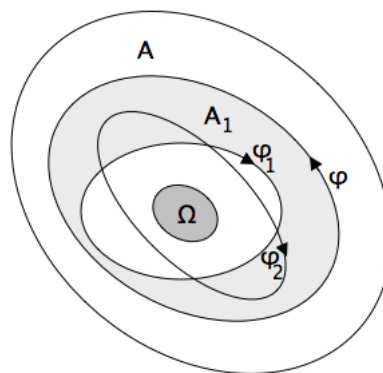
dato che  $\omega$  è chiusa, si deduce che

$$\int_{+\varphi} \omega = \int_{+\varphi_1} \omega.$$

In modo del tutto analogo si ottiene anche

$$\int_{+\varphi} \omega = \int_{+\varphi_2} \omega,$$

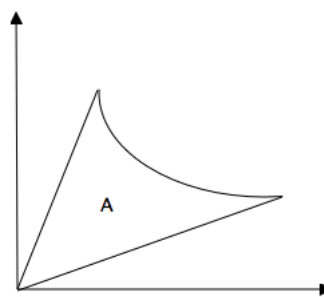
e la tesi è provata.  $\square$



## Esercizi 4.8

1. Sia  $\varphi$  una curva piana, semplice e regolare, definita dall'equazione polare  $\rho = f(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ . Se  $A$  è la regione delimitata dal sostegno di  $\varphi$  e dagli assi  $\vartheta = \alpha$  e  $\vartheta = \beta$ , si provi che

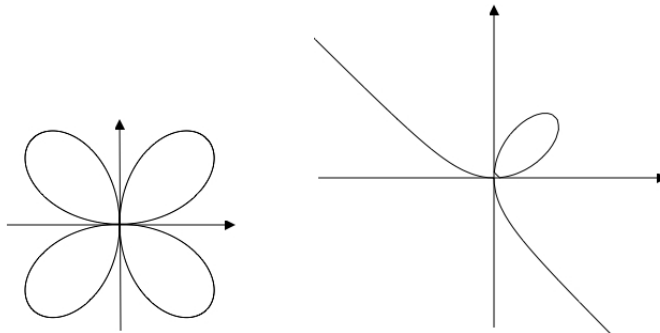
$$m_2(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta)^2 d\vartheta.$$



2. Determinare l'area della regione delimitata da ciascuna delle seguenti curve, in cui  $a$  è un parametro positivo:
  - (i) (cardioide)  $\rho = a(1 + \cos \vartheta)$ ,  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ ;
  - (ii) (lemniscata di Bernoulli)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ;
  - (iii) (astroide)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ;
  - (iv) (strofoide)  $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$ ;
  - (v) (rosa a 3 petali)  $\rho = a \sin 3\vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ ;

(vi) (rosa a 4 petali)  $\rho = a \sin^2 2\vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ ;

(vii) (folium di Cartesio)  $x^3 + y^3 = axy$ .



[**Traccia:** non sempre le formule di Gauss-Green sono le più convenienti!]

3. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(i)  $\int_A xy \, dx dy$ , ove  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$ ;

(ii)  $m_2(A)$ , ove  $A$  è delimitato da  $y = x$  e da  $\varphi(t) = (t^2 + t, t^4 + t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ;

(iii)  $m_2(A)$ , ove  $A$  è delimitato da  $y = x$  e da  $\varphi(t) = (t^3 + \ln t, t^3 + \ln^3 t)$ ,  $t \in [1, e]$ ;

(iv)  $\int_A (5x - 6y) \, dx dy$ , ove  $A$  è delimitato dall'asse  $x$  e da  $\varphi(t) = (\frac{t - \sin t}{5}, \frac{1 - \cos t}{5})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;

(v)  $m_2(A)$ , ove  $A$  è delimitato da  $\varphi(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;

(vi)  $m_2(A)$ , ove  $A$  è delimitato da  $y = 1$  e da  $\varphi(t) = (3(t - \sin t), 1 - \sin 2t)$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ ;

(vii)  $m_2(A)$ , ove  $A$  è delimitato dall'asse  $y$  e da  $\varphi(t) = (t - t^2, t + \frac{1}{2} \arctan t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ;

(viii)  $m_2(A)$ , ove  $A$  è delimitato dall'asse  $x$  e da  $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos 2t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

4. Sia  $A$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^1$ , e siano  $f, g \in C^1(A)$ . Si provino le seguenti *formule di integrazione per parti*:

$$\int_A f \frac{\partial g}{\partial x} \, dx dy = \int_{+\partial A} fg \, dy - \int_A \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx dy,$$

$$\int_A f \frac{\partial g}{\partial y} \, dx dy = \int_{-\partial A} fg \, dy - \int_A \frac{\partial f}{\partial y} g \, dx dy.$$

5. Sia  $f \in C^2(A)$ , ove  $A$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^1$ . Provare che

$$\int_A \Delta f \, dx dy = \int_{\partial A} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, ds,$$

ove  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  è l'operatore di Laplace, o brevemente il *Laplaciano*, applicato a  $f$ , mentre  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$  è, come si sa, la derivata direzionale di  $f$  secondo la direzione  $\mathbf{n}$  (normale esterna).

6. Posto  $B_R = B((0, 0), R)$ , sia  $f \in C^2(\overline{B_1})$ . Sia inoltre  $\psi(R)$  la media integrale di  $f$  su  $\partial B_R$ , cioè

$$\psi(R) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} f \, ds.$$

- (i) Si provi che

$$\psi'(R) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, ds.$$

- (ii) Provare che se  $f$  è *armonica* in  $B_1$ , ossia  $\Delta f(x, y) = 0$  per ogni  $(x, y) \in B_1$ , allora  $\psi(R)$  è costante.  
 (iii) Dedurre che se  $f$  è armonica su  $B_R$ , allora

$$f(0, 0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} f \, ds$$

(*proprietà della media* per funzioni armoniche).

- (iv) Dimostrare che per le funzioni  $f$  armoniche su  $B_R$  la proprietà della media si può scrivere nella forma

$$f(0, 0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R} f \, dx dy.$$

7. Siano  $f, g \in C^2(A)$ , ove  $A$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^1$ . Provare che

$$\int_A (f \Delta g - g \Delta f) \, dx dy = \int_{\partial A} \left[ f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right] \, ds,$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale esterno a  $\partial A$ .

8. Si provi che per ogni campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , di classe  $C^2$ , definito su un aperto  $A \subset \mathbb{R}^3$ , risulta

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0.$$

## 4.9 Superfici

Se una particella vincolata a muoversi con un grado di libertà descrive una curva nello spazio, analogamente una particella che possa muoversi con due gradi di libertà descriverà una regione dello spazio che chiameremo superficie. Possiamo far corrispondere a questa idea intuitiva di superficie la seguente definizione: una *superficie* (di classe  $C^0$ ) è un'applicazione  $\sigma : T \rightarrow \mathbb{R}^N$ , ove  $T$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ ; chiameremo *sostegno* della superficie  $\sigma$  l'insieme immagine  $\Sigma = \sigma(T)$ .

Però questa definizione è troppo generale: a parte il fatto che occorre fare qualche ipotesi sull'insieme  $T$ , anche prendendo come  $T$  un insieme molto "buono", come ad esempio un disco, si possono ottenere sostegni  $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$  ben lontani dall'idea di superficie: se



$\sigma(u, v)$ ,  $(u, v) \in T$ , è una funzione costante,  $\Sigma$  è un singolo punto; se  $\sigma$  è costante rispetto a una delle due variabili,  $\Sigma$  è il sostegno di una curva, e più in generale  $\Sigma$  potrebbe essere una superficie che si autointerseca nei modi più strampalati.

La definizione che useremo è più restrittiva ma anche più significativa.

**Definizione 4.9.1** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto connesso, e sia  $T$  un insieme tale che  $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$ . Una superficie regolare di classe  $C^r$  ( $r \in \mathbb{N}^+$  oppure  $r = \infty$ ) è un'applicazione  $\sigma : T \rightarrow \mathbb{R}^N$ , di classe  $C^r$ , la cui matrice Jacobiana  $D\sigma$  ha rango massimo, cioè 2, in ogni punto di  $A$ . La superficie si dice semplice se  $\sigma|_A$  è iniettiva. Le  $N$  equazioni del sistema

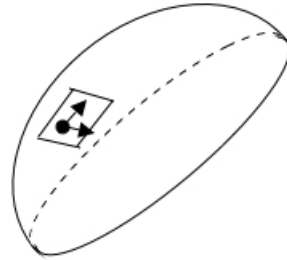
$$\mathbf{x} = \sigma(u, v), \quad (u, v) \in T,$$

sono le equazioni parametriche della superficie, e ne costituiscono una parametrizzazione.

La condizione di regolarità dice che i due vettori  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$  sono linearmente indipendenti in ogni punto di  $A$ . Geometricamente, ciò significa che in tutti i punti  $\sigma(u, v)$ , con  $(u, v) \in A$ , esiste il piano tangente alla superficie. Infatti, fissato  $(u_0, v_0) \in A$ , consideriamo le linee coordinate

$$u \mapsto \sigma(u, v_0), \quad v \mapsto \sigma(u_0, v);$$

esse sono curve regolari e i rispettivi vettori tangenti sono rispettivamente  $\sigma_u(u, v_0)$  e  $\sigma_v(u_0, v)$ . Nel punto  $\sigma(u_0, v_0)$  abbiamo dunque due vettori tangenti  $\sigma_u(u_0, v_0)$  e  $\sigma_v(u_0, v_0)$ , i quali, essendo linearmente indipendenti, generano un piano di equazioni parametriche



$$\mathbf{x} = \sigma(u_0, v_0) + s \sigma_u(u_0, v_0) + t \sigma_v(u_0, v_0), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

che è appunto tangente a  $\Sigma$  nel punto  $\sigma(u_0, v_0)$ . Per ogni curva piana  $\varphi(t) = (u(t), v(t))$  con sostegno contenuto in  $A$ , passante per  $(u_0, v_0)$  quando  $t = t_0$ , la curva  $\psi(t) = \sigma(u(t), v(t))$  ha sostegno contenuto in  $\Sigma$ , passa per  $\sigma(u_0, v_0)$  quando  $t = t_0$  ed il suo vettore tangente

$$\psi'(t_0) = \sigma_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \sigma_v(u_0, v_0)v'(t_0)$$

è, come è giusto, combinazione lineare di  $\sigma_u(u_0, v_0)$  e  $\sigma_v(u_0, v_0)$ .

Nel caso speciale  $N = 3$ , che per noi sarà il più significativo, la superficie è regolare se e solo se il prodotto vettoriale fra i vettori  $\sigma_u$  e  $\sigma_v$  è non nullo, ed in tal caso, come si sa, la direzione di  $\sigma_u \times \sigma_v$  è perpendicolare ai due vettori. Ne segue che per una superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$  la retta normale al sostegno di  $\sigma$  nel punto  $\sigma(u_0, v_0)$  è data, in forma parametrica, da

$$\mathbf{x} = \sigma(u_0, v_0) + t \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Esempi 4.9.2 (1)** La superficie sferica di centro  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$  e raggio  $r > 0$  ha equazioni parametriche

$$\sigma : \begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta, \end{cases} \quad \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [-\pi, \pi].$$

La matrice  $D\sigma$  è

$$D\sigma(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix};$$

quindi le coordinate di  $\sigma_\vartheta \times \sigma_\varphi$ , cioè i tre minori  $2 \times 2$  della matrice  $D\sigma$ , sono

$$(r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi, r^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi, r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta).$$

Pertanto si ha  $|\sigma_\vartheta \times \sigma_\varphi|_3 = r^2 \sin \vartheta > 0$  in  $]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[$ , cosicché la superficie è regolare, oltre che semplice. Si noti che la direzione di  $\sigma_\vartheta \times \sigma_\varphi$  è quella di  $(x, y, z)$ , come è giusto.

**(2) (Superfici cartesiane)** Se  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ , il grafico di  $f$  è sostegno della superficie

$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in T,$$

la quale è semplice, ed anche regolare poiché

$$D\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix}, \quad |\sigma_x \times \sigma_y|_3 = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} > 0.$$

**(3)** Le equazioni

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \\ |z| = r, \end{cases} \quad r \in [0, \infty[, \quad \vartheta \in [0, 4\pi],$$

definiscono una superficie regolare (tranne che nel punto  $(0, 0, 0)$ ) ma non semplice, il cui sostegno è il *doppio cono* di equazione cartesiana  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; questo cono è “contato due volte”, a causa del fatto che  $\vartheta$  varia fra 0 e  $4\pi$ : in altre parole, le curve circolari che si ottengono da questa superficie mantenendo  $r$  costante sono regolari ma non semplici.

**Osservazioni 4.9.3 (1)** L'esempio 4.9.2 (2) si può in un certo senso invertire: ogni superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in T$$

è, localmente, una superficie cartesiana, cioè grafico di una funzione di due variabili di classe  $C^1$ . Supponiamo che sia, ad esempio,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq 0$$

in un punto  $(u_0, v_0) \in A$ : allora l'applicazione

$$(u, v) \mapsto \mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

cioè la proiezione di  $\sigma(u, v)$  sul piano  $z = 0$ , è localmente invertibile per il teorema 1.9.10, ossia è un diffeomorfismo di un intorno  $U$  di  $(u_0, v_0)$  sulla sua immagine  $V = \mathbf{S}(U)$ . Posto

$$\mathbf{S}^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad (x, y) \in V,$$

potremo scrivere la superficie  $\sigma$ , per  $(u, v) \in U$ , nella forma  $\sigma \circ \mathbf{S}^{-1}$ , cioè

$$\sigma \circ \mathbf{S}^{-1} : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(u(x, y), v(x, y)), \end{cases} \quad (x, y) \in V.$$

Naturalmente, in un altro punto  $(u_1, v_1) \in T$  avremo un altro determinante  $2 \times 2$  non nullo, e quindi  $\Sigma$  sarà grafico, in un intorno di  $\sigma(u_1, v_1)$ , di un'altra funzione di due differenti variabili.

**(2)** Un altro caso importante di superficie regolare è quello delle *superfici di livello* di funzioni reali di tre variabili: se  $F \in C^1(A)$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^3$ , l'insieme

$$Z_c = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = c\},$$

se non vuoto, è una superficie localmente cartesiana in tutti i punti  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $Z_c$  nei quali  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ . Infatti in tal caso il teorema del Dini relativo al caso tri-dimensionale (esercizio 1.9.3) ci assicura che esiste un intorno  $W$  di  $(x_0, y_0, z_0)$  tale che  $W \cap Z_c$  è grafico di una funzione di due variabili. Dunque, supposto ad esempio  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ,  $W \cap Z_c$  è sostegno di una superficie cartesiana (dunque regolare, come sappiamo dall'esempio 4.9.2(2)) della forma

$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = g(x, y). \end{cases}$$

**Esempio 4.9.4** Le *quadriche* in  $\mathbb{R}^3$  sono i luoghi di zeri di polinomi  $P(x, y, z)$  di secondo grado. Con rotazioni e traslazioni le quadriche reali non degeneri si riducono ad uno dei tipi seguenti, in cui  $a, b, c$  sono parametri positivi:

(i) *ellissoide*:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

(ii) *iperboloide a una falda*:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

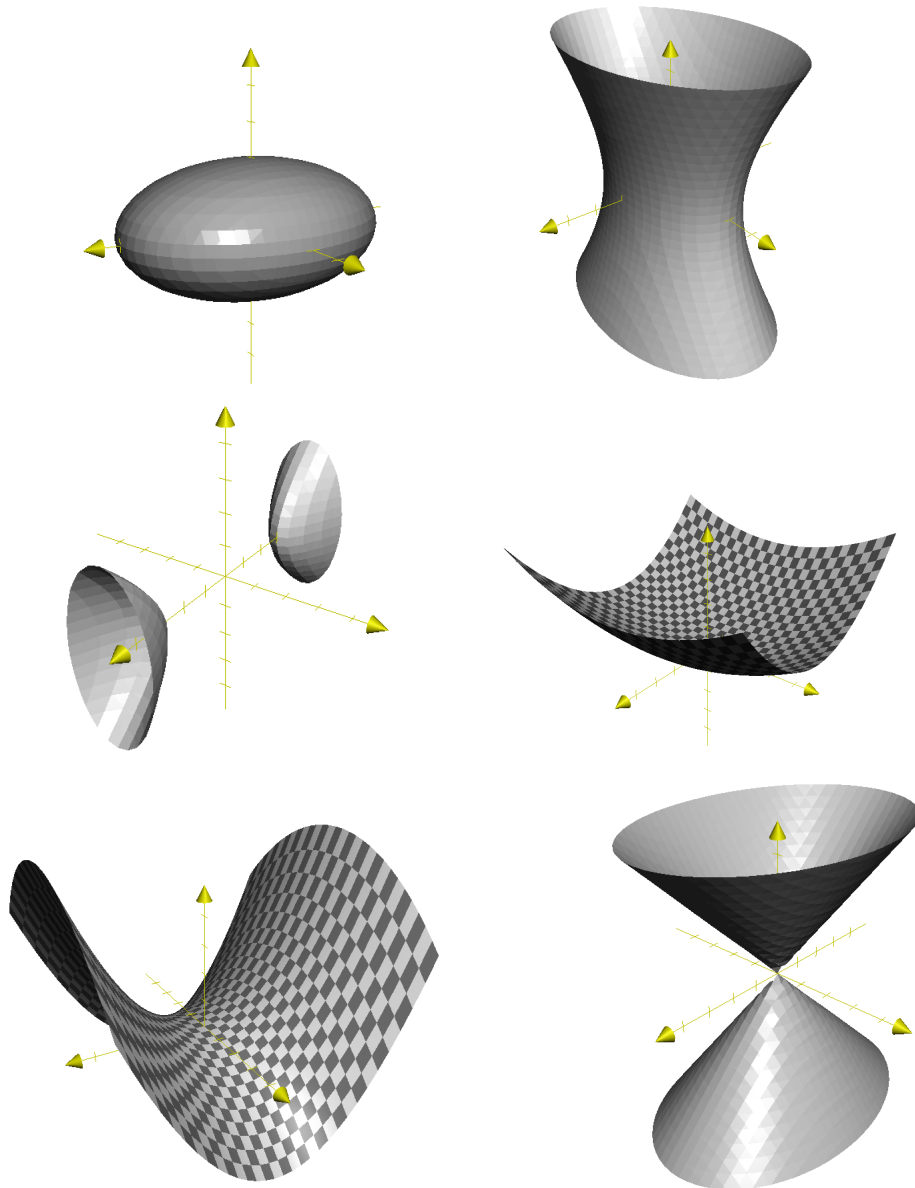
(iii) *iperboloide a due falde*:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

(iv) *paraboloide ellittico*:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ ;

(v) *paraboloide iperbolico*:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ ;

(vi) *doppio cono*:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ .

Sono tutte superfici regolari e localmente cartesiane, tranne il doppio cono che ha una singolarità nell'origine (in cui il gradiente è nullo).



Per comprendere anche questi casi nella teoria, conviene allargare la classe delle superfici regolari. Diremo allora che un insieme  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  è *sostegno di una superficie regolare* se per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma$  esiste un intorno  $W$  tale che  $W \cap \Sigma$  è sostegno di una superficie cartesiana di classe  $C^1$ , o, in altre parole, se  $\Sigma$  è una varietà di dimensione 2 in  $\mathbb{R}^3$  secondo la definizione 4.1.1.

Questa definizione più generale sarà utile nella descrizione delle proprietà geometriche delle superfici; tuttavia, quando si tratterà di calcolare l'area di una superficie, sarà più adeguata la definizione 4.9.1.

Chiudiamo questo paragrafo iniziale analizzando, alla luce della definizione precedente, come variano i vettori  $\sigma_u$  e  $\sigma_v$  di una generica superficie regolare  $\sigma(u, v)$  quando si fa un cambiamento di parametri: lo scopo è quello di vedere quali siano le grandezze e le proprietà intrinsecamente legate alla geometria del sostegno  $\Sigma$ . Ci limiteremo, salvo avviso contrario, a superfici in  $\mathbb{R}^3$ .

Sia dunque  $\sigma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare, e supponiamo per comodità che  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  sia aperto. Sia poi  $S$  un altro aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\mathbf{p} : S \rightarrow T$  un diffeomorfismo. Il sostegno  $\Sigma$  di  $\sigma$  è anche sostegno di  $\eta = \sigma \circ \mathbf{p}$ ; posto  $(u, v) = \mathbf{p}(s, t)$ , si ha allora

$$\eta_s = \sigma_u u_s + \sigma_v v_s, \quad \eta_t = \sigma_u u_t + \sigma_v v_t,$$

da cui

$$\eta_s \times \eta_t = (\sigma_u u_s + \sigma_v v_s) \times (\sigma_u u_t + \sigma_v v_t);$$

dalle proprietà del prodotto vettoriale segue allora

$$\eta_s \times \eta_t = (\sigma_u \times \sigma_v) \cdot (u_s v_t - v_s u_t) = (\sigma_u \times \sigma_v) \cdot \det \mathbf{D}\mathbf{p} \neq \mathbf{0}.$$

Quindi anche  $\eta$  è una superficie regolare e il vettore  $\eta_s \times \eta_t$  è parallelo a  $\sigma_u \times \sigma_v$ . Perciò, come è geometricamente ragionevole, la direzione ortogonale a  $\Sigma$  ed il piano tangente a  $\Sigma$  in ogni suo punto sono indipendenti dalla parametrizzazione scelta e sono dunque entità intrinsecamente legate al sostegno.

Come sappiamo, le equazioni parametriche del piano tangente a  $\Sigma$  in  $\sigma(u_0, v_0)$  sono

$$\mathbf{x} = \sigma(u_0, v_0) + \lambda \sigma_u(u_0, v_0) + \mu \sigma_v(u_0, v_0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

mentre l'equazione cartesiana di tale piano è, posto  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \sigma(u_0, v_0)$ ,

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0) \rangle_3 = 0,$$

ossia

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Se in particolare  $\sigma$  è cartesiana, allora  $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in T\}$  e l'equazione del piano tangente si riduce a quella consueta:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

mentre se  $\Sigma = Z_c = \{(x, y) \in T : F(x, y, z) = 0\}$ , con  $\nabla F \neq \mathbf{0}$  nei punti di  $Z_c$ , allora tale equazione è, come è noto,

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

## Orientazione di una superficie

Come sappiamo, i versori normali ad una superficie  $\sigma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  in un punto  $\sigma(u_0, v_0) \in \Sigma$  sono

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \pm \frac{\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0)}{|\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0)|_3}.$$

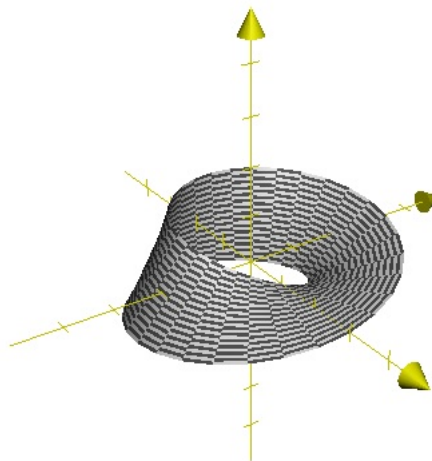
La scelta di uno dei due versi corrisponde ad assegnare un'orientazione alla superficie; un cambiamento regolare di parametri  $(u, v) = \mathbf{p}(s, t)$  conserva o inverte l'orientazione a seconda che il suo determinante Jacobiano  $J_{\mathbf{p}} = \det \mathbf{D}\mathbf{p}$  sia positivo o negativo: infatti, come abbiamo visto, posto  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\sigma} \circ \mathbf{p}$  vale la relazione

$$\boldsymbol{\eta}_s \times \boldsymbol{\eta}_t = (\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v) \cdot J_{\mathbf{p}}.$$

Osserviamo però che non su tutte le superfici regolari è possibile scegliere un'orientazione *globale*: esistono infatti superfici *non orientabili*, nelle quali il versore normale  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , variando con continuità, inverte il suo verso quando  $\mathbf{x}$  descrive un'opportuna curva chiusa contenuta nel sostegno  $\Sigma$ .

**Esempio 4.9.5** (*nastro di Möbius*) Si può ottenere questa superficie a partire dal quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ , prendendone lo spazio quoziente rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti  $(0, y)$  con i punti  $(1, 1 - y)$ ,  $y \in [0, 1]$ . Una parametrizzazione del nastro di Möbius è la seguente:

$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{cases} x = (2 + t \cos \vartheta/2) \cos \vartheta \\ y = (2 + t \cos \vartheta/2) \sin \vartheta \\ z = t \sin \vartheta/2, \end{cases}$$



ove  $t \in [-1, 1]$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Risulta

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \sin \vartheta/2 \cos \vartheta - (2 + t \cos \vartheta/2) \sin \vartheta & \cos \vartheta/2 \cos \vartheta \\ -\frac{1}{2}t \sin \vartheta/2 \sin \vartheta + (2 + t \cos \vartheta/2) \cos \vartheta & \cos \vartheta/2 \sin \vartheta \\ \frac{1}{2}t \cos \vartheta/2 & \sin \vartheta/2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\boldsymbol{\sigma}_\vartheta \times \boldsymbol{\sigma}_t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \sin \vartheta + (2 + t \cos \vartheta/2) \cos \vartheta \sin \vartheta/2 \\ \frac{1}{2}t \cos \vartheta + (2 + t \cos \vartheta/2) \sin \vartheta \sin \vartheta/2 \\ -(2 + t \cos \vartheta/2) \cos \vartheta/2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$|\boldsymbol{\sigma}_\vartheta \times \boldsymbol{\sigma}_t|_3^2 = \left(2 + t \cos \frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} > 0 \quad \forall t \in [-1, 1], \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi].$$

La superficie quindi è regolare. Se prendiamo la curva chiusa

$$\lambda(\vartheta) = \sigma(0, \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

che giace sul sostegno di  $\sigma$ , si verifica subito che il versore normale a  $\Sigma$  nei punti di questa curva è

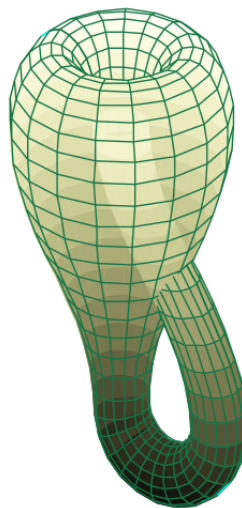
$$\mathbf{n}(0, \vartheta) = \left( \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta, \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta, -\cos \frac{\vartheta}{2} \right),$$

cosicché

$$\mathbf{n}(0, 0) = (0, 0, -1), \quad \mathbf{n}(0, 2\pi) = (0, 0, 1),$$

nonostante che entrambi i valori  $\vartheta = 0$  e  $\vartheta = 2\pi$  corrispondano al punto  $(2, 0, 0)$ . Ciò significa che non possiamo in alcun modo definire un versore normale  $\mathbf{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  che sia *continuo* su  $\Sigma$ .

**Esempio 4.9.6** Se sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  prendiamo la relazione di equivalenza che identifica i punti  $(0, y)$  con i punti  $(1, 1-y)$ ,  $y \in [0, 1]$ , e i punti  $(x, 0)$  con i punti  $(x, 1)$ ,  $x \in [0, 1]$ , otteniamo una superficie denominata *bottiglia di Klein*, la quale non è immergibile in  $\mathbb{R}^3$  senza autointersezioni, e tuttavia è una superficie regolare, non orientabile, in  $\mathbb{R}^4$ . Una parametrizzazione di questa superficie è la seguente:



$$\begin{cases} x = (2 + \cos \vartheta) \cos \varphi \\ y = (2 + \cos \vartheta) \sin \varphi \\ z = \sin \vartheta \cos \frac{\varphi}{2} \\ w = \sin \vartheta \sin \frac{\varphi}{2} \end{cases} \quad \vartheta, \varphi \in [0, 2\pi].$$

## Prima forma fondamentale

La metrica su una superficie, cioè il modo di misurare le distanze su di essa, è in generale diversa dalla metrica del piano: se ad esempio si deforma una calotta sferica in un piano, le distanze fra i punti si alterano. Per analizzare questo fenomeno, consideriamo una curva regolare  $\varphi$  giacente sul sostegno  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  di una superficie regolare: sarà  $\Sigma = \sigma(T)$  e  $\varphi(t) = \sigma(\gamma(t))$ , ove  $\gamma : [a, b] \rightarrow T$  è una curva regolare piana di componenti  $(u(t), v(t))$ . Si ha

$$\ell(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|_3 dt,$$

dove

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)|_3 &= |\sigma_u(u(t), v(t)) u'(t) + \sigma_v(u(t), v(t)) v'(t)|_3 = \\ &= \sqrt{|\sigma_u|_3^2 u'(t)^2 + 2\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_3 u'(t)v'(t) + |\sigma_v|_3^2 v'(t)^2} = \\ &= \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2}, \end{aligned}$$

avendo definito

$$E(u, v) = |\boldsymbol{\sigma}_u(u, v)|_3^2, \quad F(u, v) = \langle \boldsymbol{\sigma}_u(u, v), \boldsymbol{\sigma}_v(u, v) \rangle_3, \quad G(u, v) = |\boldsymbol{\sigma}_v(u, v)|_3^2.$$

La forma quadratica su  $\mathbb{R}^2$

$$I(u, v)[h, k] = E(u, v) h^2 + 2F(u, v) hk + G(u, v) k^2, \quad (h, k) \in \mathbb{R}^2,$$

si chiama *prima forma fondamentale*, o *metrica Riemanniana*, sulla superficie. Essa è definita positiva: infatti  $E > 0$ ,  $G > 0$  e, detto  $\vartheta$  l'angolo fra i vettori  $\boldsymbol{\sigma}_u$  e  $\boldsymbol{\sigma}_v$ ,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= |\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 - \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3^2 = \\ &= |\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = |\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 \sin^2 \vartheta = |\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 > 0. \end{aligned}$$

Come abbiamo visto sopra, la quantità  $\sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2} dt$  è l'elemento di lunghezza lungo la generica curva  $\boldsymbol{\varphi}$  giacente su  $\Sigma$ ; esprimiamo questo fatto scrivendo la relazione formale

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2 = I(u, v)[du, dv]$$

che lega il differenziale della lunghezza d'arco  $ds$ , lungo le curve giacenti su  $\Sigma$ , ai differenziali  $du, dv$  nell'insieme dei parametri. Il fatto che la prima forma fondamentale esprima una quantità legata al sostegno  $\Sigma$  ci fa pensare che essa debba essere invariante per cambiamenti di parametri regolari sulla superficie. Ed infatti, sia  $\mathbf{p}$  un diffeomorfismo  $(u, v) = \mathbf{p}(q, r)$  e poniamo  $\boldsymbol{\eta}(q, r) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}(q, r))$ ; allora, posto

$$\bar{E}(q, r) = |\boldsymbol{\eta}_q(q, r)|_3^2, \quad \bar{F}(q, r) = \langle \boldsymbol{\eta}_q(q, r), \boldsymbol{\eta}_r(q, r) \rangle_3, \quad \bar{G}(q, r) = |\boldsymbol{\eta}_r(q, r)|_3^2,$$

si ha, con calcolo noioso ma facile:

$$\begin{aligned} I(q, r)[dq, dr] &= \bar{E}(q, r) dq^2 + 2\bar{F}(q, r) dqdr + \bar{G}(q, r) dr^2 = \\ &= |\boldsymbol{\eta}_q|_3^2 dq^2 + 2 \langle \boldsymbol{\eta}_q, \boldsymbol{\eta}_r \rangle_3 dqdr + |\boldsymbol{\eta}_r|_3^2 dr^2 = \\ &= |\boldsymbol{\sigma}_u u_q + \boldsymbol{\sigma}_v v_q|_3^2 dq^2 + 2 \langle \boldsymbol{\sigma}_u u_q + \boldsymbol{\sigma}_v v_q, \boldsymbol{\sigma}_u u_r + \boldsymbol{\sigma}_v v_r \rangle_3 dqdr + |\boldsymbol{\sigma}_u u_r + \boldsymbol{\sigma}_v v_r|_3^2 dr^2 = \\ &= [|\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 (u_q)^2 + 2 \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 u_q v_q + |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 (v_q)^2] dq^2 + \\ &\quad + 2 [|\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 u_q u_r + \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 (u_q v_r + u_r v_q) + |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 v_q v_r] dqdr + \\ &\quad + [|\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 (u_r)^2 + 2 \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 u_r v_r + |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 (v_r)^2] dr^2 = \\ &= |\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 [u_q dq + u_r dr]^2 + 2 \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 [u_q dq + u_r dr] [v_q dq + v_r dr] + |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 [v_q dq + v_r dr]^2 = \\ &= |\boldsymbol{\sigma}_u|_3^2 du^2 + 2 \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 dudv + |\boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 dv^2 = \\ &= E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2 = I(u, v)[du, dv]. \end{aligned}$$

La relazione formale precedente, che esprime in funzione della prima forma fondamentale l'elemento di lunghezza  $ds$  lungo una generica curva  $\boldsymbol{\varphi}$  giacente su  $\Sigma$ , mostra che  $ds$  è il risultato della deformazione di  $du$  e  $dv$  mediante i coefficienti  $E, F, G$ , mentre sulla curva piana  $(u(t), v(t))$  come sappiamo si ha, sempre formalmente,

$$ds^2 = [u'(t)^2 + v'(t)^2] dt^2 = du^2 + dv^2.$$

Osserviamo per concludere che i singoli coefficienti della prima forma fondamentale *non* sono invarianti per cambiamenti di parametro: ad esempio, come abbiamo visto, si ha

$$\begin{aligned} E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 &= |\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v|_3^2 = |\boldsymbol{\eta}_q \times \boldsymbol{\eta}_r|_3^2 \cdot J_{\mathbf{p}}(q, r) = \\ &= [E(q, r)G(q, r) - F(q, r)^2] J_{\mathbf{p}}(q, r). \end{aligned}$$



## Area di una superficie

Sia  $\Sigma = \sigma(T)$  una superficie regolare e semplice. Il modo più intuitivo di definire l'area di  $\Sigma$ , cioè quello di considerare la famiglia delle superfici poliedriche a facce triangolari con vertici su  $\Sigma$ , e di fare l'estremo superiore delle aree (elementarmente definite) di tali superfici, non funziona: infatti tale estremo superiore è  $+\infty$  (esercizio 4.9.10). Questo è dovuto al fatto seguente: mentre, per le poligonali con cui si approssima la lunghezza di una curva, la direzione di ciascun lato si avvicina a quella delle tangenti alla curva, le facce di un poliedro inscritto in una superficie possono essere inclinate quanto si vuole rispetto ai piani tangenti alla superficie, pur avendo tali facce diametri piccoli quanto si vuole.

Procediamo dunque in un altro modo. Sia  $T_0$  un sottoinsieme misurabile e limitato di  $T$ . Dato  $n \in \mathbb{N}^+$ , sia  $P_n$  un plurirettangolo di  $\mathbb{R}^2$ , unione di  $m_n$  rettangoli adiacenti  $R_1^n, \dots, R_{m_n}^n$ , tale che  $m_2(T \setminus P_n) < 1/n$ ; possiamo supporre che  $P_n \subset P_{n+1}$ . Per ciascun rettangolo  $R_i^n = [u_i^n, u_i^n + h_i^n] \times [v_i^n, v_i^n + k_i^n]$  di  $P_n$  consideriamo il parallelogrammo corrispondente  $S_i^n$ , di vertice  $\sigma(u_i^n, v_i^n)$  e generato dai vettori  $h_i^n \sigma_u(u_i^n, v_i^n)$  e  $k_i^n \sigma_v(u_i^n, v_i^n)$ : ragioni abbastanza evidenti, legate alla formula di Taylor, ci suggeriscono che l'unione di questi parallelogrammi costituisca una buona approssimazione della superficie  $\Sigma$ : si noti infatti che per ogni  $(u, v) \in R_i^n$  e per ogni  $\mathbf{x} \in S_i^n$ , dunque della forma

$$\mathbf{x} = \sigma(u_i^n, v_i^n) + r \sigma_u(u_i^n, v_i^n) + s \sigma_v(u_i^n, v_i^n), \quad (r, s) \in [0, h_i^n] \times [0, k_i^n],$$

risulta

$$\begin{aligned} |\sigma(u, v) - \mathbf{x}|_3 &= |\sigma(u, v) - \sigma(u_i^n, v_i^n) - r \sigma_u(u_i^n, v_i^n) - s \sigma_v(u_i^n, v_i^n)|_3 \leq \\ &\leq |u - u_i^n - r| |\sigma_u(u_i^n, v_i^n)|_3 + |v - v_i^n - s| |\sigma_v(u_i^n, v_i^n)|_3 \leq M(|h_i^n| + |k_i^n|), \end{aligned}$$

ove  $M$  è un'opportuna costante legata al massimo di  $|\sigma_u|_3$  e  $|\sigma_v|_3$  su  $\overline{T_0}$ ; ne segue che la massima distanza fra punti di  $\sigma(R_i^n)$  e punti di  $S_i^n$  è infinitesima quando il diametro del rettangolo  $R_i^n$  tende a 0.

Valutiamo allora l'area  $a(S_i^n)$  del parallelogrammo  $S_i^n$ : detto  $\vartheta_i^n$  l'angolo fra i vettori  $\sigma_u(u_i^n, v_i^n)$  e  $\sigma_v(u_i^n, v_i^n)$ , tale area è data da

$$a(S_i^n) = h_i^n k_i^n |\sigma_u(u_i^n, v_i^n)|_3 |\sigma_v(u_i^n, v_i^n)|_3 \sin \vartheta_i^n = m_2(R_i^n) |\sigma_u(u_i^n, v_i^n) \times \sigma_v(u_i^n, v_i^n)|_3.$$

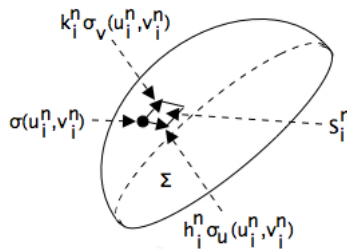
Ci aspettiamo che la somma  $\sum_{i=1}^{m_n} a(S_i^n)$  sia una buona approssimazione di ciò che dobbiamo definire, cioè l'area della superficie  $\Sigma$ . A questo proposito, si ha:

**Proposizione 4.9.7** *Nelle ipotesi precedenti, per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  sia*

$$\varphi_n(u, v) = \sum_{i=1}^{m_n} |\sigma_u(u_i^n, v_i^n) \times \sigma_v(u_i^n, v_i^n)|_3 I_{R_i^n}(u, v), \quad (u, v) \in T_0.$$

Allora  $\varphi_n \in \mathcal{S}_0$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_0} \varphi_n \, dudv = \int_{T_0} |\sigma_u \times \sigma_v|_3 \, dudv.$$



**Dimostrazione** Le funzioni  $\varphi_n$  sono semplici e nulle fuori di  $T_0$ , il quale ha misura finita essendo limitato, quindi appartengono a  $\mathcal{S}_0$ . Sia  $(u, v)$  in  $T_0 \cap A$ : allora esiste  $n \in \mathbb{N}^+$  tale che  $(u, v) \in P_n$ , e quindi esiste  $i \in \{1, \dots, m_n\}$  tale che  $(u, v) \in R_i^n$ . Ne segue, essendo  $\sigma$  di classe  $C^1$ ,

$$\left| \varphi_n(u, v) - |\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)|_3 \right| = \left| |\sigma_u(u_i^n, v_i^n) \times \sigma_v(u_i^n, v_i^n)|_3 - |\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)|_3 \right| \leq \varepsilon$$

non appena  $|(u_i^n, v_i^n) - (u, v)|_2 < \frac{1}{n} < \delta_\varepsilon$ ; ne segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(u, v) = |\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)|_3 \quad \forall (u, v) \in T_0.$$

D'altra parte

$$0 \leq \varphi_n(u, v) \leq \sup_{T_0} |\sigma_u \times \sigma_v|_3 < \infty,$$

cosicché la tesi segue per convergenza dominata.  $\square$

La proposizione 4.9.7, insieme con le considerazioni che la precedono, serve a motivare la seguente

**Definizione 4.9.8** *L'area di una superficie regolare e semplice  $\Sigma = \sigma(T)$  è il numero non negativo (eventualmente infinito)*

$$a(\Sigma) = \int_T |\sigma_u \times \sigma_v|_3 \, dudv.$$

La notazione  $a(\Sigma)$  è giustificata dal fatto che questo numero è indipendente dalla parametrizzazione di  $\Sigma$ : se  $\mathbf{p} : D \rightarrow T$  è un diffeomorfismo, e  $(q, r) = \mathbf{p}(u, v)$ , posto  $\boldsymbol{\eta} = \sigma \circ \mathbf{p}$ , dal teorema di cambiamento di variabili (teorema 3.14.2) si ha

$$\int_D |\boldsymbol{\eta}_q \times \boldsymbol{\eta}_r|_3 \, dqdr = \int_D |(\sigma_u \circ \mathbf{p}) \times (\sigma_v \circ \mathbf{p})|_3 |J_{\mathbf{p}}| \, dqdr = \int_T |\sigma_u \times \sigma_v|_3 \, dudv.$$

**Esempi 4.9.9 (1)** Calcoliamo l'area della superficie sferica di raggio  $r$  (esempio 4.9.2 (1)):

$$a(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sigma_\vartheta \times \sigma_\varphi|_3 \, d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi = 4\pi r^2,$$

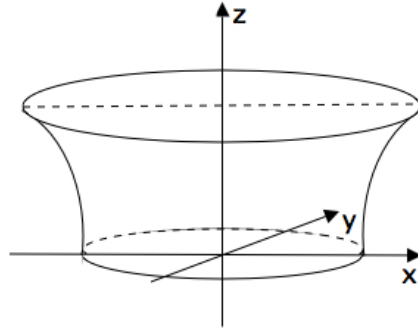
come ci si doveva aspettare.

**(2) (Superfici di rotazione)** Le superfici di rotazione si ottengono facendo ruotare il sostegno di una curva regolare piana attorno ad un asse che non la attraversi. Ad esempio, sia  $\Gamma = \boldsymbol{\varphi}[a, b]$ , ove  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ , una curva contenuta nel semipiano  $y = 0, x > 0$ : ruotando  $\Gamma$  intorno all'asse  $z$ , si ottiene una superficie  $\Sigma$  parametrizzata da

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \cos \vartheta \\ y = \alpha(t) \sin \vartheta \\ z = \beta(t), \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \cos \vartheta & -\alpha(t) \sin \vartheta \\ \alpha'(t) \sin \vartheta & \alpha(t) \cos \vartheta \\ \beta'(t) & 0 \end{pmatrix}$$



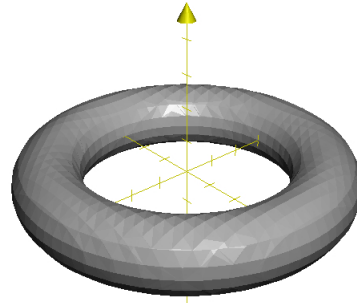
e quindi  $|\sigma_t \times \sigma_\vartheta|_3^2 = EG - F^2 = [\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2]\alpha(t)^2 = |\varphi'(t)|_2^2 \alpha(t)^2 > 0$ , dato che la curva  $\varphi$  è regolare e contenuta in  $x > 0$ . L'area vale

$$a(\Sigma) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2} d\vartheta dt = 2\pi \int_a^b \alpha(t) \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2} dt = \int_\Gamma 2\pi x ds.$$

Si noti che si integra lungo  $\Gamma$  la lunghezza della circonferenza di raggio  $x = \alpha(t)$ , cioè si calcola l'area di  $\Sigma$  integrando “per fette orizzontali”.

(3) Consideriamo in particolare il *toro*, che si ottiene ruotando attorno all'asse  $z$  una circonferenza centrata in  $(a, 0, 0)$  di raggio  $b < a$ . Le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = (a + b \cos \varphi) \cos \vartheta \\ y = (a + b \cos \varphi) \sin \vartheta \\ z = b \sin \varphi, \end{cases}$$



ove  $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]$  e  $0 < b < a$ .

Rispetto all'esempio precedente, il parametro  $\varphi$  corrisponde a  $t$  e la funzione  $a + b \cos \varphi$  corrisponde ad  $\alpha(t)$ . Come sappiamo, la superficie è regolare e, dalla formula dell'esempio precedente,

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + b \cos \varphi) b d\varphi = 4\pi^2 ab = (2\pi a)(2\pi b).$$

Naturalmente, agendo per via diretta, si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} -b \sin \varphi \cos \vartheta & -(a + b \cos \varphi) \sin \vartheta \\ -b \sin \varphi \sin \vartheta & (a + b \cos \varphi) \cos \vartheta \\ b \cos \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

da cui  $|\sigma_\varphi \times \sigma_\vartheta|_3^2 = EG - F^2 = b^2(a + b \cos \varphi)^2$ ; pertanto si ottiene nuovamente

$$a(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos \varphi) d\vartheta d\varphi = 4\pi^2 ab.$$

## Integrali superficiali

Se  $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(T) \subset \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare e semplice, ne conosciamo l'“elemento d'area”  $d\mathbf{s} = |\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v|_3 dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$ . Se  $f$  è una funzione continua di tre variabili, definita su un aperto  $A$  contenente  $\Sigma$ , l'*integrale superficiale* di  $f$  su  $\Sigma$  è definito come

$$\int_{\Sigma} f d\mathbf{s} = \int_T f(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) |\boldsymbol{\sigma}_u(u, v) \times \boldsymbol{\sigma}_v(u, v)|_3 dudv.$$

Esso è indipendente dalla parametrizzazione utilizzata per descrivere  $\Sigma$ , esattamente come lo è l'area di  $\Sigma$ , e gode delle usuali proprietà degli integrali: è lineare e monotono come funzione di  $f$ , ed è additivo come funzione di  $\Sigma$ ; ciò ci permette di estendere la definizione di integrale superficiale al caso delle superfici regolari a tratti (si veda l'esercizio 4.9.9): se  $\Sigma = \Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \dots \vee \Sigma_m$ , allora  $\int_{\Sigma} f d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i} f d\mathbf{s}$ . Inoltre

$$\left| \int_{\Sigma} f d\mathbf{s} \right| \leq \int_{\Sigma} |f| d\mathbf{s},$$

e vale il teorema della media:

$$\min_{\Gamma} f \cdot a(\Sigma) \leq \int_{\Sigma} f d\mathbf{s} \leq \max_{\Gamma} f \cdot a(\Sigma).$$

**Esempi 4.9.10 (1)** Il *baricentro* (geometrico) di una superficie regolare  $\Sigma$  è il vettore di componenti

$$\left( \frac{1}{a(\Sigma)} \int_{\Sigma} x d\mathbf{s}, \frac{1}{a(\Sigma)} \int_{\Sigma} y d\mathbf{s}, \frac{1}{a(\Sigma)} \int_{\Sigma} z d\mathbf{s} \right).$$

**(2)** Detta  $d(\mathbf{x})$  la distanza di un punto  $\mathbf{x} \in \Sigma$  da un altro punto, o retta, o piano fissato in  $\mathbb{R}^3$ , il *momento di inerzia* di  $\Sigma$  rispetto a quel punto, o a quella retta, o a quel piano, è il numero

$$\int_{\Sigma} d(\mathbf{x})^2 d\mathbf{s}.$$

## Formula di coarea

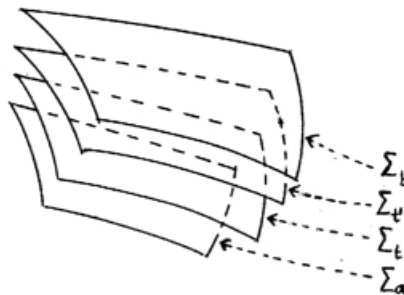
Consideriamo una famiglia  $\{\Sigma_t\}_{t \in [a, b]}$  di superfici descritte dalle equazioni

$$\Sigma_t : \quad \phi(x, y, z) = t,$$

ove  $\phi$  è una funzione di classe  $C^1$  definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ , con  $\nabla\phi(x, y, z) \neq \mathbf{0}$  in ogni punto  $(x, y, z) \in \Sigma_t$ ,  $t \in [a, b]$ .

In queste ipotesi,  $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|_3}$  è il versore normale a  $\Sigma_t$  orientato nel verso delle  $t$  crescenti. Se il parametro  $t$  viene interpretato come tempo, possiamo pensare ad una superficie  $\Sigma$  che si muove, deformandosi, nello spazio. Al variare di  $t$ ,  $\Sigma_t$  descrive una regione

$$D = \{(x, y, z) \in A : a \leq \phi(x, y, z) \leq b\} :$$



la “formula di coarea” permette di calcolare il volume della regione  $D$  in termini delle aree di  $\Sigma_t$ , integrando per “fette incurvate”. Supporremo che l’insieme  $D$  sia compatto, e dunque, in particolare, di misura finita.

**Proposizione 4.9.11 (formula di coarea)** *Nelle ipotesi precedenti, si ha*

$$m_3(D) = \int_a^b \left[ \int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla\phi|_3} ds \right] dt.$$

**Dimostrazione** Poiché in ogni punto di  $D$  si ha  $\phi_x \neq 0$ , oppure  $\phi_y \neq 0$ , oppure  $\phi_z \neq 0$ , potremo ricoprire  $D$  con un numero finito  $m$  di cubi aperti  $Q_i$ , tali che  $\Sigma_t \cap Q_i$  sia una superficie cartesiana in cui una delle tre derivate di  $\phi$  sia sempre diversa da 0.

Sia  $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq m}$  una *partizione dell’unità* associata al ricoprimento  $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq m}$  (proposizioni 3.15.22 e 3.15.23): come sappiamo, ciò significa che  $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $0 \leq \varphi_i \leq 1$ ,  $\varphi_i \equiv 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus Q_i$  e  $\sum_{i=1}^m \varphi_i \equiv 1$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si ha allora

$$m_3(D) = \sum_{i=1}^m \int_{Q_i \cap D} \varphi_i dx dy dz.$$

Consideriamo l’addendo  $i$ -simo: poniamo  $Q_i = R_i \times J_i$ , con  $R_i$  quadrato di  $\mathbb{R}^2$  e  $J_i$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , e supponiamo che in  $Q_i \cap D$  si abbia, ad esempio,  $\phi_z \neq 0$ , cosicché  $\Sigma_t \cap Q_i$  è grafico di una funzione delle variabili  $(x, y)$ :

$$\Sigma_t \cap Q_i = \{(x, y, z) \in Q_i : z = g^i(x, y, t), (x, y) \in A_{t,i}\},$$

ove abbiamo posto

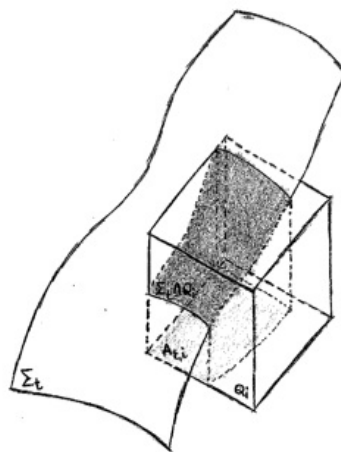
$$A_{t,i} = \{(x, y) \in R_i : \exists z \in J_i : \phi(x, y, z) = t\}.$$

L’elemento d’area su  $\Sigma_t \cap Q_i$  è dunque, per l’esercizio 4.9.2 e per il teorema del Dini,

$$ds = \sqrt{1 + [(g^i)_x]^2 + [(g^i)_y]^2} dx dy = \frac{|\nabla\phi(x, y, g^i(x, y, t))|_3}{|\phi_z(x, y, g^i(x, y, t))|} dx dy \quad \forall (x, y) \in A_{t,i}.$$

Introduciamo il cambiamento di variabili

$$(x, y, t) = \mathbf{G}^i(x, y, z) = (x, y, \phi(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in Q_i \cap D :$$



L'applicazione  $\mathbf{G}^i$  trasforma  $Q_i \cap D$  nell'insieme

$$E_i = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_{t,i}, t \in [c_i, d_i]\},$$

ove

$$c_i = \inf_{(x,y,z) \in Q_i \cap D} \phi(x, y, z), \quad d_i = \sup_{(x,y,z) \in Q_i \cap D} \phi(x, y, z).$$

Osserviamo che  $\mathbf{G}^i$  ha inversa  $(\mathbf{G}^i)^{-1} : E_i \rightarrow Q_i \cap D$ , data da

$$(\mathbf{G}^i)^{-1}(x, y, t) = (x, y, g^i(x, y, t)) \quad \forall (x, y, t) \in E_i.$$

Inoltre

$$J_{\mathbf{G}^i}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix} = \phi_z(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in Q_i \cap D,$$

e di conseguenza

$$J_{(\mathbf{G}^i)^{-1}}(x, y, t) = \frac{1}{|[\phi_z \circ (\mathbf{G}^i)^{-1}](x, y, t)|} \quad \forall (x, y, t) \in E_i.$$

Si ha allora, per il teorema 3.14.2,

$$\int_{Q_i \cap D} \varphi_i dx dy dz = \int_{E_i} \frac{\varphi_i \circ (\mathbf{G}^i)^{-1}}{|\phi_z \circ (\mathbf{G}^i)^{-1}|} dx dy dt = \int_{c_i}^{d_i} \left[ \int_{A_{t,i}} \frac{\varphi_i(x, y, g^i(x, y, t))}{|\phi_z(x, y, g^i(x, y, t))|} dx dy \right] dt.$$

Dunque si ricava, per definizione di integrale superficiale,

$$\int_{Q_i \cap D} \varphi_i dx dy dz = \int_{c_i}^{d_i} \left[ \int_{\Sigma_t \cap Q_i} \frac{\varphi_i}{|\nabla \phi|_3} ds \right] dt.$$

Poiché  $\Sigma_t \cap Q_i = \emptyset$  per  $t \notin [c_i, d_i]$ , e  $\varphi = 0$  fuori di  $Q_i$ , possiamo scrivere

$$\int_{Q_i \cap D} \varphi_i dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_i}{|\nabla \phi|_3} ds \right] dt,$$

da cui, sommando rispetto a  $i$ ,

$$m_3(D) = \sum_{i=1}^m \int_a^b \left[ \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_i}{|\nabla \phi|_3} ds \right] dt = \int_a^b \left[ \int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla \phi|_3} ds \right] dt. \quad \square$$

**Osservazioni 4.9.12 (1)** Se interpretiamo  $\Sigma_t$  come la posizione all'istante  $t$  di un insieme di punti in movimento, ciascuno dei quali descrive una curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , varrà evidentemente l'identità

$$\phi(x(t), y(t), z(t)) = t \quad \forall t \in [a, b];$$

derivando rispetto a  $t$  si ha

$$\langle \nabla\phi(\boldsymbol{\gamma}(t)), \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle_3 = 1 \quad \forall t \in [a, b],$$

e dividendo per  $|\nabla\phi(\boldsymbol{\gamma}(t))|_3$  otteniamo l'equazione

$$\langle \mathbf{n}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \mathbf{v}(t) \rangle_3 = \frac{1}{|\nabla\phi(\boldsymbol{\gamma}(t))|_3} \quad \forall t \in [a, b],$$

ove  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\gamma}(t))$  è il versore normale a  $\Sigma_t$  orientato nel verso delle  $t$  crescenti, mentre  $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\gamma}'(t)$  esprime la velocità di spostamento lungo la traiettoria  $\boldsymbol{\gamma}(t)$ , cioè la velocità di spostamento “locale” di  $\Sigma_t$ . Pertanto l'integrando nella formula di coarea misura la componente normale a  $\Sigma_t$  della velocità con cui il punto  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  si muove nello spazio.

(2) La formula di coarea si estende in modo standard a tutte le funzioni semplici, poi alle funzioni continue non negative (per convergenza monotona) e infine, per sottrazione, a tutte le funzioni continue: si ottiene così

$$\int_D f \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left[ \int_{\Sigma_t} \frac{f}{|\nabla\phi|_3} \, ds \right] dt \quad \forall f \in C(D).$$

## Formula di Stokes

Il teorema della divergenza (teorema 4.8.4) si può generalizzare al caso in cui l'aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e la sua frontiera  $\partial A$  sono rimpiazzati da una superficie regolare, semplice e orientata e dal suo “bordo”, opportunamente definito ed orientato nel modo che andiamo a descrivere.

Sia  $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(T)$  una superficie regolare, semplice ed orientabile, definita su un insieme compatto e connesso  $T$ , il quale sia la chiusura di un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  ed abbia frontiera di classe  $C^1$ . Le due orientazioni di  $\Sigma$  sono determinate dai due versori normali

$$\pm \frac{\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v}{|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v|_3}.$$

**Definizione 4.9.13** *Nelle ipotesi sopra dette, diciamo che  $\Sigma$  è una superficie con bordo se i punti di  $\Sigma$  sono ripartiti in due sottoinsiemi non vuoti:*

(a) *l'interno di  $\Sigma$  è l'insieme dei punti  $\mathbf{x} \in \Sigma$  che possiedono un intorno  $U \subset \mathbb{R}^3$  con la seguente proprietà: esiste  $r > 0$  ed esiste un diffeomorfismo  $\boldsymbol{\eta} : U \cap \Sigma \rightarrow B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^2$  per cui  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Denotiamo l'interno di  $\Sigma$  con  $i\Sigma$ ;*

(b) *il bordo di  $\Sigma$  è l'insieme dei punti  $\mathbf{x} \in \Sigma$  che possiedono un intorno  $U \subset \mathbb{R}^3$  con la seguente proprietà: esiste  $r > 0$  ed esiste un diffeomorfismo  $\boldsymbol{\eta} : U \cap \Sigma \rightarrow \{(x, y) \in B(\mathbf{0}, r) : y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$  per cui  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , e  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}') \in \{(x, y) \in B(\mathbf{0}, r) : y > 0\}$  per ogni  $\mathbf{x}' \in U \cap i\Sigma$ . Denotiamo il bordo di  $\Sigma$  con  $b\Sigma$ .*

In generale  $\Sigma = i\Sigma \cup b\Sigma$  e  $b\Sigma \subseteq \boldsymbol{\sigma}(\partial T)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(A) \subseteq i\Sigma$ . Si noti che “interno” e “bordo” non sono sinonimi di “parte interna” e di “frontiera”: infatti  $\Sigma$  è un insieme bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ , quindi non ha parte interna e coincide con la sua frontiera.

A questo proposito, definiamo *superficie chiusa*, una superficie  $\Sigma$  che sia compatta e senza bordo: si può dimostrare, con argomenti geometrici al di fuori della portata del nostro corso, che ogni superficie regolare chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$  è orientabile, mediante la scelta della normale esterna o di quella interna.

Osserviamo anche che, in generale, una generica parametrizzazione  $\sigma$  di  $\Sigma$  non soddisfa sempre, come ci si potrebbe aspettare, la relazione  $\sigma(\partial T) = b\Sigma$ , come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 4.9.14** Si consideri la calotta sferica, di raggio  $r \in ]0, 1[$  fissato,

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\};$$

chiaramente si ha

$$b\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - r^2}, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Se scegliamo la parametrizzazione cartesiana

$$\sigma : \quad x = x, \quad y = y, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in T,$$

con  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ , allora effettivamente risulta  $b\Sigma = \sigma(\partial T)$ . Ma se invece scegliamo la parametrizzazione in coordinate sferiche

$$\sigma : \quad x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \arcsin r], \quad \varphi \in [-\pi, \pi],$$

allora  $\sigma(\partial T)$  è una curva che, oltre alla circonferenza  $b\Sigma$  sopra descritta percorre anche due volte, in versi opposti, l'arco

$$x = \sin \vartheta, \quad y = 0, \quad z = \cos \vartheta, \quad \vartheta \in ]0, \arcsin r],$$

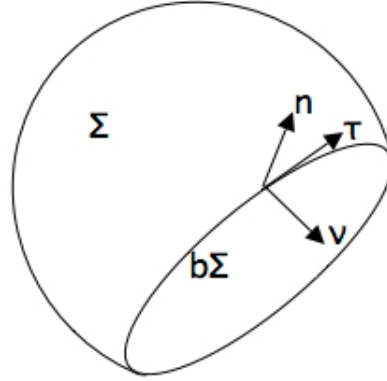
che è contenuto in  $i\Sigma$ . Se poi prendiamo come  $\Sigma$  l'intera sfera unitaria, che è una superficie con  $b\Sigma = \emptyset$ , si può scegliere  $T = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$  e si trova che  $\sigma(\partial T)$  è il meridiano di longitudine  $\varphi = 0$  percorso due volte da un polo all'altro con orientazioni opposte; in particolare si ha  $i\Sigma \not\subseteq \sigma(A)$ .

Vogliamo adesso orientare il bordo di  $\Sigma$ . Per le ipotesi fatte,  $b\Sigma$  è sostegno di una curva regolare chiusa  $\varphi$ , definita su un certo intervallo  $[c, d]$ ; il verso di percorrenza di questa curva piana (antiorario od orario) non è specificato a priori. Il bordo  $b\Sigma$  ha così due orientazioni possibili, indotte dai due versori tangenti

$$\tau = \pm \frac{\varphi'}{|\varphi'|_3}.$$



Noi supporremo che le orientazioni fissate su  $\Sigma$  e su  $b\Sigma$  siano *coerenti*. Con questo intendiamo la proprietà seguente: fissato un generico punto  $\mathbf{x} \in b\Sigma$ , e detto  $\boldsymbol{\nu}$  l'unico versore tangente in  $\mathbf{x}$  a  $\Sigma$ , normale in  $\mathbf{x}$  a  $b\Sigma$  e diretto verso l'esterno di  $\Sigma$ , i due versori  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$  hanno orientazione coerente se risulta  $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}$ , ovvero, in altre parole, se la terna  $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$  è orientata come gli assi cartesiani  $x, y, z$ . A questo proposito è utile la seguente



**Osservazione 4.9.15** Consideriamo la situazione (particolare, ma frequente nella pratica) in cui  $\boldsymbol{\sigma}(\partial T) = b\Sigma$ : in questo caso  $b\Sigma$  è parametrizzato dalla curva  $\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\gamma}$ , ove  $\boldsymbol{\gamma}$  è una curva piana regolare che parametrizza  $\partial T$ . Supponiamo che  $\boldsymbol{\gamma} = (\xi, \eta) : [a, b] \rightarrow \partial T$  percorra  $\partial T$  in verso antiorario; supponiamo  $(\xi')^2 + (\eta')^2 \equiv 1$  e siano  $\mathbf{t} = (\xi', \eta')$  il versore tangente a  $\partial T$ , orientato in tale verso, e  $\boldsymbol{\nu} = (\eta', -\xi')$  il versore normale a  $\partial T$ , orientato verso l'esterno. Il vettore

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma}_u \circ \boldsymbol{\gamma})\xi' + (\boldsymbol{\sigma}_v \circ \boldsymbol{\gamma})\eta'$$

è tangente a  $b\Sigma$  nel generico punto  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\gamma}(t))$ , mentre il vettore

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\sigma}_u \circ \boldsymbol{\gamma})\eta' - (\boldsymbol{\sigma}_v \circ \boldsymbol{\gamma})\xi'$$

è tangente a  $\Sigma$  e inoltre, pur non essendo in generale normale a  $b\Sigma$ , è non parallelo a  $\boldsymbol{\tau}$ , dato che

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v) \circ \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}.$$

Di conseguenza, se si sceglie  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v$ , risulta

$$\langle \mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n} \rangle_3 = EG - F^2 > 0,$$

ovvero la terna  $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$  è orientata come gli assi cartesiani  $x, y, z$ . Inoltre i vettori sono disposti in modo tale che un osservatore, che abbia i piedi su  $\Sigma$  e la testa nella direzione di  $\mathbf{n}$ , e che percorra  $b\Sigma$  nel verso di  $\boldsymbol{\tau}$ , vedrà la superficie  $\Sigma$  alla sua sinistra. Per controllare questo, basta verificare che il vettore  $\mathbf{v}$ , al pari di ciò che fa  $\boldsymbol{\nu}$  rispetto a  $\mathbf{t}$ , punta verso l'esterno di  $\Sigma$ . A questo scopo, osserviamo che in un generico punto  $\mathbf{u}_0 \in \partial T$  si ha, per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 - \varepsilon\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0) - \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_u(\mathbf{u}_0)\eta' + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_v(\mathbf{u}_0)\xi' + \mathbf{o}(\varepsilon) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0) - \varepsilon\mathbf{v} + \mathbf{o}(\varepsilon).$$

Dunque la distanza del punto  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0) - \varepsilon\mathbf{v}$  dal punto  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0)$ , il quale appartiene a  $\Sigma$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $\varepsilon$ : ciò mostra che  $-\mathbf{v}$  punta verso l'interno di  $\Sigma$  (altrimenti già la sua distanza da  $b\Sigma$ , che è minore di quella da  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 - \varepsilon\boldsymbol{\nu})$ , sarebbe infinitesima di ordine al più  $\varepsilon$ ). Ne segue che  $\mathbf{v}$  punta verso l'esterno di  $\Sigma$ .

In definitiva, se  $\boldsymbol{\gamma}$  percorre  $\partial T$  in verso antiorario, allora le orientazioni indotte da  $\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v$  su  $\Sigma$  e da  $(\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v) \circ \boldsymbol{\gamma}$  su  $b\Sigma$  sono coerenti; se invece  $\boldsymbol{\gamma}$  percorre  $\partial T$  in verso orario, allora le orientazioni indotte da  $\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v$  su  $\Sigma$  e da  $(\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v) \circ \boldsymbol{\gamma}$  su  $b\Sigma$  non sono coerenti.

Ricordiamo che se  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  è una funzione di classe  $C^1$  su un aperto  $B$  di  $\mathbb{R}^3$ , il rotore di  $\mathbf{F}$  è stato definito nell'osservazione 4.6.14:

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Vale allora il seguente risultato, detto teorema del rotore o teorema di Stokes, che è di grande importanza in fisica:

**Teorema 4.9.16 (di Stokes)** *Sia  $\Sigma = \sigma(T)$  una superficie regolare, semplice ed orientabile, con  $T = \bar{A}$ , ove  $A$  è un aperto connesso limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera di classe  $C^1$ . Supponiamo inoltre che le orientazioni indotte dal versore normale  $\mathbf{n}$  su  $\Sigma$  e dal versore tangente  $\boldsymbol{\tau}$  su  $b\Sigma$  siano coerenti. Allora per ogni  $\mathbf{F} = (P, Q, R) \in C^1(T, \mathbb{R}^3)$  vale la formula di Stokes*

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds.$$

Si noti che il secondo membro può essere scritto come integrale curvilineo  $\int_{+b\Sigma} \omega$ , ove  $+b\Sigma$  è la curva  $b\Sigma$  orientata positivamente e  $\omega$  è la 1-forma

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

**Dimostrazione** Introduciamo dapprima alcune ipotesi aggiuntive, che poi rimuoveremo. Supponiamo che  $\sigma$  sia di classe  $C^2$  e che  $\sigma(\partial T) = b\Sigma$ . Andiamo a dimostrare la formula di Stokes in questo caso speciale, cominciando con l'osservare che, come nell'osservazione 4.9.15,  $b\Sigma$  è una curva regolare chiusa, parametrizzata da

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \quad t \in [a, b],$$

ove  $\boldsymbol{\gamma}$  è una parametrizzazione di  $\partial T$  orientata nel verso antiorario (qui si fa uso della condizione  $\boldsymbol{\sigma}(\partial T) = b\Sigma$ ). Poniamo, per comodità,

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\xi(t), \eta(t)), \quad \boldsymbol{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

e denotiamo con  $\mathbf{t}$  e  $\boldsymbol{\nu}$  il versore tangente ed il versore normale esterno a  $\partial T$ . Dall'osservazione 4.9.15 segue che le orientazioni di  $\mathbf{n}$  su  $\Sigma$  e di  $\boldsymbol{\tau}$  su  $b\Sigma$  sono coerenti se e solo se il verso di percorrenza di  $\boldsymbol{\gamma}$  su  $\partial T$  è antiorario. Pertanto i versori  $\mathbf{t}$  e  $\boldsymbol{\nu}$  sono dati da

$$\mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{\gamma}'}{|\boldsymbol{\gamma}'|_3} = \left( \frac{\xi'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}}, \frac{\eta'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}} \right),$$

$$\boldsymbol{\nu} = \left( \frac{\eta'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}}, \frac{-\xi'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\xi'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}} \\ \frac{\eta'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{t},$$

ove si è posto  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; osserviamo che  $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}$ .

Per semplicità di notazione, data una generica funzione  $G$  (scalare o vettoriale) di tre variabili, denotiamo con  $\bar{G}$  la funzione composta  $G \circ \boldsymbol{\sigma}$ . Allora, per il secondo membro

della formula di Stokes si ha, grazie al teorema della divergenza (teorema 4.8.4) applicato al dominio  $T$ ,

$$\begin{aligned} \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds &= \int_a^b \langle \bar{\mathbf{F}} \circ \boldsymbol{\gamma}, (\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\gamma})' \rangle_3 dt = \int_a^b \langle \bar{\mathbf{F}} \circ \boldsymbol{\gamma}, [(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) \circ \boldsymbol{\gamma}] \boldsymbol{\gamma}' \rangle_3 dt = \\ &= \int_a^b \langle [(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) \circ \boldsymbol{\gamma}]^t \bar{\mathbf{F}} \circ \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle_2 dt = \int_{\partial T} \langle [\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}]^t \bar{\mathbf{F}}, \mathbf{t} \rangle_2 ds = \\ &= \int_{\partial T} \langle [\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}]^t \bar{\mathbf{F}}, \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\nu} \rangle_2 ds = \int_{\partial T} \langle \mathbf{A}[\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}]^t \bar{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\nu} \rangle_2 ds = \int_T \operatorname{div}(\mathbf{A}[\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}]^t \bar{\mathbf{F}}) dudv. \end{aligned}$$

Calcoliamo la divergenza che compare all'ultimo membro (qui si usa il fatto che  $\boldsymbol{\sigma} \in C^2$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A}[\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}]^t \bar{\mathbf{F}}) &= \operatorname{div} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P} \\ \bar{Q} \\ \bar{R} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \operatorname{div} \left[ \begin{pmatrix} x_v & y_v & z_v \\ -x_u & -y_u & -z_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P} \\ \bar{Q} \\ \bar{R} \end{pmatrix} \right] = \frac{\partial}{\partial u} \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \bar{\mathbf{F}} \rangle_3 - \frac{\partial}{\partial v} \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \bar{\mathbf{F}} \rangle_3 = \\ &= \langle \boldsymbol{\sigma}_{vu}, \bar{\mathbf{F}} \rangle_3 + \langle \boldsymbol{\sigma}_v, (\overline{\mathbf{D}\mathbf{F}}) \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_3 - \langle \boldsymbol{\sigma}_{uv}, \bar{\mathbf{F}} \rangle_3 - \langle \boldsymbol{\sigma}_u, (\overline{\mathbf{D}\mathbf{F}}) \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 = \langle (\overline{\mathbf{D}\mathbf{F}} - [\overline{\mathbf{D}\mathbf{F}}]^t) \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3. \end{aligned}$$

Notiamo adesso che

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{F} - [\mathbf{D}\mathbf{F}]^t &= \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & P_y - Q_x & P_z - R_x \\ Q_x - P_y & 0 & Q_z - R_y \\ R_x - P_z & R_y - Q_z & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle (\overline{\mathbf{D}\mathbf{F}} - [\overline{\mathbf{D}\mathbf{F}}]^t) \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 &= \begin{pmatrix} (\bar{P}_y - \bar{Q}_x) y_u + (\bar{P}_z - \bar{R}_x) z_u \\ (\bar{Q}_x - \bar{P}_y) x_u + (\bar{Q}_z - \bar{R}_y) z_u \\ (\bar{R}_x - \bar{P}_z) x_u + (\bar{R}_y - \bar{Q}_z) y_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \\ &= (\bar{P}_y - \bar{Q}_x)(y_u x_v - x_u y_v) + (\bar{P}_z - \bar{R}_x)(z_u x_v - x_u z_v) + (\bar{Q}_z - \bar{R}_y)(z_u y_v - y_u z_v) = \\ &= (\bar{R}_y - \bar{Q}_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (\bar{P}_z - \bar{R}_x)(z_u x_v - x_u z_v) + (\bar{Q}_x - \bar{P}_y)(x_u y_v - y_u x_v) = \\ &= \langle \overline{\mathbf{rot F}}, \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3. \end{aligned}$$

Dunque si conclude che

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds = \int_T \operatorname{div}(\mathbf{A}[\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}]^t \bar{\mathbf{F}}) dudv = \int_T \langle \overline{\mathbf{rot F}}, \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 dudv = \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot F}, \mathbf{n} \rangle_3 ds,$$

e ciò prova la tesi nel caso speciale in cui  $\sigma$  è di classe  $C^2$  e  $\sigma(\partial T) = b\Sigma$ .

Per provare la tesi nel caso  $\sigma \in C^1$ , basta estendere  $\sigma$  in modo continuo ad un aperto contenente  $\bar{A}$ , e considerare una successione  $\{\sigma_n\}$  di superfici regolari di classe  $C^2$ , definite su  $T$ , che convergano a  $\sigma$  rispetto alla norma  $C^1$ : ad esempio, opportune convoluzioni  $\sigma \star \varphi_\varepsilon$  con  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  (proposizione 3.15.20). La formula di Stokes, scritta per  $\Sigma_n = \sigma_n(T)$ , coinvolge integrali su  $\Sigma_n$  e su  $b\Sigma_n$ , nei quali si può passare al limite, visto che coinvolgono solo  $\sigma$  e le sue derivate prime.

Per rimuovere l'ipotesi  $\sigma = b\Sigma$  occorre un po' più di lavoro: per descrivere la superficie  $\Sigma$  non utilizzeremo più l'applicazione  $\sigma$ , bensì le parametrizzazioni locali fornite dalla definizione 4.9.13, che poi "incolleremo" mediante una partizione dell'unità (proposizione 3.15.22).

Per ogni  $\mathbf{x} \in \Sigma$  siano  $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^3$  l'intorno di  $\mathbf{x}$  e  $\eta_{\mathbf{x}}$  il diffeomorfismo definito in  $U \cap \Sigma$  a valori in  $B(\mathbf{0}, r)$  (se  $\mathbf{x} \in i\Sigma$ ) oppure in  $B_+(\mathbf{0}, r) := \{(x, y) \in B(\mathbf{0}, r) : y \geq 0\}$  (se  $\mathbf{x} \in b\Sigma$ ), che verificano la definizione 4.9.13. Poiché  $\Sigma$  è un compatto di  $\mathbb{R}^3$ , il ricoprimento  $\{U_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \Sigma}$  ha un sottoricoprimento finito  $\{U_{\mathbf{x}_1}, \dots, U_{\mathbf{x}_p}\}$ . Sia  $\{\psi_1, \dots, \psi_p\}$  una partizione dell'unità associata al ricoprimento  $\{U_1, \dots, U_p\}$ , ove per brevità abbiamo posto  $U_j = U_{\mathbf{x}_j}$ ; ricordiamo che  $\psi_j$  ha supporto compatto contenuto in  $U_j$  e che  $\sum_{j=1}^p \psi_j = 1$ . Inoltre

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^p (\Sigma \cap U_j);$$

ponendo  $\Sigma_j = \Sigma \cap U_j$  e  $\mathbf{g}_j = \eta_j^{-1}$ , la superficie  $\Sigma_j$  è parametrizzata da

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}_j(u, v), \quad (u, v) \in B_j, \quad \text{ove } B_j = \begin{cases} B(\mathbf{0}, r) & \text{se } \mathbf{x}_j \in i\Sigma \\ B_+(\mathbf{0}, r) & \text{se } \mathbf{x}_j \in b\Sigma. \end{cases}$$

Inoltre, detta  $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , una qualunque parametrizzazione della frontiera di  $B_j$ , la quale nel caso  $\mathbf{x}_j \in b\Sigma$  è una curva regolare a tratti, il bordo  $b\Sigma_j = \mathbf{g}_j(\partial B_j)$  è parametrizzato da

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}_j(\gamma(t)), \quad t \in [a, b].$$

È chiaro che  $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^p \psi_j \mathbf{F}$ , ed inoltre

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{rot} \sum_{j=1}^p (\psi_j \mathbf{F}) = \sum_{j=1}^p \mathbf{rot} (\psi_j \mathbf{F});$$

dunque, avendo ciascuna  $\psi_j$  supporto compatto in  $U_j$ ,

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \sum_{j=1}^p \int_{\Sigma_j} \langle \mathbf{rot} (\psi_j \mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle_3 ds.$$

D'altra parte, si ha ovviamente

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds = \sum_{j=1}^p \int_{b\Sigma_j} \langle \psi_j \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds$$

e, sfruttando nuovamente il fatto che ciascuna  $\psi_j$  ha supporto compatto in  $U_j$ ,

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds = \sum_{j=1}^p \int_{b\Sigma \cap U_j} \langle \psi_j \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds,$$

ove naturalmente sono nulli tutti gli addendi  $j$  tali che  $\mathbf{x}_j \in i\Sigma$ , per i quali  $b\Sigma \cap U_j = \emptyset$ . D'altronde ciascuna  $\psi_j$  è certamente nulla su  $b\Sigma_j \setminus b\Sigma = \partial U_j \cap i\Sigma$ : quindi nell'ultima somma possiamo rimpiazzare  $b\Sigma \cap U_j$  con  $b\Sigma_j$ , ottenendo

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds = \sum_{j=1}^p \int_{b\Sigma_j} \langle \psi_j \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds.$$

La formula di Stokes nel caso generale si riduce quindi a

$$\sum_{j=1}^p \int_{\Sigma_j} \langle \mathbf{rot}(\psi_j \mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle_3 ds = \sum_{j=1}^p \int_{b\Sigma_j} \langle \psi_j \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds,$$

e per provarla è naturalmente sufficiente mostrare che

$$\int_{\Sigma_j} \langle \mathbf{rot}(\psi_j \mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_{b\Sigma_j} \langle \psi_j \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds, \quad j = 1, \dots, p.$$

Ma questa relazione è conseguenza dell'argomentazione svolta nel caso speciale: la tesi è dunque completamente dimostrata.  $\square$

**Osservazione 4.9.17** Nella formula di Stokes si può supporre che la superficie  $\sigma$  sia solo una superficie di classe  $C^1$  a tratti, definita su un dominio  $T$ , chiusura di un aperto limitato e connesso  $A$ , con frontiera  $\partial T$  di classe  $C^1$  a tratti:  $T$  potrebbe dunque essere un insieme normale. Per provare la formula in questo caso, basterà applicare la formula in ogni "tratto"  $\Sigma_j$  di classe  $C^1$ , e poi sommare membro a membro.

Completiamo questo paragrafo limitandoci ad enunciare il teorema della divergenza in  $\mathbb{R}^3$ . Questo per due ragioni: la prima è che la dimostrazione ricalca, con qualche complicazione formale in più, quella del teorema 4.8.1; la seconda è che di questo teorema daremo una versione  $N$ -dimensionale in un paragrafo successivo.

**Teorema 4.9.18** *Sia  $A$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^3$  con frontiera di classe  $C^1$ , e sia  $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ . Allora*

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int_{\partial A} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 ds,$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale esterno a  $\partial A$ .  $\square$

## Campi conservativi, irrotazionali, indivergenti

Se  $A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^3$ , un *campo vettoriale* su  $A$  è una funzione  $\mathbf{u} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua. Noi considereremo campi vettoriali che siano almeno di classe  $C^1$ .

**Definizione 4.9.19** Sia  $\mathbf{u} \in C^1(A)$  un campo vettoriale. Diciamo che  $\mathbf{u}$  è indivergente se  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , irrotazionale se  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , conservativo se esiste una funzione  $F \in C^2(A)$ , detta potenziale, tale che  $\nabla F = \mathbf{u}$  in  $A$ .

Ovviamente, un campo vettoriale  $\mathbf{u} \in C^1(A)$  è conservativo con potenziale  $F$  se e solo se la 1-forma  $u^1 dx + u^2 dy + u^3 dz$  è esatta in  $A$  con primitiva  $F$ . Inoltre, il lavoro compiuto da un campo  $\mathbf{u}$  lungo una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  è il lavoro compiuto dalla 1-forma  $u^1 dx + u^2 dy + u^3 dz$  lungo  $\Gamma$ .

Andiamo ad analizzare le interrelazioni fra le tre proprietà di un campo vettoriale sopra introdotte, tutte fondamentali in fisica, completando ed integrando le osservazioni fatte qua e là in precedenza.

**Teorema 4.9.20** Ogni campo conservativo in un aperto connesso  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  è irrotazionale; viceversa, se  $A$  è semplicemente connesso allora ogni campo irrotazionale è conservativo.

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Con calcolo diretto si vede che  $\operatorname{rot} \nabla F = \mathbf{0}$ .

( $\impliedby$ ) Proviamo che la 1-forma  $\omega = u^1 dx + u^2 dy + u^3 dz$  è esatta in  $A$ . Data una qualsiasi curva regolare chiusa  $\Gamma \subset A$ , per ipotesi essa è omotopa ad una costante. Detta  $\mathbf{G}$  l'omotopia, l'immagine di  $\mathbf{G}$  è una superficie regolare, contenuta in  $A$ , che ha  $\Gamma$  come bordo: utilizzando il teorema di Stokes, dal fatto che  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$  si deduce che l'integrale curvilineo  $\int_{+\Gamma} \omega$  è nullo. Ne segue, per il teorema 4.6.6, che  $\omega$  è esatta. Dunque esiste una primitiva  $F$  di  $\omega$  e pertanto  $\nabla F = \mathbf{u}$ .  $\square$

**Definizione 4.9.21** Sia  $\mathbf{u}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  in un aperto connesso  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ , e sia  $\Sigma \subset A$  una superficie chiusa regolare a tratti. Il flusso di  $\mathbf{u}$  uscente da  $\Sigma$  è il numero

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds,$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale esterno a  $\Sigma$ . Diciamo in particolare che  $\mathbf{u}$  è solenoidale, se per ogni superficie chiusa regolare a tratti  $\Sigma \subset A$  il flusso uscente da  $\Sigma$  è nullo.

Si ha allora:

**Teorema 4.9.22** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\mathbf{u} \in C^1(A)$  un campo vettoriale. Se  $\mathbf{u}$  è solenoidale, allora  $\mathbf{u}$  è indivergente.

**Dimostrazione** Se in un punto  $\mathbf{x}_0$  si avesse ad esempio  $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) > 0$ , per continuità varrebbe la stessa relazione in una palla  $B(\mathbf{x}_0, r)$  contenuta in  $A$ : ma allora per il teorema 4.9.18 non sarebbe nullo il flusso uscente da  $\partial B(\mathbf{x}_0, r)$ , il che contraddice l'ipotesi che  $\mathbf{u}$  sia solenoidale.  $\square$

**Osservazione 4.9.23** Il viceversa dell'enunciato precedente è falso: il campo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^3}, \quad r = |\mathbf{x}|_3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

è indivergente, come si verifica facilmente, e tuttavia se  $\Sigma$  è la superficie sferica di centro  $\mathbf{0}$  e raggio  $\delta$  si ha

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = 4\pi \neq 0;$$

quindi  $\mathbf{u}$  non è solenoidale.

Sotto ipotesi geometriche sull'aperto  $A$ , tuttavia, il teorema 4.9.22 si può invertire: premettiamo a questo scopo una definizione.

**Definizione 4.9.24** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Diciamo che  $A$  è superficialmente connesso se ogni superficie chiusa  $\Sigma \subset A$  è omotopa a una costante.*

Ad esempio,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  è semplicemente connesso ma non superficialmente connesso; gli insiemi convessi e gli insiemi stellati sono superficialmente e semplicemente connessi;  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  è superficialmente connesso ma non semplicemente connesso.

Vale allora:

**Teorema 4.9.25** *Sia  $A$  un aperto superficialmente connesso di  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $\mathbf{u} \in C^1(A)$  un campo vettoriale indivergente; allora  $\mathbf{u}$  è solenoidale.*

**Dimostrazione** Sia  $\Sigma$  una superficie chiusa regolare a tratti contenuta in  $A$ . Per ipotesi, la regione  $D$  interna a  $\Sigma$  è un aperto con frontiera regolare a tratti tale che  $\overline{D} \subset A$ . Dunque, per il teorema della divergenza,

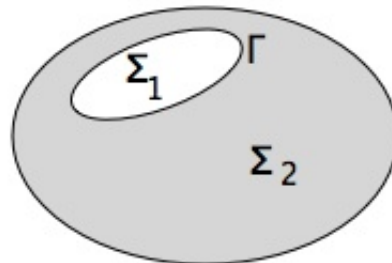
$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_D 0 d\mathbf{x} = 0. \quad \square$$

Vediamo infine come sono fatti i campi vettoriali  $\mathbf{u}$  descritti da un rotore, cioè tali che esista  $\mathbf{G} \in C^2(A)$  per cui  $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ . Tale  $\mathbf{G}$ , se esiste, è chiamato *potenziale vettore*.

**Teorema 4.9.26** *Ogni campo descritto da un rotore è indivergente e solenoidale.*

**Dimostrazione** Sia  $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ , con  $\mathbf{G}$  campo di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ . Con un calcolo diretto si vede che  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$ .

Dimostreremo la seconda implicazione solo nel caso particolare in cui la superficie  $\Sigma \subset A$  sia diffeomorfa ad una sfera: il caso generale è ben più intricato. Fissiamo una curva semplice e chiusa  $\Gamma$  contenuta in  $\Sigma$ : questa curva divide  $\Sigma$  in due sottosuperfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , entrambe regolari ed orientabili, con bordo  $b\Sigma_1 = b\Sigma_2 = \Gamma$ . Si ha allora, naturalmente,



$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_{\Sigma_1} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds + \int_{\Sigma_2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds.$$

D'altra parte le orientazioni su  $\Gamma$  coerenti con l'orientazione di  $\Sigma_1$  e con quella di  $\Sigma_2$  sono opposte: quindi applicando il teorema di Stokes si ottiene

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot} \mathbf{G}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_{+\Gamma} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds + \int_{-\Gamma} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 ds = 0.$$

Dunque  $\mathbf{u}$  è solenoidale.

Naturalmente, sempre sotto l'ipotesi semplificativa sopra scritta, detta  $E$  la regione della quale  $\Sigma$  costituisce il bordo, si poteva ottenere drettamente la tesi tramite il teorema della divergenza:

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_{\partial E} \langle \mathbf{rot} \mathbf{G}, \mathbf{n} \rangle_3 ds = \int_E \operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{G} d\mathbf{x} = \int_E 0 d\mathbf{x} = 0. \quad \square$$

Sotto ipotesi geometriche sull'aperto  $A$ , anche il teorema 4.9.26 si può invertire.

**Teorema 4.9.27** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  è un aperto sia superficialmente connesso, sia semplicemente connesso, allora ogni campo vettoriale  $\mathbf{u}$  indivergente o solenoidale è descritto da un rotore; inoltre i potenziali vettori  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{u}$  sono tutti e soli i campi della forma*

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \nabla F,$$

ove  $\mathbf{G}_0 \in C^2(A)$  è un particolare potenziale vettore di  $\mathbf{u}$  e  $F$  è un'arbitraria funzione reale appartenente a  $C^3(A)$ .

**Dimostrazione** Un campo  $\mathbf{u}$  di classe  $C^1$  in  $A$  è indivergente se e solo se è solenoidale, in virtù delle ipotesi su  $A$  e dei teoremi 4.9.22 e 4.9.25. Sia allora  $\mathbf{u}$  indivergente in  $A$ . Se  $\mathbf{G}_0 \in C^2(A)$  è un particolare potenziale vettore di  $\mathbf{u}$ , allora, fissata  $F \in C^3(A)$  e posto  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \nabla F$ , si ha  $\mathbf{rot} \mathbf{G} = \mathbf{rot} \mathbf{G}_0 + \mathbf{rot} \nabla F = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ ; viceversa, se  $\mathbf{G} \in C^2(A)$  verifica  $\mathbf{rot} \mathbf{G} = \mathbf{u}$ , allora  $\mathbf{G} - \mathbf{G}_0$  è un campo irrotazionale, e dunque, essendo  $A$  semplicemente connesso, dal teorema 4.9.20 segue che esiste  $F \in C^3(A)$  tale che  $\nabla F = \mathbf{G} - \mathbf{G}_0$ . Quindi  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \nabla F$ .

Mostriamo che un particolare potenziale vettore  $\mathbf{G}_0$  esiste, limitandoci al caso semplice in cui  $A$  è un parallelepipedo aperto: il caso generale è molto più complicato ed utilizza argomenti di algebra (si veda l'osservazione 4.15.10). Posto  $\mathbf{G}_0 = (X, Y, Z)$  e  $\mathbf{u} = (M, N, P)$ , dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} Z_y - Y_z = M \\ X_z - Z_x = N \\ Y_x - X_y = P. \end{cases}$$

Fissato  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ , cerchiamo una soluzione  $(X, Y, Z)$  che soddisfi per di più

$$Z \equiv 0, \quad Y(\cdot, \cdot, z_0) = 0, \quad X(\cdot, y_0, z_0) = 0.$$

Le equazioni del sistema diventano

$$Y_z = -M, \quad X_z = N, \quad Y_x - X_y = P,$$



e dunque

$$Y(x, y, z) = - \int_{z_0}^z M(x, y, t) dt, \quad X(x, y, z) = \int_{z_0}^z N(x, y, t) dt + \psi(x, y),$$

con  $\psi$  arbitraria funzione di classe  $C^2$  tale che  $\psi(x, y_0) = 0$ . Sostituendo queste relazioni nell'equazione  $Y_x - X_y = P$ , e ricordando che  $\operatorname{div} \mathbf{u} = M_x + N_y + P_z = 0$ , si ottiene  $\psi_y(x, y) = -P(x, y, z_0)$  e dunque

$$\psi(x, y) = - \int_{y_0}^y P(x, s, z_0) ds.$$

In conclusione, la soluzione particolare è

$$\mathbf{G}_0(x, y, z) = \left( \int_{z_0}^z N(x, y, t) dt - \int_{y_0}^y P(x, s, z_0) ds, - \int_{z_0}^z M(x, y, t) dt, 0 \right);$$

essa è certamente definita in  $A$ , essendo  $A$  un parallelepipedo.  $\square$

## Esercizi 4.9

1. Verificare che le linee coordinate di una superficie  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(k, v)$ ,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(u, h)$  ( $k, h$  costanti) si tagliano secondo un angolo  $\vartheta$  tale che

$$\cos \vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

2. (*Superfici cartesiane*) Una superficie cartesiana (esempio 4.9.2) è il grafico di una funzione  $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f$  è di classe  $C^1$ , si provi che la superficie è regolare, e si mostri che la sua area è

$$\int_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

3. (*Superfici rigate*) Una superficie è *rigata* se è generata da una famiglia di rette dipendente da un parametro. Se  $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva regolare e  $\boldsymbol{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'altra curva regolare tale che  $\boldsymbol{\psi}(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in [a, b]$ , si dimostri che la superficie

$$\boldsymbol{\sigma}(t, u) = \boldsymbol{\varphi}(t) + u\boldsymbol{\psi}(t), \quad t \in [a, b], \quad u \in \mathbb{R},$$

è rigata, e che essa è regolare se e solo se

$$[\boldsymbol{\varphi}'(t) + u\boldsymbol{\psi}'(t)] \times \boldsymbol{\psi}(t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

4. Si provi che i cilindri e i coni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

sono superfici rigate, e che il paraboloido iperbolico  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  e l'iperboloido ad una falda  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  sono superfici *doppiamente rigate*, ossia sono rigate rispetto a due distinte famiglie di rette.

5. Si consideri la curva piana  $\vartheta = \ln t$ ,  $\varphi = \arctan t$ ,  $t > 0$ , e sia  $\boldsymbol{\psi}(t)$  l'immagine di questa curva sulla superficie sferica

$$\boldsymbol{\sigma}(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Si provi che l'angolo fra  $\boldsymbol{\psi}(t)$  e i meridiani (cioè le linee coordinate  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(\vartheta, k)$  con  $k$  costante) è uguale a  $\pi/4$  per ogni  $t > 0$ .

6. Determinare la prima forma fondamentale per le seguenti superfici:

- (i) (*piano*):  $ax + by + cz = d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ );
- (ii) (*cilindro*):  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- (iii) (*elicoide*):  $x = t \cos \vartheta$ ,  $y = t \sin \vartheta$ ,  $z = a\vartheta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ ;
- (iv) (*ellissoide*):  $x = a \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $z = c \cos \vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  ( $abc \neq 0$ );
- (v) (*paraboloide iperbolico*):  $x = a u \cosh v$ ,  $y = b u \sinh v$ ,  $z = u^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  ( $ab \neq 0$ );
- (vi) (*paraboloide ellittico*):  $x = a u \cos v$ ,  $y = b u \sin v$ ,  $z = u^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  ( $ab \neq 0$ );
- (vii) (*iperboloide a una falda*):  $x = a \cosh u \cos v$ ,  $y = b \cosh u \sin v$ ,  $z = c \sinh v$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in \mathbb{R}$  ( $abc \neq 0$ );
- (viii) (*iperboloide a due falde*):  $x = a \cosh u \cosh v$ ,  $y = b \cosh u \sinh v$ ,  $z = c \sinh v$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  ( $abc \neq 0$ ).

7. Sia  $f$  una funzione continua e non negativa, definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , e sia  $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \rightarrow A$  una curva regolare. Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) = \boldsymbol{\varphi}(t), 0 \leq z \leq f(\boldsymbol{\varphi}(t)), t \in [a, b]\}.$$

8. Calcolare l'area delle seguenti superfici:

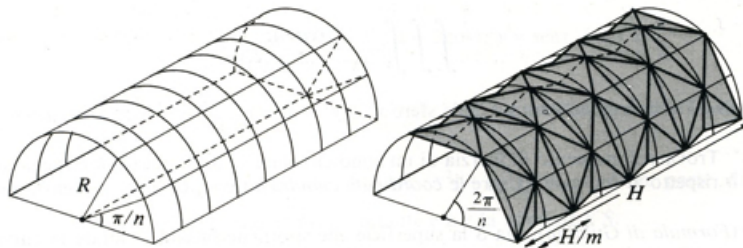
- (i) intersezione dei cilindri  $x^2 + y^2 = a^2$  e  $y^2 + z^2 = a^2$ , ove  $a > 0$ ;
- (ii) (*finestra di Viviani*)  $\Sigma$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ ,  $(x - r)^2 + y^2 \leq r^2$ , ove  $r > 0$ ;
- (iii)  $\Sigma$ :  $0 \leq y \leq 1/4$ ,  $z \geq 1 - y/4$ ,  $x^2 + z^2 = 1$ .

9. (*Superfici regolari a tratti*) Un insieme  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare a tratti se si ha  $\Sigma = \sigma(T)$ , con  $\sigma \in C^0(T, \mathbb{R}^3)$  e  $T = \overline{A}$ , ove  $A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$ , e se  $T$  è decomponibile in un numero finito di sottoinsiemi  $T_i = \overline{A_i}$ , ove gli  $A_i$  sono aperti connessi, disgiunti e tali che  $\sigma|_{T_i}$  sia una superficie regolare.

- (i) Si verifichi che  $\partial[0, 1]^2$  è una superficie regolare a tratti e la si parametrizzi.
- (ii) Si provi che il cilindro generato da una retta verticale che percorre la curva  $x = \cos \vartheta \sin 2\vartheta$ ,  $y = \sin \vartheta \sin 2\vartheta$ ,  $|\vartheta| \leq \pi/4$ , è una superficie regolare a tratti che si "autointerseca".

(iii) Si estenda la nozione di area alle superfici regolari a tratti.

10. (*Esempio di Schwarz*) Dato un cilindro retto di altezza  $H$  e raggio  $R$ , dividiamo l'asse in  $m$  parti uguali; dividiamo poi le  $m+1$  circonferenze perpendicolari all'asse, di quote  $0, \frac{H}{m}, \dots, \frac{(m-1)H}{m}, H$  in  $n$  parti uguali, in modo che la parallela all'asse che tocca i punti di divisione su una data circonferenza attraversi la circonferenza precedente e quella successiva nel punto medio di un arco.



La superficie poliedrica  $\Sigma_{mn}$ , i cui spigoli sono le corde di tali archi e i segmenti che uniscono i punti di divisione di una circonferenza con i punti di divisione adiacenti delle circonferenze precedente e successiva, ha come facce dei triangoli isosceli tutti uguali.

(i) Si provi che l'area di ogni faccia è

$$R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{H}{m}\right)^2}.$$

(ii) Si deduca che l'area dell'intera superficie poliedrica  $\Sigma_{mn}$  è

$$2mnR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{H}{m}\right)^2}.$$

(iii) Fissato  $q \in \mathbb{R}^+$ , si provi che risulta

$$a(\Sigma_{mn}) \rightarrow 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{q^2 R^2 \pi^4}{4}} \quad \text{se } \frac{m}{n^2} \rightarrow q,$$

e che quindi tale limite dipende dal numero arbitrario  $q$ .

(iv) Si dimostri che

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}^+} a(\Sigma_{mn}) = +\infty.$$

11. Calcolare l'area di  $\Sigma$ , ove

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z = 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}\}.$$

12. (*Teorema di Pappo-Guldino*) Provare che l'area di una superficie di rotazione si ottiene moltiplicando la lunghezza della curva piana generatrice  $\Gamma$  per la lunghezza della circonferenza descritta dal *baricentro* di  $\Gamma$ , che è il punto di coordinate

$$\left( \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \, ds, \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} y \, ds, \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} z \, ds \right).$$

13. Determinare le aree delle superfici  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_3$  ottenute ruotando l'arco di cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , attorno all'asse  $x$ , attorno all'asse  $y$  ed attorno alla retta  $x = \pi a$ .

14. Calcolare l'area del grafico della funzione  $(x, y) \mapsto \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1/4$ .

15. Calcolare l'area delle superfici che si ottengono ruotando la parabola

$$x = -t, \quad y = 4 \left( a - \frac{t^2}{a} \right), \quad t \in [0, a]$$

attorno all'asse  $x$  ed attorno all'asse  $y$ .

16. Sia  $\Sigma$  una superficie regolare tale che

$$I(u, v)[h, k] = h^2 + f(u, v)k^2 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Si provi che, fissate due costanti  $k_1, k_2$ , gli archi lungo le linee coordinate  $\mathbf{x} = \sigma(u, h)$ ,  $h$  costante, delimitati dalle linee coordinate  $\mathbf{x} = \sigma(k_1, v)$  e  $\mathbf{x} = \sigma(k_2, v)$ , hanno tutti ugual lunghezza.

17. Determinare il momento di inerzia rispetto all'asse  $z$  della superficie  $\Sigma$  data dalla parte del grafico di  $f(x, y) = xy$  che è interna al cilindro  $x^2 + y^2 = 8$ .

18. Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{ds}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}},$$

dove  $\Sigma$  è la parte della semisfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ , la cui proiezione sul piano  $xy$  è il trapezio di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\frac{3}{5}, 0)$  e  $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ .

19. Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{z^2}{[(x^2 + y^2)^2 + z^4]^{1/2}} ds,$$

ove  $\Sigma$  è ottenuta ruotando attorno all'asse  $z$  la curva del piano  $xz$  di equazione  $z = \frac{x}{1-x}$ ,  $x \in [0, \frac{10}{11}]$ .

20. Calcolare

$$\int_{\Sigma} x \sqrt{2x^2 + 2y^2 + z^2} ds,$$

ove  $\Sigma$  è la superficie ottenuta proiettando dall'origine di  $\mathbb{R}^3$  l'elica cilindrica  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

21. Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{xz \ln y}{y} ds,$$

ove  $\Sigma$  è la parte del toro di equazione  $z^2 + \left( \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$  contenuta in  $\{(x, y, z) : z \geq 0, y \geq x \geq 0\}$ .

22. Calcolare  $\int_{\Sigma} x^2 y \, ds$ , ove  $\Sigma$  è il triangolo di vertici  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .
23. Calcolare  $\int_{\Sigma} |z| \, ds$ , ove  $\Sigma$  è la parte del cilindro  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  interna alla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .
24. Calcolare  $\int_{\Sigma} y \, ds$ , ove  $\Sigma$  è l'unione della congiungente il punto  $(0, 0, 2)$  con la curva  $\Gamma = \{(x, y) : x = 1 - y^2, |y| \leq 1\}$ .
25. Determinare il momento d'inerzia rispetto al piano  $y = 0$  della superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) : x, y > 0, x^2 + y^2 \in [1, 2], z = \arctan \frac{y}{x}\}$ .
26. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse  $z$  della parte di iperboloide  $\Sigma = \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z \in [0, \sqrt{10}]\}$ .
27. Sia  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x, 1)$ . Si verifichi la formula di Stokes, calcolandone i due membri, nel caso in cui  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  e  $\Sigma$  e  $b\Sigma$  sono orientati positivamente.
28. Sia  $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^{-y}, z, y)$ . Calcolare  $\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, ds$  quando:
- (i)  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , con orientazione data dal vettore normale esterno;
  - (ii)  $\Sigma$  è il quadrato di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\sqrt{2} \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \sqrt{2} \mathbf{e}_3$ , orientato secondo il vettore normale  $\boldsymbol{\nu}$  con  $\nu_x > 0$ ;
  - (iii)  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 \leq 1\}$ , orientato secondo il vettore normale  $\boldsymbol{\nu}$  con  $\nu_y > 0$ .
29. Per ogni  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{u}(x, y) = \left( \frac{f(x)y^2}{x} + 5y^2, -y \cos x + 10xy \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Stabilire se esiste  $f$  tale che  $\mathbf{u}$  sia conservativo, ed in tal caso calcolarne un potenziale.

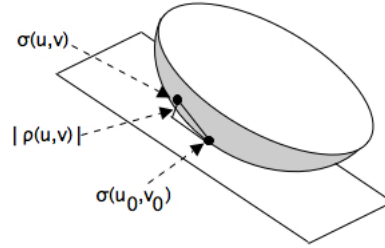
30. Sia
- $$\mathbf{u}(x, y) = \left( 3x^2 + \frac{2y^2}{1+x^2y^2}, 3 + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
- (a) Verificare se risulta  $(u^1)_y(x, y) = (u^2)_x(x, y)$ ;
  - (b) stabilire se  $\mathbf{u}$  è conservativo, ed in tal caso calcolarne un potenziale;
  - (c) calcolare il lavoro compiuto da  $\mathbf{u}$  lungo la metà superiore dell'ellisse di equazione  $x^2 + 4y^2 = 4$ , percorsa con verso antiorario.
31. Si verifichi che il campo vettoriale  $(-2y^2 3z, 2x, 2y)$  è indivergente in  $\mathbb{R}^3$ , e se ne costruisca un potenziale vettore  $\mathbf{F}$ .

## 4.10 Geometria delle superfici

Cominciamo ad analizzare le proprietà geometriche delle superfici di  $\mathbb{R}^3$  andando a valutare la deviazione di una superficie regolare dal suo piano tangente in un punto. Nelle usuali notazioni, sia  $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(T)$  una superficie regolare di classe  $C^2$ ; indichiamo con  $\rho(u, v)$  la “distanza con segno” di  $\boldsymbol{\sigma}(u, v)$  dal piano tangente a  $\Sigma$  in  $\boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0)$ , vale a dire

$$\rho(u, v) = \langle \boldsymbol{\sigma}(u, v) - \boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0), \mathbf{n}(u_0, v_0) \rangle_3,$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale riferito ad una fissata orientazione (locale) di  $\Sigma$ : dunque la quantità  $\rho(u, v)$  è positiva o negativa a seconda che  $\boldsymbol{\sigma}(u, v)$  appartenga al semispazio individuato da  $\mathbf{n}(u_0, v_0)$  o a quello individuato da  $-\mathbf{n}(u_0, v_0)$ .



Utilizzando la formula di Taylor arrestata al secondo ordine, e ricordando che i vettori  $\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0)$  e  $\boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0)$  sono ortogonali a  $\mathbf{n}(u_0, v_0)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \rho(u, v) = & \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2\boldsymbol{\sigma}_{uv}(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + \\ & + \boldsymbol{\sigma}_{vv}(u_0, v_0)(v - v_0)^2, \mathbf{n}(u_0, v_0) \rangle_3 + \mathbf{o}((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2). \end{aligned}$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, la quantità  $\rho(u, v)$  per  $(u, v)$  vicino a  $(u_0, v_0)$  è determinata dal comportamento della forma quadratica

$$II(h, k) = L(u_0, v_0)h^2 + 2M(u_0, v_0)hk + N(u_0, v_0)k^2,$$

ove

$$L = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}, \mathbf{n} \rangle_3, \quad M = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uv}, \mathbf{n} \rangle_3, \quad N = \langle \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \mathbf{n} \rangle_3.$$

Essa si chiama *seconda forma fondamentale* associata alla superficie  $\Sigma$ . La natura di questa forma quadratica ci dice come è fatta qualitativamente la superficie in un intorno di  $\boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0)$ , come tra poco vedremo.

**Osservazione 4.10.1** Il significato geometrico della seconda forma fondamentale ci convince che essa deve essere invariante per cambiamenti di parametri che conservino l’orientazione di  $\mathbf{n}$ , cioè aventi determinante Jacobiano positivo, nello stesso senso in cui era invariante la prima forma fondamentale, in quel caso anche a prescindere dal segno del determinante. Precisamente, sia  $(u, v) = \mathbf{p}(q, r)$  un diffeomorfismo con  $J_{\mathbf{p}}(q, r) > 0$ , e poniamo  $\boldsymbol{\eta}(q, r) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}(q, r))$ : allora, se  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\sigma}(u(t), v(t))$  è una curva giacente su  $\Sigma$  e  $(q(t), r(t)) = \mathbf{p}^{-1}(u(t), v(t))$ , cosicché la curva  $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\eta}(q(t), r(t))$  è  $C^2$ -equivalente a  $\boldsymbol{\varphi}$ , allora risulta

$$II_{\boldsymbol{\sigma}}(u'(t), v'(t)) = II_{\boldsymbol{\eta}}(q'(t), r'(t)),$$

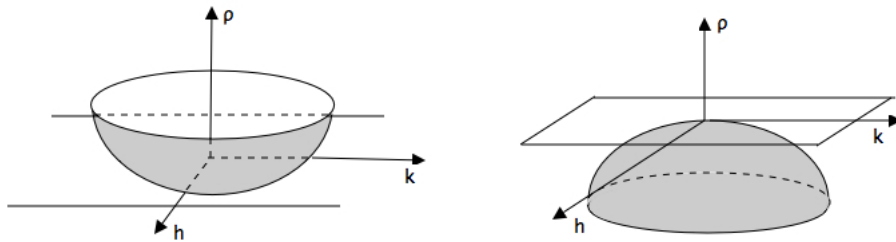
ove con  $II_{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $II_{\boldsymbol{\eta}}$  abbiamo indicato la seconda forma fondamentale calcolata nello stesso punto  $\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}(u(t), v(t)) = \boldsymbol{\eta}(q(t), r(t))$  ma riferita rispettivamente alle parametrizzazioni  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\eta}$ . La noiosa verifica di questa uguaglianza è rinviata all’esercizio 4.10.3.

Il paraboloido dello spazio  $(h, k, \rho)$  di equazione

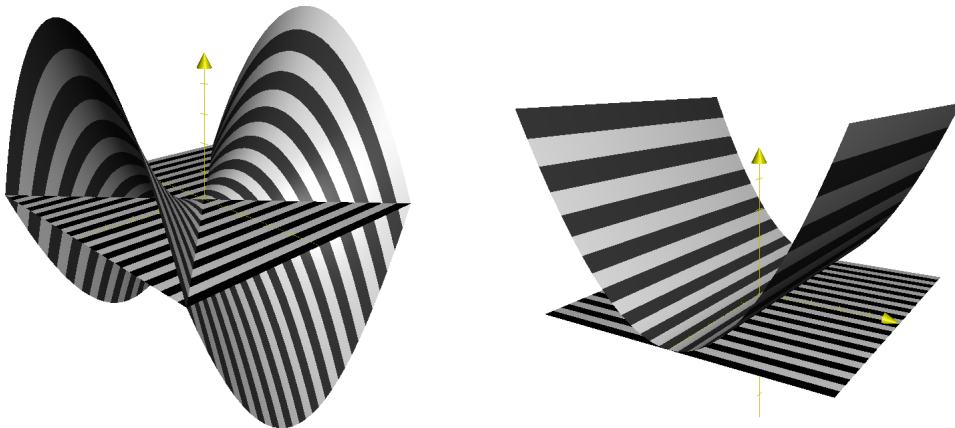
$$\rho = \frac{1}{2}II(h, k) = \frac{1}{2} [L(u_0, v_0)h^2 + 2M(u_0, v_0)hk + N(u_0, v_0)k^2]$$

si chiama *paraboloido osculatore* di  $\Sigma$  nel punto  $\sigma(u_0, v_0)$ . La geometria di esso, per  $(h, k)$  piccolo, corrisponde qualitativamente a quella di  $\Sigma$  nell'intorno di  $\sigma(u_0, v_0)$ . Distinguiamo quattro casi.

**Caso I :**  $LN - M^2 > 0$ . Il paraboloido è ellittico. Esso sta sopra al piano  $\rho = 0$  se  $L, N > 0$ , sta sotto se  $L, N < 0$ ; le curve di livello sono ellissi e dunque la superficie sta, localmente, tutta da un lato rispetto al piano tangente: precisamente, sta dal lato di  $\mathbf{n}$  se  $L, N > 0$ , dal lato di  $-\mathbf{n}$  se  $L, N < 0$ . Il punto  $\sigma(u_0, v_0)$  si dice *ellittico*.

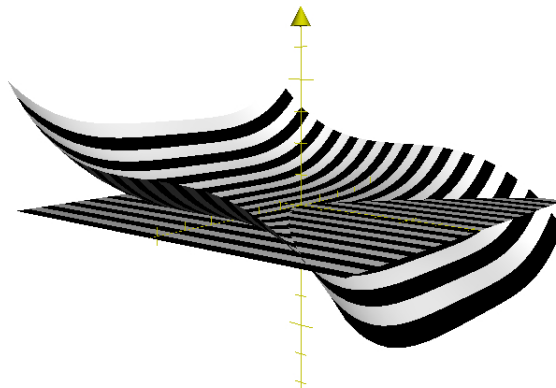


**Caso II:**  $LN - M^2 < 0$ . Il paraboloido è iperbolico. Esso attraversa il piano  $\rho = 0$  in due rette per l'origine che lo dividono in quattro regioni, nelle quali  $\rho$  ha segno alternativamente positivo e negativo; le curve di livello sono iperboli. La superficie sta, localmente, da entrambe le parti del suo piano tangente. Il punto  $\sigma(u_0, v_0)$  si dice *iperbolico*.



**Caso III:**  $LN - M^2 = 0, L, N \neq 0$ . Il paraboloido diventa un cilindro parabolico, sta da un lato rispetto al piano  $\rho = 0$  e lo tocca lungo una retta; le curve di livello sono rette parallele a tale retta. Il comportamento della superficie  $\Sigma$  intorno a  $\sigma(u_0, v_0)$  dipende dai termini di ordine superiore al secondo. Il punto  $\sigma(u_0, v_0)$  si dice *parabolico*.

**Caso IV:**  $L = M = N = 0$ . In questo caso il paraboloide degenera nel piano  $\rho = 0$ ; la seconda forma fondamentale è identicamente nulla in  $\sigma(u_0, v_0)$ , e il omportamento di  $\Sigma$  intorno a  $\sigma(u_0, v_0)$  dipende interamente dai termini di ordine superiore al secondo: la superficie comunque “si appiattisce” sul suo piano tangente. Il punto  $\sigma(u_0, v_0)$  si dice *planare*.



**Esempi 4.10.2 (1)** Per il toro, che ha equazioni parametriche

$$\sigma : \begin{cases} x = (a + b \cos \varphi) \cos \vartheta \\ y = (a + b \cos \varphi) \sin \vartheta \\ z = b \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

(con  $a, b > 0$ ), si ha

$$\sigma_{\varphi} = \begin{pmatrix} -b \sin \varphi \cos \vartheta \\ -b \sin \varphi \sin \vartheta \\ b \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta} = \begin{pmatrix} -(a + b \cos \varphi) \sin \vartheta \\ (a + b \cos \varphi) \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui, scegliendo ad esempio la normale diretta verso l'interno,

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Si ha poi

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -b \cos \varphi \cos \vartheta \\ -b \cos \varphi \sin \vartheta \\ -b \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\varphi\vartheta} = \begin{pmatrix} b \sin \varphi \sin \vartheta \\ -b \sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -(a + b \cos \varphi) \cos \vartheta \\ -(a + b \cos \varphi) \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$L = -b, \quad M = 0, \quad N = (a + b \cos \varphi) \cos \varphi.$$

Perciò

$$LN - M^2 = -b \cos \varphi (a + b \cos \varphi),$$

e il segno di tale quantità dipende dal segno di  $\cos \varphi$ : se  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  il punto corrispondente è ellittico e si trova sulla parte del toro rivolta verso l'esterno; se  $\varphi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  il punto corrispondente è iperbolico e sta sulla parte del toro rivolta all'interno, e infine se  $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$  il punto è parabolico e sta sui paralleli di quote massima e minima.



(2) Consideriamo una superficie cartesiana  $\Sigma = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$ , con  $f \in C^2(A)$ . Si ha allora

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{pmatrix},$$

quindi otteniamo

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}} \\ -\frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad \boldsymbol{\sigma}_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \boldsymbol{\sigma}_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}},$$

ed infine

$$LN - M^2 = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}}.$$

Dunque un punto  $(x, y, f(x, y))$  è ellittico, parabolico o iperbolico a seconda che il determinante della matrice Hessiana di  $f$  sia positivo, nullo o negativo: quindi, se  $f$  è strettamente convessa o strettamente concava in un intorno del punto, questo è ellittico. Nel caso in cui  $f_x = f_y = 0$  si ritrovano in particolare le condizioni affinché il punto sia di massimo relativo, di minimo relativo o di sella. Infine il punto è planare se e solo se tutte e tre le derivate seconde di  $f$  sono nulle in  $(x, y)$ .

## Curvatura normale

Sia  $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(T)$  una superficie regolare orientata di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo una curva  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\sigma}(u(t), v(t))$  giacente su  $\Sigma$  e parametrizziamola rispetto all'ascissa curvilinea  $s = \ell(t) = \int_0^t |\boldsymbol{\varphi}'(\tau)|_3 d\tau$ : definiamo  $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\sigma}(\alpha(s), \beta(s)) = \boldsymbol{\varphi}(\ell^{-1}(s)) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ . Indichiamo con  $\mathbf{T}(s)$  e  $\mathbf{N}(s)$  il versore tangente ed il versore normale principale alla curva  $\boldsymbol{\gamma}(s)$ , e con  $\mathbf{n}(s)$  il versore normale a  $\Sigma$ , tutti relativi al punto  $\boldsymbol{\gamma}(s)$ . Detto poi  $\vartheta(s)$ ,  $0 \leq \vartheta(s) \leq \pi$ , l'angolo fra  $\mathbf{N}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$ , avremo  $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{n}(s) \rangle_3 = \cos \vartheta(s)$ ; quindi dalle formule di Frénet-Serret ricaviamo

$$\langle \boldsymbol{\gamma}''(s), \mathbf{n}(s) \rangle_3 = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle_3 = k(s) \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{n}(s) \rangle_3 = k(s) \cos \vartheta(s),$$

ove  $k(s)$  è la curvatura di  $\boldsymbol{\gamma}$  nel punto  $\boldsymbol{\gamma}(s)$ . La quantità

$$k_{\mathbf{n}}(s) = k(s) \cos \vartheta(s)$$

si chiama *curvatura normale* di  $\boldsymbol{\gamma}$  nel punto  $\boldsymbol{\gamma}(s)$ : il motivo di questa denominazione sarà chiaro tra poco. Intanto esprimiamo la curvatura normale  $k_{\mathbf{n}}(s)$  in termini della prima e seconda forma fondamentale nel punto  $P = \boldsymbol{\gamma}(s)$ . Anzitutto, ripristinando il parametro  $t$ , si ha

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\gamma}(\ell(t)), \quad \boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{\gamma}'(\ell(t))\ell'(t), \quad \boldsymbol{\varphi}''(t) = \boldsymbol{\gamma}''(\ell(t))\ell'(t)^2 + \boldsymbol{\gamma}'(\ell(t))\ell''(t),$$

cioè

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{T}(\ell(t))|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_3, \quad \boldsymbol{\varphi}''(t) = \mathbf{T}'(\ell(t))|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_3 + \mathbf{T}(\ell(t))\frac{d}{dt}|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_3;$$

ne segue

$$\langle \boldsymbol{\varphi}'', \mathbf{n} \rangle_3 = \langle \mathbf{T}', \mathbf{n} \rangle_3 |\boldsymbol{\varphi}'|_3^2 = k_{\mathbf{n}} |\boldsymbol{\varphi}'|_3^2,$$

ossia, tenendo conto che  $\boldsymbol{\varphi}'' = \sigma_{uu}(u')^2 + 2\sigma_{uv}u'v' + \sigma_{vv}(v')^2$ ,

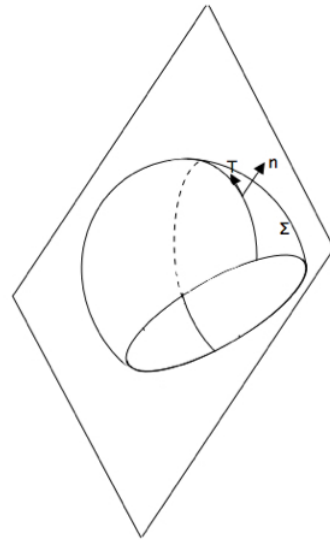
$$k_{\mathbf{n}} = \frac{\langle \boldsymbol{\varphi}'', \mathbf{n} \rangle_3}{|\boldsymbol{\varphi}'|_3^2} = \frac{II(\alpha', \beta')}{I(\alpha', \beta')}.$$

Dunque  $k_{\mathbf{n}}(s)$  dipende solo da  $\alpha'(s)$  e  $\beta'(s)$ , anzi dal loro rapporto, visto che  $k_{\mathbf{n}}$  è una funzione omogenea di grado 0. In definitiva,  $k_{\mathbf{n}}$  dipende solo dalla direzione di  $\mathbf{T} = \sigma_u u' + \sigma_v v'$  nel punto  $\mathbf{P} = \boldsymbol{\gamma}(s)$ . Questo fatto ha due conseguenze:

- (i) tutte le curve giacenti su  $\Sigma$  e passanti per  $\mathbf{P}$  con la stessa tangente hanno la medesima curvatura normale in  $\mathbf{P}$ ;
- (ii) tutte le curve giacenti su  $\Sigma$  e passanti per  $\mathbf{P}$  con la stessa tangente e lo stesso piano osculatore hanno la medesima curvatura in  $\mathbf{P}$ , purché il piano osculatore non sia tangente a  $\Sigma$  in  $\mathbf{P}$ : infatti per due di tali curve coincidono sia  $\mathbf{T}$  che  $\mathbf{N}$ , quindi coincidono sia  $k_{\mathbf{n}}$  che  $\cos \vartheta$ : quindi coincide anche la curvatura  $k = \frac{k_{\mathbf{n}}}{\cos \vartheta}$ , purché sia  $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ .

Pertanto possiamo parlare di *curvatura normale* in un punto  $\mathbf{P} \in \Sigma$  secondo una data direzione  $\mathbf{t}$  tangente a  $\Sigma$  in  $\mathbf{P}$ : essa, denotata con  $k_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ , sarà la curvatura normale in  $\mathbf{P}$  di una qualunque curva giacente su  $\Sigma$  e passante per  $\mathbf{P}$  con vettore tangente uguale a  $\mathbf{t}$ .

In particolare, fissata una direzione tangente  $\mathbf{t}$  in  $\mathbf{P}$ , si può considerare la *sezione normale* a  $\Sigma$  in  $\mathbf{P}$  secondo la direzione  $\mathbf{t}$ , che è la curva intersezione di  $\Sigma$  con il piano contenente  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{N}(\mathbf{P})$ : per questa curva, che è piana, si ha  $\mathbf{N} = \pm \mathbf{n}$  in  $\mathbf{P}$ , cioè  $|\cos \vartheta| = 1$ . Dunque la curvatura normale  $k_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$  secondo la direzione  $\mathbf{t}$  coincide, a meno del segno, con la curvatura della sezione normale in tale direzione: di qui la denominazione.



**Osservazioni 4.10.3 (1)** La curvatura normale, essendo il rapporto fra la seconda e la prima forma fondamentale, è invariante per cambiamenti di parametri regolari che non mutino l'orientazione di  $\Sigma$ , mentre cambia segno se tale orientazione viene mutata.

**(2)** Dato che le linee coordinate  $v \mapsto \sigma(h, v)$  e  $u \mapsto \sigma(u, k)$  ( $h, k$  costanti) corrispondono alle direzioni di coefficienti  $(0, \beta')$  e  $(\alpha', 0)$  rispettivamente, si suole scrivere

$$k_{\mathbf{n}} = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)} = \frac{L du^2 + 2H dudv + N dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}.$$

Con questa scrittura si enfatizza il fatto che la curvatura normale è una quantità intrinsecamente legata a  $\Sigma$ ; essa varia al variare della direzione  $\mathbf{t}$ , tangente a  $\Sigma$ , che si sceglie, ed il corrispondente valore si ottiene sostituendo le coordinate di  $\mathbf{t}$  al posto dei “differenziali”  $du, dv$ .

**Esempi 4.10.4 (1)** Per la sfera  $B(\mathbf{0}, r)$  di  $\mathbb{R}^3$  i calcoli dell’esempio 4.9.2 ci dicono che

$$\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta);$$

inoltre

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ -r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\varphi} = \begin{pmatrix} -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

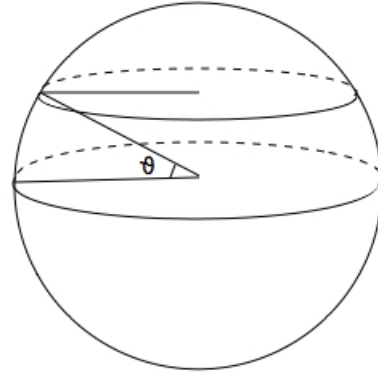
$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$L = -r, \quad M = 0, \quad N = -r \sin \vartheta.$$

Ne segue, come è giusto,

$$k_{\mathbf{n}} = \frac{II(d\vartheta, d\varphi)}{I(d\vartheta, d\varphi)} = \frac{-r d\vartheta^2 - r \sin^2 \vartheta d\varphi^2}{r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2} = -\frac{1}{r} :$$

infatti le sezioni normali sono cerchi massimi di curvatura  $1/r$ . Si noti che per un parallelo di latitudine  $\pm\vartheta$  si ha  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{n} \rangle_3 = \cos \vartheta$  e quindi la curvatura su tale parallelo è  $k = \frac{|k_{\mathbf{n}}|}{r \cos \vartheta} = \frac{1}{r \cos \vartheta}$ , in accordo col fatto che il raggio del parallelo è  $r \cos \vartheta$ .



**(2)** Per il toro, dai calcoli dell’esempio 4.10.2 (1) segue che

$$k_{\mathbf{n}} = \frac{b d\varphi^2 + (a + b \cos \varphi) \cos \varphi d\vartheta^2}{b^2 d\varphi^2 + (a + b \cos \varphi)^2 d\vartheta^2}.$$

Lungo i meridiani, cioè le linee coordinate in cui  $\vartheta$  è costante, si ha  $d\vartheta = 0$  e quindi  $k_{\mathbf{n}} = 1/b$  (e infatti tali linee sono sezioni normali e sono circonferenze di raggio  $b$ ); lungo i paralleli, cioè le linee coordinate in cui  $\varphi$  è costante, si ha  $d\varphi = 0$  e quindi  $k_{\mathbf{n}} = \frac{\cos \varphi}{a + b \cos \varphi}$  (e infatti si tratta di circonferenze di raggio  $a + b \cos \varphi$ , e l’angolo fra  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$  è proprio  $\varphi$ ).

**(3)** Per superfici cartesiane  $z = f(x, y)$ , i calcoli dell’esempio 4.10.2 (3) ci dicono che

$$k_{\mathbf{n}} = \frac{f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|_2^2} [(1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2]}.$$

## Curvature principali

Sia  $\Sigma = \sigma(T)$  una superficie regolare orientata di classe  $C^2$ . La curvatura normale in un punto  $\mathbf{P} \in \Sigma$  secondo le varie direzioni tangenti costituisce una funzione continua sull'insieme  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}}$  di tutti i versori tangenti a  $\Sigma$  in  $\mathbf{P}$ , il quale è un insieme compatto. Quindi esistono

$$k_1 = k_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_1) = \max_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}_{\mathbf{P}}} k_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \quad k_2 = k_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_2) = \min_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}_{\mathbf{P}}} k_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}).$$

I numeri  $k_1$  e  $k_2$  si chiamano *curvature principali* di  $\Sigma$  in  $\mathbf{P}$ ; le corrispondenti direzioni  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  si chiamano *direzioni principali* di  $\Sigma$  in  $\mathbf{P}$ . Per le curvature principali vale il seguente fondamentale risultato:

**Teorema 4.10.5** *Sia  $\Sigma = \sigma(T)$  una superficie regolare orientata di classe  $C^2$ . Se  $\mathbf{P} \in \Sigma$  è un punto non planare, ossia in  $\mathbf{P}$  si ha  $L^2 + M^2 + N^2 > 0$ , valgono i seguenti fatti:*

(i) *se  $k$  è una curvatura principale, allora  $k$  è radice dell'equazione*

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + 2FM + GL)k + (LN - M^2) = 0;$$

(ii) *l'equazione sopra scritta ha due soluzioni reali, eventualmente coincidenti;*

(iii) *se l'equazione ha una radice doppia  $k$ , allora essa è diversa da 0 e tutte le direzioni sono principali (in tal caso il punto  $\mathbf{P}$  si dice ombelicale);*

(iv) *se l'equazione ha due radici  $k_1$  e  $k_2$ , allora esse sono le curvature principali e le corrispondenti direzioni principali sono fra loro ortogonali.*

**Dimostrazione** (i) Osserviamo anzitutto che la curvatura normale  $k_{\mathbf{n}}$  dipende dalla direzione tangente prescelta, che varia nell'insieme compatto

$$\mathcal{T}_{\mathbf{P}} = \{r\sigma_u(\mathbf{P}) + s\sigma_v(\mathbf{P}) : (r, s) \in \mathbb{R}^2, |r\sigma_u(\mathbf{P}) + s\sigma_v(\mathbf{P})|_3 = 1\}.$$

Se vediamo  $k_{\mathbf{n}}$  come funzione dei parametri  $r, s$ , il fatto che  $k$  sia una curvatura principale, con direzione principale  $\mathbf{t} = a\sigma_u(\mathbf{P}) + b\sigma_v(\mathbf{P})$ , ci dice che  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  è punto stazionario vincolato per  $k_{\mathbf{n}}$  con vincolo  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}}$ . Tuttavia,  $k_{\mathbf{n}}$  è funzione omogenea di grado 0 rispetto a  $(r, s)$ , cosicché il punto  $(a, b)$  è anche stazionario libero per

$$k_{\mathbf{n}}(r, s) = \frac{II(r, s)}{I(r, s)} = \frac{Lr^2 + 2Mrs + Ns^2}{Er^2 + 2Frs + gs^2}, \quad (r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Pertanto le derivate parziali  $\frac{\partial k_{\mathbf{n}}}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial k_{\mathbf{n}}}{\partial s}$  sono nulle in  $(a, b)$ . Si ha dunque il sistema

$$\begin{cases} 2a[L I(a, b) - E II(a, b)] + 2b[M I(a, b) - F II(a, b)] = 0 \\ 2a[M I(a, b) - F II(a, b)] + 2b[N I(a, b) - G II(a, b)] = 0. \end{cases}$$

Dividendo per  $2I(a, b)$  si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} a(L - kE) + b(M - kF) = 0 \\ a(M - kF) + b(N - kG) = 0, \end{cases}$$

il quale è un sistema omogeneo in  $(a, b)$ : esso ha dunque soluzione non nulla se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{pmatrix} = 0.$$

Questa condizione è precisamente l'equazione che compare nell'enunciato di (i).

(ii) Il discriminante dell'equazione che compare nell'enunciato di (i) è

$$\begin{aligned} & (EN - 2FM + GL)^2 - 4(EG - F^2)(LN - M^2) = \\ & = 4 \frac{(EG - F^2)(EM - FL)^2}{E^2} + \left[ EN - GL - \frac{2F}{E}(EM - FL) \right]^2 \geq 0, \end{aligned}$$

il che prova (ii). Si noti che il discriminante è nullo se e solo se

$$\begin{cases} EM - FL = 0 \\ EN - GL - \frac{2F}{E}(EM - FL) = 0 \end{cases} \iff \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

(iii) Sia  $k$  una soluzione doppia. Per quanto appena visto, si ha

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \lambda,$$

con  $\lambda \neq 0$  dato che il punto non è planare. L'equazione che compare in (i) si riduce allora a

$$(EG - F^2)(k^2 - 2\lambda k + \lambda^2) = 0,$$

da cui  $k = \lambda \neq 0$ . Da (i) segue che le due curvature principali coincidono con  $k$  e quindi  $k_{\mathbf{n}} = k$  per ogni direzione  $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}_{\mathbf{P}}$ , ossia tutte le direzioni sono principali.

(iv) Se l'equazione di (i) ha due soluzioni  $k_1 < k_2$ , per (i) esse sono curvature principali. Proviamo che le direzioni principali

$$\mathbf{t}_1 = a_1 \boldsymbol{\sigma}_u + b_1 \boldsymbol{\sigma}_v, \quad \mathbf{t}_2 = a_2 \boldsymbol{\sigma}_u + b_2 \boldsymbol{\sigma}_v$$

sono ortogonali. Dalla dimostrazione di (i) segue che  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  risolvono rispettivamente

$$\begin{cases} a_1(L - k_1E) + b_1(M - k_1F) = 0 \\ a_1(M - k_1F) + b_1(N - k_1G) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2(L - k_2E) + b_2(M - k_2F) = 0 \\ a_2(M - k_2F) + b_2(N - k_2G) = 0, \end{cases}$$

ossia, in forma matriciale,

$$\left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - k_1 \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - k_2 \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Moltiplichiamo scalarmente la prima equazione per  $(a_2, b_2)$  e la seconda per  $(a_1, b_1)$ , e sottraiamo la seconda equazione dalla prima: tenuto conto che le matrici sono simmetriche, e che per una matrice simmetrica  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_N$  vale  $\langle \mathbf{Q}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_N = \langle \mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_N$  per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ , il risultato è

$$(k_2 - k_1) \left\langle \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle_3 = 0.$$

Dato che  $k_2 > k_1$ , ne segue

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle_3 = \langle a_1 \boldsymbol{\sigma}_u + b_1 \boldsymbol{\sigma}_v, a_2 \boldsymbol{\sigma}_u + b_2 \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 = \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle_3,$$

cioè  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  sono ortogonali.  $\square$

**Esempi 4.10.6 (1)** Come abbiamo visto, sulla sfera  $B(\mathbf{0}, r)$  la curvatura è costante (esempio 4.10.4 (1)), e quindi tutti i punti sono ombelicali.

**(2)** Per il toro, dai calcoli dell'esempio 4.10.2 (1) segue che l'equazione delle curvature principali è

$$b^2(a + b \cos \varphi)^2 k^2 - k [b^2(a + b \cos \varphi) \cos \varphi - b(a + b \cos \varphi)^2] - b(a + b \cos \varphi) \cos \varphi = 0,$$

ovvero

$$b(a + b \cos \varphi) k^2 + ak - \cos \varphi = 0.$$

Le soluzioni sono

$$k = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b \cos \varphi (a + b \cos \varphi)}}{2b(a + b \cos \varphi)} = \begin{cases} \frac{\cos \varphi}{a + b \cos \varphi} \\ -\frac{1}{b}, \end{cases}$$

che riconosciamo essere le curvature normali lungo i meridiani e i paralleli: meridiani e paralleli sono dunque le direzioni principali, come è giusto ortogonali fra loro.

**(3)** Per il paraboloido  $z = x^2 + y^2$  la curvatura normale ci viene fornita dall'esempio 4.10.4 (3), con  $f(x, y) = x^2 + y^2$ : si ha

$$\begin{aligned} k_{\mathbf{n}} &= \frac{2(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} [(1 + 4x^2)dx^2 + 8xydx dy + (1 + 4y^2)dy^2]} = \\ &= \frac{2(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} [dx^2 + dy^2 + 4(xdx + ydy)^2]}. \end{aligned}$$

Il massimo della curvatura normale, in un punto di quota  $z = x^2 + y^2$ , si ha quando  $x dx + y dy = 0$ , ossia quando  $(a, b) = (dx, dy)$  è ortogonale a  $(x, y)$ : dunque quando  $(a, b) = (-y, x)$ . Il massimo vale

$$k_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4z}};$$

la direzione principale relativa a  $k_2$  è

$$\mathbf{t}_2 = -y\boldsymbol{\sigma}_x + x\boldsymbol{\sigma}_y = -y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

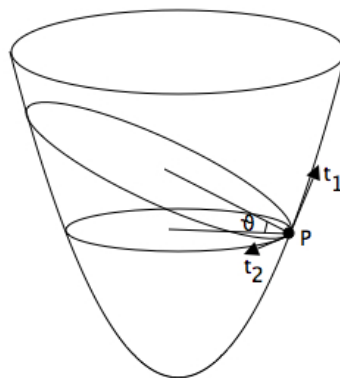
Il minimo della curvatura normale si ha quando  $(a, b) = (dx, dy)$  è parallelo a  $(x, y)$ , ossia quando  $(a, b) = (x, y)$ : dunque il minimo vale

$$k_1 = \frac{2(x^2 + y^2)}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} [x^2 + y^2 + 4(x^2 + y^2)]} = \frac{2}{(1 + 4z)^{3/2}},$$

e la direzione principale corrispondente è

$$\mathbf{t}_1 = x\boldsymbol{\sigma}_x + y\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Si noti che  $\mathbf{t}_2$  è orizzontale, e che la sezione normale a  $\Sigma$  nella direzione  $\mathbf{t}_2$  in un punto  $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z_0)$  con  $z_0 = x_0^2 + y_0^2$  non è la circonferenza orizzontale di quota  $z_0$ : è invece l'intersezione di  $\Sigma$  con il piano per  $\mathbf{P}$  generato dai vettori  $\mathbf{t}_2 = (-y_0, x_0, 0)$  e  $\mathbf{n}(\mathbf{P}) = \left( \frac{-2x_0}{\sqrt{1+4z_0}}, \frac{-2y_0}{\sqrt{1+4z_0}}, \frac{1}{\sqrt{1+4z_0}} \right)$ , vale a dire il piano per  $\mathbf{P}$  ortogonale a  $\mathbf{t}_1 = (x_0, y_0, 2z_0)$ .



Poiché l'angolo  $\vartheta$  fra le normali alla circonferenza orizzontale e alla sezione normale in  $\mathbf{P}$  coincide con l'angolo fra  $\boldsymbol{\nu}_1$  e l'asse  $z$ , per tale angolo si ha  $|\cos \vartheta| = \left\langle \frac{\boldsymbol{\nu}_1}{|\boldsymbol{\nu}_1|_3}, \mathbf{e}_3 \right\rangle_3 = \frac{2\sqrt{z_0}}{\sqrt{1+4z_0}}$ ; si conclude allora che la curvatura della circonferenza orizzontale di quota  $z_0$ , in valore assoluto, è, come è giusto,

$$|k| = \left| \frac{k_n(\mathbf{t}_2)}{\cos \vartheta} \right| = \left| \frac{k_2}{\cos \vartheta} \right| = \frac{1}{\sqrt{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

## Curvatura media e curvatura gaussiana

Torniamo all'equazione algebrica che determina le curvature principali  $k_1$  e  $k_2$ , equazione che riscriviamo nella forma

$$k^2 - \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0.$$

I suoi coefficienti sono denominati rispettivamente

$$\text{curvatura media:} \quad H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$\text{curvatura gaussiana:} \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = k_1 k_2,$$

sempre in riferimento ad un punto  $\mathbf{P}$  della superficie  $\Sigma$  (regolare, orientata e di classe  $C^2$ ).

Il significato della curvatura media  $H$  è legato a come varia l'area della superficie  $\Sigma$  quando è soggetta a deformazioni: questo è un problema classico del calcolo delle variazioni che va studiato con metodi fuori della portata di questo corso. Ad esempio si dimostra che fra tutte le superfici che si attaccano ad un bordo assegnato, quella di area minima ha necessariamente curvatura media nulla in tutti i punti.

La curvatura gaussiana  $K$  ha un significato geometrico che cercheremo adesso di analizzare. Intanto, si noti che il segno di  $K$  è quello di  $LN - M^2$ , e quindi  $K$  è positiva, negativa o nulla a seconda che il punto  $\mathbf{P}$  sia ellittico, iperbolico o parabolico (oppure planare).

Un secondo aspetto della curvatura gaussiana è il seguente: introduciamo la *mappa di Gauss* da  $\Sigma$  in  $S^2$  (la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ ), definita da  $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{P})$ . La superficie  $\Sigma_G = \{\mathbf{n}(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \in \Sigma\} = \{\mathbf{n}(u, v) : (u, v) \in T\}$  è detta *superficie di Gauss* associata a  $\Sigma$ .

**Proposizione 4.10.7** *Sia  $\Sigma = \sigma(T)$  una superficie regolare orientata di classe  $C^2$ . Allora in ogni  $\mathbf{P} = \sigma(u, v)$  si ha*

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v,$$

ove  $\mathbf{n}_u$  e  $\mathbf{n}_v$  sono le derivate prime di  $\mathbf{n}$  e  $K$  è la curvatura gaussiana in  $\mathbf{P}$ .

**Dimostrazione** Dato che  $\mathbf{n}$  è un versore, i vettori  $\mathbf{n}_u$  e  $\mathbf{n}_v$  sono ad esso ortogonali, e dunque tangenti a  $\Sigma$ : quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{n}_u = a \boldsymbol{\sigma}_u + b \boldsymbol{\sigma}_v, \quad \mathbf{n}_v = c \boldsymbol{\sigma}_u + d \boldsymbol{\sigma}_v$$

per certi  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Dunque

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = (ad - bc) \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v.$$

D'altra parte

$$-L = -\langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}, \mathbf{n} \rangle_3 = -\frac{\partial}{\partial u} \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \mathbf{n} \rangle_3 + \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \mathbf{n}_u \rangle_3 = \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \mathbf{n}_u \rangle_3 = aE + bF,$$

e similmente

$$-M = \begin{cases} \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \mathbf{n}_u \rangle_3 = aF + bG \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \mathbf{n}_v \rangle_3 = cE + dF, \end{cases} \quad -N = \langle \boldsymbol{\sigma}_v, \mathbf{n}_v \rangle_3 = cF + dG,$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}.$$

Ne segue, passando ai determinanti,

$$(ad - bc)(EG - F^2) = LN - M^2,$$

ossia

$$ad - bc = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K. \quad \square$$



**Osservazione 4.10.8** I quattro coefficienti  $a, b, c, d$  sono calcolabili: si ha infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

da cui

$$a = \frac{MF - LG}{EG - F^2}, \quad b = \frac{LF - ME}{EG - F^2}, \quad c = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad d = \frac{MF - NE}{EG - F^2}.$$

Dalla proposizione precedente segue che la superficie  $(u, v) \mapsto \mathbf{n}(u, v)$  ha area pari a

$$a(\Sigma_G) = \int_{\Sigma_G} ds_G = \int_T |K| |\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v|_3 dudv;$$

in particolare, se  $U$  è un intorno superficiale di  $\mathbf{P}$  in  $\Sigma$ , e  $V$  è l'intorno di  $\mathbf{n}(\mathbf{P})$  immagine di  $U$ , il rapporto fra l'area di  $V$  e quella di  $U$ , al tendere a 0 del diametro di  $U$ , tende a  $|K(\mathbf{P})|$ . Dunque  $|K|$  misura il tasso di “dispersione” della normale a  $\Sigma$  in un intorno di  $\mathbf{P}$ . Ad esempio, se  $\Sigma$  è un piano allora  $\mathbf{n}(\mathbf{P})$  è costante, cosicché  $\Sigma_G$  è un punto,  $ds_G = 0$  e infatti  $K = 0$ ; se  $\Sigma$  è la sfera di raggio  $r$ , allora  $|K| = k_1 k_2 = \frac{1}{r^2}$  e infatti la mappa di Gauss si riduce all'omotetia  $\mathbf{P} \mapsto \frac{1}{r} \mathbf{P}$ , da cui  $ds_G = \frac{1}{r^2} ds$ . Se  $\Sigma$  è il cilindro  $x^2 + y^2 = r^2$ , allora  $\Sigma_G$  è l'equatore di  $S^2$ : quindi  $ds_G = 0$  ed infatti si ha  $K = k_1 k_2 = 0 \cdot \frac{1}{r} = 0$ .

Osserviamo, più in particolare, che in un cilindro è conservata la metrica del piano. Infatti, utilizzando le coordinate cilindriche, il cilindro è parametrizzato da

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = z, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi], \quad z \in \mathbb{R},$$

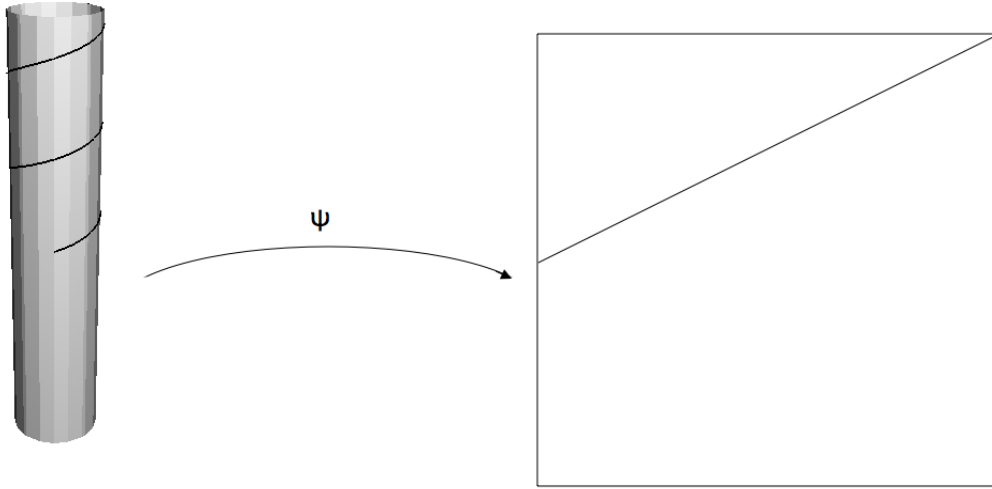
quindi  $E = r^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$  e

$$I(d\vartheta, dz) = r^2 d\vartheta^2 + dz^2.$$

Si noti che  $r d\vartheta$  è l'elemento di lunghezza lungo le circonferenze in cui  $z$  è costante, ed è lo stesso che si avrebbe sull'immagine di tali circonferenze ottenute tagliando il cilindro lungo una generatrice e “srotolandolo” sul piano. Si ha pertanto una “isometria locale” fra il cilindro e il piano:

$$(u, v) = (r\vartheta, z), \quad \vartheta, z \in \mathbb{R},$$

nel senso che curve di lunghezza  $\ell$  sul cilindro sono trasformate in curve di pari lunghezza sul piano.



L'isometria è locale e non globale, perché il cilindro ed il piano non sono omeomorfi globalmente (il piano è semplicemente connesso, il cilindro no).

Questa proprietà del cilindro non è casuale, ma discende da un teorema generale che andiamo ad enunciare. Diciamo anzitutto che un'applicazione  $\psi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  fra due superfici regolari è un *diffeomorfismo locale* se per ogni  $\mathbf{P} \in \Sigma_1$  esistono due aperti  $U_1, U_2$  di  $\mathbb{R}^2$  e due parametrizzazioni  $\sigma_1 : U_1 \rightarrow \Sigma_1, \sigma_2 : U_2 \rightarrow \Sigma_2$  tali che  $\mathbf{P} \in \sigma_1(U_1), \psi(\mathbf{P}) \in \sigma_2(U_2)$ , e l'applicazione composta  $\sigma_2^{-1} \circ \psi \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$  è un diffeomorfismo. Questa definizione non dipende dalle parametrizzazioni scelte.

**Teorema 4.10.9 (Theorema Egregium di Gauss)** *Siano  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  due superfici regolari orientate di classe  $C^3$  e sia  $\mathbf{P} \in \Sigma_1$ . Se in un intorno superficiale  $U_1$  di  $\mathbf{P}$  è definito un diffeomorfismo locale  $\psi : U_1 \rightarrow \Sigma_2$  che è anche un'isometria locale, cioè rispetto al quale la prima forma fondamentale è invariante, allora la curvatura gaussiana di  $\Sigma_1$  nel generico punto  $\mathbf{Q} \in U_1$  coincide con quella di  $\Sigma_2$  in  $\psi(\mathbf{Q})$ .*

Questo teorema ci dice che la curvatura gaussiana  $K$ , benché definita in termini di  $L, M$  e  $N$  oltre che di  $E, F$  e  $G$ , in effetti dipende soltanto da  $E, F, G$  nonché dalle loro derivate, perché non cambia quando la prima forma fondamentale non cambia.

**Dimostrazione** Fissiamo un punto  $\mathbf{P} = \sigma(u, v) \in \Sigma$ . La terna  $(\sigma_u, \sigma_v, \mathbf{n})$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ . Quindi per certi coefficienti reali  $\Gamma_{ij}^k$  e  $L_i$  (con  $i, j, k \in \{1, 2\}$ ) possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \sigma_{uu} = \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L_1 \mathbf{n} \\ \sigma_{uv} = \sigma_{vu} = \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + L_2 \mathbf{n} \\ \sigma_{vv} = \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + L_3 \mathbf{n}, \end{cases}$$

Moltiplicando scalarmente le tre equazioni per  $\mathbf{n}$  si trova

$$L_1 = L, \quad L_2 = M, \quad L_3 = N,$$

mentre moltiplicando scalarmente per  $\boldsymbol{\sigma}_u$  e  $\boldsymbol{\sigma}_v$  si ottiene facilmente

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uu}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_3 = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uv}, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uv}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_3 = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \boldsymbol{\sigma}_{uv}, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_u \rangle_3 = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \boldsymbol{\sigma}_{vv}, \boldsymbol{\sigma}_v \rangle_3 = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}$$

e da queste relazioni sarebbe facile, ancorché noioso, ricavare le quantità  $\Gamma_{ij}^k$ . Osserviamo invece che, ovviamente,

$$\frac{\partial}{\partial v} \boldsymbol{\sigma}_{uu} - \frac{\partial}{\partial u} \boldsymbol{\sigma}_{uv} = \mathbf{0},$$

da cui, sostituendo le espressioni di  $\boldsymbol{\sigma}_{uu}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_{uv}$ , si ricava una formula del tipo

$$A_1 \boldsymbol{\sigma}_u + A_2 \boldsymbol{\sigma}_v + A_3 \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

in cui, per la lineare indipendenza dei vettori  $\boldsymbol{\sigma}_u$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_v$  e  $\mathbf{n}$ , deve essere  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ . Limitiamoci a scrivere esplicitamente l'equazione  $A_1 = 0$ : si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = (\boldsymbol{\sigma}_{uu})_v - (\boldsymbol{\sigma}_{uv})_u &= \Gamma_{11}^1 \boldsymbol{\sigma}_{uv} + (\Gamma_{11}^1)_v \boldsymbol{\sigma}_u + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{\sigma}_{vv} + (\Gamma_{11}^2)_v \boldsymbol{\sigma}_v + L \mathbf{n}_v + L_v \mathbf{n} - \\ &\quad - \Gamma_{12}^1 \boldsymbol{\sigma}_{uu} - (\Gamma_{12}^1)_u \boldsymbol{\sigma}_u - \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{\sigma}_{vu} - (\Gamma_{12}^2)_u \boldsymbol{\sigma}_v - M \mathbf{n}_u - M_u \mathbf{n}, \end{aligned}$$

ovvero, sostituendo ancora le espressioni delle derivate seconde di  $\boldsymbol{\sigma}$ , nonché quelle delle derivate prime di  $\mathbf{n}$ ,

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 [\Gamma_{12}^1 \boldsymbol{\sigma}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{\sigma}_v + M \mathbf{n}] + \Gamma_{11}^2 [\Gamma_{22}^1 \boldsymbol{\sigma}_u + \Gamma_{22}^2 \boldsymbol{\sigma}_v + N \mathbf{n}] + \\ &\quad + L [c \boldsymbol{\sigma}_u + d \boldsymbol{\sigma}_v] + (\Gamma_{11}^1)_v \boldsymbol{\sigma}_u + (\Gamma_{11}^2)_v \boldsymbol{\sigma}_v + L_v \mathbf{n} = \\ &= \Gamma_{12}^1 [\Gamma_{11}^1 \boldsymbol{\sigma}_u + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{\sigma}_v + L \mathbf{n}] + \Gamma_{12}^2 [\Gamma_{12}^1 \boldsymbol{\sigma}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{\sigma}_v + M \mathbf{n}] + \\ &\quad + M [a \boldsymbol{\sigma}_u + b \boldsymbol{\sigma}_v] + (\Gamma_{12}^1)_u \boldsymbol{\sigma}_u + (\Gamma_{12}^2)_u \boldsymbol{\sigma}_v + M_u \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti di  $\boldsymbol{\sigma}_v$  otteniamo

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + Ld + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + Mb + (\Gamma_{12}^2)_u,$$

ovvero

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 = Mb - Ld;$$

ricordando l'osservazione 4.10.8 si nota che

$$Mb - Ld = \frac{M(LF - ME) - L(MF - NE)}{EG - F^2} = E \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -EK,$$

il che ci porta a concludere che

$$K = -\frac{1}{E} [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2].$$

Questa relazione prova che la curvatura gaussiana  $K$  è funzione di  $E$  e dei coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$ .

Adesso osserviamo che, per ipotesi, il diffeomorfismo locale  $\psi$  è un'isometria da  $U_1$  in  $\psi(U_1)$ : quindi, i coefficienti della prima forma fondamentale relativa a  $\sigma$ , calcolati in un generico punto  $\mathbf{Q} \in U_1$ , coincidono con quelli della prima forma fondamentale relativa a  $\psi \circ \sigma$ , calcolati nel punto  $\psi(\mathbf{Q})$ . Pertanto non solo coincidono i coefficienti  $E, F, G$  relativi alle due parametrizzazioni, ma anche le loro derivate relative ai rispettivi parametri; in particolare quindi coincidono anche i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  e pertanto  $K(\mathbf{Q}) = K(\psi(\mathbf{Q}))$  per ogni  $\mathbf{Q} \in U_1$ .  $\square$

**Esempio 4.10.10** Consideriamo la *catenoide*

$$\sigma = \begin{cases} x = \cos \vartheta \cosh z \\ y = \sin \vartheta \cosh z \\ z = z, \end{cases} \quad \vartheta \in [-\pi, \pi], z \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cosh z & \cos \vartheta \sinh z \\ \cos \vartheta \cosh z & \sin \vartheta \sinh z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$I(d\vartheta, dz) = \cosh^2 z d\vartheta^2 + (\sinh^2 z + 1) dz^2 = \cosh^2 z (d\vartheta^2 + dz^2).$$

Consideriamo anche l'*elicoide*

$$\eta = \begin{cases} \xi = u \cos \omega \\ \zeta = u \sin \omega \\ \omega = \omega, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \omega \in [-\pi, \pi],$$

per la quale si ha

$$D\eta = \begin{pmatrix} \cos \omega & -u \sin \omega \\ \sin \omega & u \cos \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

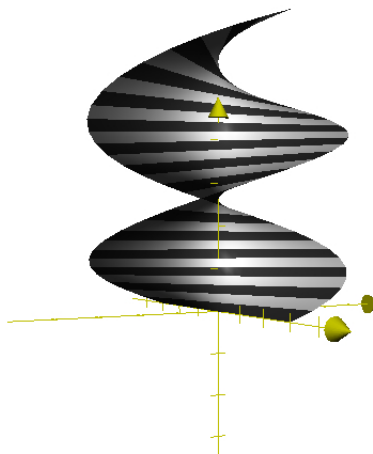
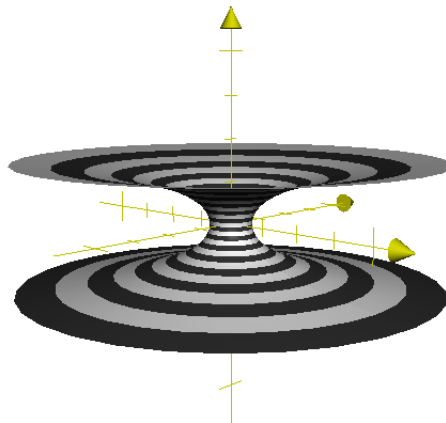
e quindi

$$I(du, d\omega) = du^2 + (u^2 + 1)d\omega^2.$$

Il cambiamento di parametri

$$(u, \omega) = \mathbf{p}(\vartheta, z) = (\sinh z, \vartheta)$$

induce un'isometria locale fra la catenoides e l'elicoide: quest'ultima viene riparametriz-



zata da

$$\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p} = \begin{cases} \xi = \sinh z \cos \vartheta \\ \zeta = \sinh z \sin \vartheta \\ \omega = \vartheta, \end{cases} \quad \vartheta \in [-\pi, \pi], \quad z \in \mathbb{R},$$

e si ha

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\sinh z \sin \vartheta & \cosh z \cos \vartheta \\ \sinh z \cos \vartheta & \cosh z \sin \vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I(d\vartheta, dz) = (\sinh^2 z + 1)d\vartheta^2 + \cosh^2 z dz^2 = \cosh^2 z (d\vartheta^2 + dz^2).$$

Dunque la prima forma fondamentale sulla catenoide  $\boldsymbol{\sigma}$  e sull'elicoide  $\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p}$  è la stessa. L'isometria locale è  $\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p} \circ \boldsymbol{\sigma}^{-1}$  (si noti che  $\boldsymbol{\sigma}|_{]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}}$  è iniettiva): essa trasforma le linee coordinate in cui  $\vartheta$  è costante, che sono generatrici della catenoide, in rette orizzontali sull'elicoide, mentre le linee coordinate in cui  $z$  è costante, che sono circonferenze orizzontali sulla catenoide, diventano eliche cilindriche sull'elicoide.

Per il *Theorema Egregium*, le curvatures gaussiane in punti corrispondenti sono uguali. Ed infatti, per la catenoide  $\boldsymbol{\sigma}(\vartheta, z) = (\cos \vartheta \cosh z, \sin \vartheta \cosh z, z)$  si ha

$$\boldsymbol{\sigma}_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \cosh z \\ -\sin \vartheta \cosh z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\vartheta z} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sinh z \\ -\cos \vartheta \sinh z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{zz} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cosh z \\ \sin \vartheta \cosh z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\cos \vartheta}{\cosh z}, \frac{\sin \vartheta}{\cosh z}, -\frac{\sinh z}{\cosh z} \right),$$

da cui  $L = -1$ ,  $M = 0$ ,  $N = 1$  e pertanto

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 z}.$$

Invece per l'elicoide  $\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p}(\vartheta, z) = (\sinh z \cos \vartheta, \sinh z \sin \vartheta, \vartheta)$  si ha

$$(\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p})_{zz} = \begin{pmatrix} \sinh z \cos \vartheta \\ \sinh z \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p})_{\vartheta z} = \begin{pmatrix} -\cosh z \sin \vartheta \\ \cosh z \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{p})_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sinh z \cos \vartheta \\ -\sinh z \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \left( -\frac{\sin \vartheta}{\cosh z}, \frac{\cos \vartheta}{\cosh z}, -\frac{\sinh z}{\cosh z} \right),$$

da cui  $L = 0$ ,  $M = 1$ ,  $N = 0$  e pertanto

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 z}.$$

**Osservazione 4.10.11** Il viceversa del *Theorema Egregium* è falso: esistono superfici localmente diffeomorfe che hanno curvatures gaussiane uguali in punti corrispondenti, ma che non sono isometriche (esercizio 4.9.10).

## Esercizi 4.10

1. Determinare la seconda forma fondamentale per l'ellissoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , per il cono  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  e per il paraboloido iperbolico  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  ( $a, b, c > 0$ ).
2. Provare che i punti della superficie di rotazione

$$x = f(z) \cos \vartheta, \quad y = f(z) \sin \vartheta, \quad z = z,$$

ove  $f$  è una funzione positiva e di classe  $C^2$ , sono tutti parabolici se e solo se  $f(z) = az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

3. Sia  $\Sigma = \sigma(T)$  una superficie regolare e sia  $(u, v) = \mathbf{p}(q, r)$  un diffeomorfismo con  $J_{\mathbf{p}} > 0$ . Posto  $\boldsymbol{\eta}(q, r) = \sigma(\mathbf{p}(q, r))$ , ed indicati con  $L_{\boldsymbol{\eta}}, M_{\boldsymbol{\eta}}, N_{\boldsymbol{\eta}}$  e  $L_{\boldsymbol{\sigma}}, M_{\boldsymbol{\sigma}}, N_{\boldsymbol{\sigma}}$  i coefficienti della seconda forma fondamentale riferiti alle parametrizzazioni  $\boldsymbol{\eta}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ , si provi che

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{\eta}} &= L_{\boldsymbol{\sigma}}(p^1)_q{}^2 + 2M_{\boldsymbol{\sigma}}(p^1)_q(p^2)_q + N_{\boldsymbol{\sigma}}(p^2)_q{}^2, \\ M_{\boldsymbol{\eta}} &= L_{\boldsymbol{\sigma}}(p^1)_q(p^1)_r + M_{\boldsymbol{\sigma}}((p^1)_q(p^2)_r + (p^1)_r(p^2)_q) + N_{\boldsymbol{\sigma}}(p^2)_q(p^2)_r, \\ N_{\boldsymbol{\eta}} &= L_{\boldsymbol{\sigma}}(p^2)_r{}^2 + 2M_{\boldsymbol{\sigma}}(p^1)_r(p^2)_r + N_{\boldsymbol{\sigma}}(p^2)_r{}^2, \end{aligned}$$

e se ne deducano le affermazioni dell'osservazione 4.10.1.

4. Determinare i punti ellittici, iperbolici e parabolici per la superficie di rotazione  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ , ove  $f$  è una funzione di classe  $C^2$ .
5. Determinare la curvatura normale per le seguenti superfici:

- (i)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (ellissoide),
- (ii)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (cilindro),
- (iii)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  (cono),
- (iv)  $\sigma(\vartheta, z) = (f(z) \cos \vartheta, f(z) \sin \vartheta, z)$  (superficie di rotazione),
- (v)  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  (superficie cartesiana di rotazione),
- (vi)  $\sigma(t, \vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, t + \sin \vartheta)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ .

6. Trovare le direzioni principali, la curvatura media e la curvatura gaussiana per le seguenti superfici:

- (i)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (ellissoide),
- (ii)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (iperboloide),
- (iii)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  (cono),

(iv)  $x \sin z - y \cos z = 0$ .

7. Calcolare curvatura media e curvatura gaussiana per una superficie di rotazione della forma

$$x = f(t) \cos \vartheta, \quad y = f(t) \sin \vartheta, \quad z = g(t), \quad t \in [a, b], \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

ove  $f$  e  $g$  sono funzioni di classe  $C^2$ .

8. (*Linee di curvatura*) Una curva  $\varphi(t) = \sigma(u(t), v(t))$  giacente su una superficie  $\Sigma = \sigma(T)$  si dice *linea di curvatura* se in ogni suo punto la direzione della tangente è una direzione principale.

(i) Provare che se  $\Sigma$  è regolare e di classe  $C^2$  esistono due famiglie di linee di curvatura nell'intorno di ogni punto non ombelicale.

(ii) Provare che le linee coordinate corrispondenti a  $u$  costante e  $v$  costante sono linee di curvatura se e solo se  $F = M = 0$ , e che in tal caso le curvature principali sono  $\frac{L}{E}$  e  $\frac{N}{G}$ .

9. (*Formula di Eulero*) Se  $\mathbf{v}$  è tangente a una superficie  $\Sigma$  (regolare e di classe  $C^2$ ) in  $\mathbf{P}$ , e  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono le direzioni principali in  $\mathbf{P}$ , con  $|\mathbf{v}_1|_3 = |\mathbf{v}_2|_3 = |\mathbf{v}|_3 = 1$ , provare che, detto  $\vartheta$  l'angolo fra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_1$ , si ha

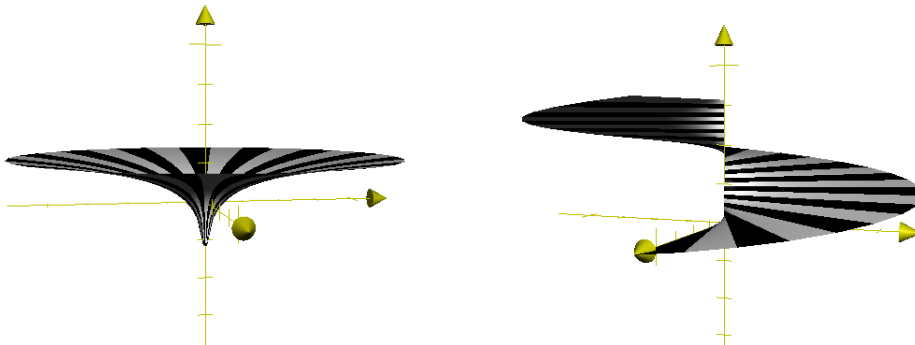
$$k_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta.$$

10. Sia  $\Sigma_1$  il "cono logaritmico"

$$\sigma(u, \vartheta) = (u \cos \vartheta, u \sin \vartheta, \ln u), \quad u > 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

e sia  $\Sigma_2$  l'elicoide

$$\eta(u, \vartheta) = (u \cos \vartheta, u \sin \vartheta, \vartheta), \quad u > 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$



- (i) Provare che le curvature gaussiane nei generici punti di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sono uguali:

$$K_1 = K_2 = -\frac{1}{(1 + u^2)^2}.$$

- (ii) Provare che  $\eta \circ \sigma^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  è un diffeomorfismo; calcolare la lunghezza delle curve  $\varphi$  e  $\eta \circ \sigma^{-1} \circ \varphi$ , ove

$$\varphi(\vartheta) = (u_0 \cos \vartheta, u_0 \sin \vartheta, \ln u_0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

e dedurre che  $\eta \circ \sigma^{-1}$  non è un'isometria. (Si può provare che non esiste alcuna isometria fra le due superfici, cosicché il viceversa del *Theorema Egregium* è falso.)

## 4.11 Varietà $r$ -dimensionali

Generalizzando le nozioni di curva e di superficie regolare, fissato un intero positivo  $r < N$  vogliamo definire una *varietà  $r$ -dimensionale regolare* come un insieme  $V \subset \mathbb{R}^N$  dotato della seguente proprietà: ogni punto  $\mathbf{x}_0 \in V$  ha un intorno  $U$  in  $\mathbb{R}^N$  tale che  $V \cap U$  è “una copia deformata” di una palla di  $\mathbb{R}^r$ . Osserviamo subito che questa richiesta esclude alcune delle curve e superfici che abbiamo classificato a pieno titolo come “regolari”, come mostra l'esempio 1.9.16. Nonostante ciò, andiamo comunque a definire:

**Definizione 4.11.1** *Un sottoinsieme  $V$  di  $\mathbb{R}^N$  è una varietà  $r$ -dimensionale regolare se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in V$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^N$  ed una funzione  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-r}$  di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tali che:*

- (i)  $\mathbf{DF}(\mathbf{x})$  ha rango massimo  $N - r$  in ogni punto  $\mathbf{x} \in U$ ,
- (ii)  $V \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ .

Dunque le varietà  $r$ -dimensionali sono quegli insiemi che, localmente, sono luoghi di zeri di funzioni di classe (almeno)  $C^1$  con matrice Jacobiana di rango massimo. Dal teorema del Dini (teorema 1.9.6) segue subito:

**Teorema 4.11.2** *Sia  $V$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . L'insieme  $V$  è una varietà  $r$ -dimensionale regolare se e solo se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in V$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^N$ , un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^r$  ed una funzione  $\mathbf{h} : A \rightarrow \mathbb{R}^{N-r}$ , di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tali che  $V \cap U$  è il grafico della funzione  $\mathbf{h}$ , ossia*

$$V \cap U = \{\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^N : \mathbf{y} \in A, \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{y})\}. \quad \square$$

Da questo teorema e dal teorema del rango segue poi:

**Teorema 4.11.3** *Sia  $V$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . L'insieme  $V$  è una varietà  $r$ -dimensionale regolare in  $\mathbb{R}^N$  se e solo se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in V$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^N$ , un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^r$  ed un omeomorfismo  $\mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tali che*

- (i)  $\mathbf{DG}(\mathbf{u})$  ha rango massimo  $r$  in ogni punto  $\mathbf{u} \in A$ ,
- (ii)  $V \cap U = \mathbf{G}(A)$ .



Si dice che  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{u})$  è una *parametrizzazione locale* di  $V$ . Si osservi che l'ipotesi (ii) dice che  $\mathbf{G}(A)$  è aperto in  $V$ .

**Dimostrazione** Utilizzando il teorema precedente, fissato  $\mathbf{x}_0 \in V$  scegliamo un suo intorno  $U$  in  $\mathbb{R}^N$  tale che

$$V \cap U = \{\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^N : \mathbf{y} \in A, \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})\}$$

con  $\mathbf{g} : A \subseteq \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{N-r}$  opportuna funzione di classe  $C^k$ . Allora la funzione  $\mathbf{G}$  può essere scelta nel modo seguente:

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in A.$$

Viceversa, fissato  $\mathbf{x}_0 \in V$ , sia  $\mathbf{G} : A \rightarrow U \cap V$  l'omeomorfismo di classe  $C^k$  fornito dall'ipotesi: allora l'equazione  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  è univocamente risolvibile in  $A$  per ogni  $\mathbf{x} \in V \cap U$ . D'altra parte, la matrice  $D\mathbf{G}(\mathbf{t})$  ha almeno un minore di ordine  $r$  non nullo, ad esempio quello relativo alle prime  $r$  variabili: quindi, posto  $\mathbf{f} = (\mathbf{G}^1, \dots, \mathbf{G}^r)$  e  $\mathbf{g} = (\mathbf{G}^{r+1}, \dots, \mathbf{G}^N)$ , l'equazione  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  si spezza nel sistema  $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{f}(\mathbf{t}), \mathbf{g}(\mathbf{t}))$ , ove per ipotesi  $\mathbf{t}$  è univocamente determinato. Di queste due relazioni, la prima è a sua volta invertibile per il teorema di inversione locale; avremo dunque  $\mathbf{t} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$  e  $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))$ . Perciò l'equazione  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  è equivalente a  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , ove  $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))$ . Pertanto  $U \cap V = \mathbf{G}(A)$  è il grafico della funzione  $\mathbf{h}$  di  $r$  variabili, a valori in  $\mathbb{R}^{N-r}$ , di classe  $C^k$ . Dunque  $V$  è una varietà  $r$ -dimensionale regolare.  $\square$

Osserviamo che per la curva dell'esempio 1.9.16 le ipotesi del teorema 4.11.3 *non* valgono. In effetti la dimostrazione precedente, applicata a questo esempio, salta esattamente là dove si afferma che l'equazione  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  è univocamente risolvibile in  $A$  per ogni  $\mathbf{x} \in V \cap U$ . In effetti, fissato  $(x, y) \in V \cap U$ , nel sistema  $(x, y) = (\cos t, \cos t \sin t)$  nessuna delle due equazioni è univocamente risolvibile rispetto a  $t$ .

Sulla base delle considerazioni precedenti, una varietà  $r$ -dimensionale regolare in  $\mathbb{R}^N$  potrà localmente essere vista indifferentemente:

- come luogo di zeri di una funzione definita in un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , a valori in  $\mathbb{R}^{N-r}$ ,
- come grafico di una funzione definita in un aperto di  $\mathbb{R}^r$ , a valori in  $\mathbb{R}^{N-r}$ ,
- come immagine di un aperto di  $\mathbb{R}^r$  mediante una parametrizzazione a valori in  $\mathbb{R}^N$ .

Nell'ambito di un corso di Analisi, la rappresentazione più conveniente di una varietà è la terza, come si è visto nel caso di curve e superfici. Però considereremo spesso, per comodità, parametrizzazioni *globali* non necessariamente costituite da omeomorfismi. Assegneremo dunque un insieme  $V = \mathbf{G}(T)$  (il *sostegno* della varietà), ove  $T$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^r$  tale che esista un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^r$  per cui  $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$ , e  $\mathbf{G} : T \rightarrow \mathbb{R}^N$  è un'applicazione di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , la cui matrice Jacobiana

$$D\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial t^r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_N}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial G_N}{\partial t^r} \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo, cioè  $r$ , in ogni punto  $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{T} = A$ . Quest'ultima ipotesi significa, come sappiamo, che gli  $r$  vettori colonna  $\mathbf{G}_{t^1}, \dots, \mathbf{G}_{t^r}$  sono linearmente indipendenti in ogni punto. Chiameremo l'insieme  $V$  varietà  $r$ -dimensionale.

## Iperpiano tangente e iperpiano normale

Andiamo a generalizzare le nozioni di retta tangente ad una curva regolare e di piano tangente ad una superficie regolare. Sia  $V = \mathbf{G}(T)$  una varietà  $r$ -dimensionale regolare in  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di  $V$ . Diciamo che una direzione  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  è tangente a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$  se esiste  $\delta > 0$  ed esiste una curva regolare  $\varphi : [-\delta, \delta] \rightarrow V$  tale che

$$\varphi(0) = \mathbf{x}_0, \quad \varphi'(0) = \mathbf{v}.$$

L'insieme di tutte le direzioni tangenti a  $V$  in  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{t}_0)$  costituisce un sottospazio vettoriale  $r$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^N$ ; esso è generato dagli  $r$  vettori colonna di  $\mathbf{DG}(\mathbf{t}_0)$ , viene denominato *spazio tangente* a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$  e si denota con  $T_V(\mathbf{x}_0)$ . Il piano  $r$ -dimensionale tangente a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$  è il traslato in  $\mathbf{x}_0$  di tale sottospazio: le sue equazioni parametriche sono

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t}_0) + \sum_{i=1}^m s^i \mathbf{G}_{t^i}(\mathbf{t}_0), \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^r.$$

Se la varietà è descritta come luogo di zeri,

$$V = \{\mathbf{x} \in A : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N-r}\},$$

allora lo spazio tangente  $T_V(\mathbf{x}_0)$  coincide col nucleo dell'applicazione lineare  $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)$ : dunque il piano  $r$ -dimensionale tangente a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$  sarà descritto dalle  $N - r$  equazioni cartesiane

$$\langle \nabla F_i(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle_N = 0, \quad 1 \leq i \leq N - r.$$

Una direzione  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  è normale a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$  se è ortogonale a tutte le direzioni tangenti a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$ ; l'insieme di tali direzioni è un sottospazio  $(N - r)$ -dimensionale che si chiama *spazio normale* a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$ : esso coincide con  $T_V(\mathbf{x}_0)^\perp$  e si denota con  $N_V(\mathbf{x}_0)$ . Il traslato in  $\mathbf{x}_0$  di questo è il piano  $(N - r)$ -dimensionale normale a  $V$  in  $\mathbf{x}_0$ ; quando  $V = \mathbf{G}(T)$ , esso è descritto dalle  $r$  equazioni cartesiane

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{G}_{t^j}(\mathbf{t}_0) \rangle_N = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Se la varietà  $V$  è data come luogo di zeri, lo spazio normale  $N_V(\mathbf{x}_0)$  è generato dagli  $N - r$  vettori  $\nabla F_i(\mathbf{x}_0)$ , e quindi le equazioni parametriche del suo traslato in  $\mathbf{x}_0$  sono

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{N-r} s^i \nabla F_i(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{N-r}.$$

## Varietà senza bordo e varietà con bordo

Nel seguito occorrerà distinguere fra *varietà con bordo* e *varietà senza bordo*. Ricordiamo che se  $V$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathbf{x}$  è un punto di  $V$ , un intorno di  $\mathbf{x}$  nella topologia relativa di  $V$  è un insieme  $U$  della forma  $U = V \cap A$ , dove  $A$  è un intorno di  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^N$ . Indichiamo con  $B$  la palla unitaria aperta di  $\mathbb{R}^r$ , con  $B_-$  la semipalla unitaria  $B \cap \mathbb{R}_-^r$ , ove  $\mathbb{R}_-^r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : x^r \leq 0\}$ , e con  $\Gamma$  la parte piatta  $B_- \cap \partial\mathbb{R}_-^r$  del bordo di  $B_-$ .

**Definizione 4.11.4** Sia  $V = \mathbf{G}(T)$  una  $r$ -varietà di classe  $C^k$  in  $\mathbb{R}^N$ . Diciamo che  $V$  è una varietà senza bordo se per ogni punto  $\mathbf{x} \in V$  esistono un intorno  $U$  in  $V$  ed un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq B$ , con inversa di classe  $C^k$ .

**Definizione 4.11.5** Sia  $V = \mathbf{G}(T)$  una  $r$ -varietà di classe  $C^k$  in  $\mathbb{R}^N$ . Diciamo che  $V$  è una varietà con bordo se per ogni punto  $\mathbf{x} \in V$  esistono un intorno  $U$  in  $V$  ed un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq B_-$ , con inversa di classe  $C^k$ . Denotiamo con  $iV$  (intorno di  $V$ ) i punti di  $V$  per i quali si possono scegliere  $U$  e  $\varphi$  in modo che l'aperto  $\varphi(U)$  non intersechi  $\Gamma$ , e con  $bV$  (bordo di  $V$ ) i punti di  $V$  per i quali, comunque si scelgano  $U$  e  $\varphi$ , l'aperto  $\varphi(U)$  interseca  $\Gamma$ .

La differenza fra varietà con bordo e senza bordo è ben esemplificata dal confronto fra una calotta sferica e la sfera intera. Tutti i punti della seconda hanno intorni omeomorfi a un disco aperto, mentre i punti della prima sono di due tipi: quelli che hanno intorni omeomorfi a un disco, e quelli che hanno intorni omeomorfi a un semidisco contenente la parte piatta della propria frontiera.

Sia  $V = \mathbf{G}(\bar{A})$  una varietà con bordo: supponiamo che  $\mathbf{G}$  sia di classe  $C^k$  con  $\mathbf{DG}$  di rango massimo in un aperto  $B \supset \bar{A}$ . Allora utilizzando il teorema del rango è facile vedere che  $bV \subseteq \mathbf{G}(\partial A)$ , con inclusione in generale propria, come sappiamo; quindi se l'aperto  $A$  ha frontiera di classe  $C^k$  si ottiene che il bordo  $bV$  è una varietà  $(r - 1)$ -dimensionale. Si ha sempre  $V = iV \cup bV$ , ma facili esempi, come tori e superfici sferiche, mostrano che  $bV$  può essere vuoto. Inoltre, come sappiamo, “interno” e “bordo” non sono sinonimi di “parte interna” e di “frontiera”:  $V$ , come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ , non ha parte interna e coincide con la sua frontiera.

Torneremo a parlare di varietà con bordo nei paragrafi conclusivi.

### Esercizi 4.11

1. Sia  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ : si verifichi che  $V$  è una varietà 1-dimensionale di classe  $C^\infty$ . Vale lo stesso per  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ ?
2. Si provi che

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz - 4 = 0\}$$

è una varietà 2-dimensionale di classe  $C^\infty$ . Si verifichi che  $(2, 2, 1) \in V$  e si scrivano le equazioni del piano tangente a  $V$  e della retta normale a  $V$  in tale punto.

3. Sia  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 - 6z - 1 = 0\}$ . Si verifichi che  $V$  è una varietà 1-dimensionale di classe  $C^1$ , si controlli che  $(3, 2, 2) \in V$  e si scrivano le equazioni della retta tangente a  $V$  e del piano normale a  $V$  in tale punto.
4. Sia  $V = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + z^2 - 1 = 0, y^2 + u^2 - 1 = 0\}$ . Si verifichi che  $V$  è una varietà 2-dimensionale di classe  $C^\infty$ , si controlli che  $(0, 1, -1, 0) \in V$  e si scrivano le equazioni del piano tangente a  $V$  e del piano normale a  $V$  in tale punto.

## 4.12 Applicazioni multilineari alternanti

Con l'obiettivo di studiare le  $r$ -forme, ossia le forme differenziali di grado  $r$ , un necessario pre-requisito è costituito dall'analisi delle *applicazioni  $r$ -lineari alternanti* su uno spazio vettoriale.

Sia dunque  $V$  uno spazio vettoriale reale, di dimensione  $N$ : se  $r \in \mathbb{N}^+$ , indicheremo con  $V^r$  il prodotto cartesiano di  $r$  copie di  $V$ . Un'applicazione  $\omega : V^r \rightarrow \mathbb{R}$  è  *$r$ -lineare* se è lineare in ciascuna delle sue  $r$  variabili; è  *$r$ -lineare alternante* se in più si ha

$$\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_i, \dots, \mathbf{h}_j, \dots, \mathbf{h}_r) = -\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_j, \dots, \mathbf{h}_i, \dots, \mathbf{h}_r) \quad \forall i \neq j,$$

cioè se il valore di  $\omega$  su una  $r$ -pla di vettori ottenuta scambiando di posto fra loro due vettori è l'opposto del valore di  $\omega$  sulla  $r$ -pla originaria.

**Esempi 4.12.1 (1)** Se  $V = \mathbb{R}^3$ , l'applicazione 3-lineare

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_3 = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

è alternante.

**(2)** Se  $V = \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  è un vettore fissato, l'applicazione bilineare

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle_3$$

è alternante.

**(3)** Se  $V = \mathbb{R}^N$ , l'applicazione bilineare

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_N$$

non è alternante.

**(4)** Se  $r = 1$ , tutte le applicazioni lineari  $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$  sono alternanti, perché non c'è niente da alternare.

Denotando con  $S_r$  l'insieme delle permutazioni su  $r$  elementi, se  $\sigma \in S_r$  e  $\omega$  è un'applicazione  $r$ -lineare alternante, si ha

$$\omega(\mathbf{h}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{h}_{\sigma(r)}) = \epsilon(\sigma) \omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r),$$

dove  $\epsilon(\sigma) = \pm 1$  a seconda che  $\sigma$  operi su  $\{1, \dots, r\}$  un numero di scambi pari o dispari. In particolare, se nella  $r$ -pla  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r)$  compaiono due vettori uguali, si ha  $\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = 0$ . Da ciò discende che se i vettori  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$  sono linearmente dipendenti, allora  $\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = 0$ : infatti, supposto ad esempio  $\mathbf{h}_r = \sum_{i=1}^{r-1} c^i \mathbf{h}_i$ , con  $c^1, \dots, c^{r-1} \in \mathbb{R}$ , si ha per linearità

$$\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \sum_{i=1}^{r-1} c^i \omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{r-1}, \mathbf{h}_i) = 0.$$

Così, quando  $r > N$  l'unica applicazione  $r$ -lineare alternante su  $V$  è  $\omega = 0$ . Supporremo perciò sempre  $1 \leq r \leq N$ .

Vediamo come agiscono le applicazioni  $r$ -lineari alternanti. Sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$  una base per  $V$ . Posto

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) \quad \forall \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, N\},$$

dalla  $r$ -linearità segue

$$\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^N \omega_{i_1 \dots i_r} h_1^{i_1} \dots h_r^{i_r},$$

avendo indicato con  $h_i^j$  la  $j$ -sima coordinata del vettore  $\mathbf{h}_i$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ . Introduciamo le notazioni (che verranno comunemente usate da ora in poi)

$$I = \{i_1, \dots, i_r\}, \quad \omega_I = \omega_{i_1 \dots i_r};$$

si noti che risulta

$$\omega_I = \begin{cases} 0 & \text{se in } I \text{ vi sono indici ripetuti} \\ \epsilon(\sigma) \omega_J & \text{se } I = \sigma(J), \sigma \in S_r, \end{cases}$$

ove  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$  è il *riordinamento crescente* di  $I$ , cioè

$$\{j_1, \dots, j_r\} = \{i_1, \dots, i_r\} \quad \text{e} \quad j_1 < \dots < j_r,$$

il quale è univocamente determinato se  $I$  ha indici tutti distinti.

Se indichiamo con  $\sum_I$  la somma rispetto a tutte le  $r$ -ple di indici fra 1 e  $n$ , e con  $\sum_{+J}$  la somma rispetto alle sole  $r$ -ple crescenti, avremo allora

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) &= \sum_I \omega_I h_1^{i_1} \dots h_r^{i_r} = \\ &= \sum_{+J} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) \omega_J h_1^{\sigma(j_1)} \dots h_r^{\sigma(j_r)} = \sum_{+J} \omega_J \det\{h_i^{j_k}\} \end{aligned}$$

ove  $\{h_i^{j_k}\}$  è la matrice  $r \times r$  con le sole righe  $j_1, \dots, j_r$  dei vettori-colonna  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ . Ciò mostra che il comportamento di  $\omega$  è noto quando se ne conosce il valore  $\omega_J =$

$\omega(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_r})$  sulle sole  $r$ -uple crescenti di elementi della base.

Definiamo adesso, fissata una  $r$ -pla crescente  $J$ , l'applicazione  $r$ -lineare alternante

$$e^J(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \det\{h_i^{j_k}\} \quad \forall \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in V,$$

ove, qui e nel seguito, nella matrice  $\{h_i^{j_k}\}$ , che è  $r \times r$ , l'indice di riga è in alto e quello di colonna è in basso. Definiamo inoltre, nel caso  $r > N$ ,  $e^J(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = 0$  per ogni  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in V$  e per ogni  $r$ -pla crescente  $J$ . Si vede subito che per una generica  $r$ -pla  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  si ha

$$e^J(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) = \begin{cases} \det\{\delta_{i_h}^{j_k}\} & \text{se esiste } \sigma \in S_r \text{ tale che } \sigma(I) = J \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove  $\delta_\ell^k$  vale, al solito, 1 se  $k = \ell$  e 0 se  $k \neq \ell$ ; il determinante della matrice  $\{\delta_{i_h}^{j_k}\}$  si denota col simbolo  $\delta_I^J$ . Si noti che  $\delta_I^J$  assume i valori 0, 1, -1: esso vale  $\pm 1$  quando le due  $r$ -ple  $I$  e  $J$  hanno gli stessi indici, tutti distinti ma eventualmente in ordine diverso, e precisamente il valore è 1 se  $I$  si ottiene da  $J$  con un numero pari di scambi, e -1 se invece tale numero di scambi è dispari. Inoltre  $\delta_I^J$  vale 0 allorché  $I$  e  $J$  hanno indici ripetuti, oppure non hanno gli stessi indici: infatti se  $j_k \notin \{i_1, \dots, i_r\}$  la riga  $k$ -sima della matrice  $\{\delta_{i_h}^{j_k}\}$  ha tutti gli elementi nulli, per cui  $\det\{\delta_{i_h}^{j_k}\} = 0$ . Altre proprietà di  $\delta_I^J$  sono illustrate negli esercizi 4.12.1 e 4.12.2.

**Proposizione 4.12.2** *Sia  $\omega$  un'applicazione  $r$ -lineare alternante. Allora si ha*

$$\omega = \sum_{+J} \omega_J e^J,$$

ove  $\omega_J = \omega(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_r})$  per ogni  $r$ -pla crescente  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ .

in altre parole, la famiglia  $\{e^J : J \text{ } r\text{-pla crescente}\}$  è una base dello spazio vettoriale reale  $V_r^*$  delle applicazioni  $r$ -lineari alternanti.

**Dimostrazione** Proviamo che gli elementi della famiglia  $\{e^J\}$  sono linearmente indipendenti: se  $\sum_{+J} c_J e^J = 0$  con  $c_J \in \mathbb{R}$  allora, scelta una  $r$ -pla crescente  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ , si ha

$$0 = \sum_{+J} c_J e^J(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) = \sum_{+J} c_J \det\{\delta_{i_h}^{j_k}\} = \sum_{+J} c_J \delta_I^J = c_I.$$

Dimostriamo che gli  $e^J$  generano lo spazio  $V_r^*$ : se  $\omega \in V_r^*$ , e se  $\omega_J = \omega(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_r})$ , allora le due applicazioni  $r$ -lineari alternanti  $\omega$  e  $\sum_{+J} \omega_J e^J$  coincidono, in quanto per ogni  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ , scrivendo  $\mathbf{h}_j = \sum_{i=1}^N h_j^i \mathbf{e}_i$ , come abbiamo visto risulta, per linearità:

$$\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \sum_I h_1^{i_1} \dots h_r^{i_r} \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) = \sum_{+I} \omega_I \det\{h_{i_j}^{j_k}\} = \sum_{+I} \omega_I e^I(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r).$$

Ciò prova la tesi.  $\square$

Poiché la famiglia  $\{e^J : J \text{ } r\text{-pla crescente}\}$  contiene  $\binom{N}{r}$  elementi, si conclude che

$$\dim V_r^* = \begin{cases} \binom{N}{r} & \text{se } 1 \leq r \leq N \\ 0 & \text{se } r > N. \end{cases}$$

**Esempi 4.12.3 (1)** Per  $r = N$ , l'unica  $N$ -pla crescente è  $J = \{1, \dots, N\}$ : quindi se  $\omega \in V_N^*$  si ha

$$\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_N) = \omega_J \det\{h_k^j\},$$

da cui

$$V_N^* = \{c \det(\cdot), c \in \mathbb{R}\},$$

ovvero l'unica applicazione  $N$ -lineare alternante su uno spazio  $N$ -dimensionale è, a meno di costanti moltiplicative, il determinante: data una  $N$ -pla di elementi di  $V$ , esso agisce sulla matrice che ha per colonne i vettori di tale  $N$ -pla.

**(2)** Se  $r = 1$  e  $V = \mathbb{R}^N$ , si ha  $V_1^* = (\mathbb{R}^N)^*$  (duale di  $\mathbb{R}^N$ ), le 1-ple crescenti sono  $\{1\}, \dots, \{N\}$  e gli elementi di  $V_1^*$  hanno la forma

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j e^j$$

ove  $e^j(\mathbf{h}) = h^j$ ; dunque  $e^j$  è la  $j$ -sima proiezione canonica  $\pi_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , ossia  $e^j = dx^j$ , e in definitiva  $\omega$  è la 1-forma su  $\mathbb{R}^N$  (a coefficienti costanti)  $\sum_{j=1}^N \omega_j dx^j$ .

## Prodotto esterno

Date due applicazioni alternanti  $\omega$  e  $\eta$ , una  $r$ -lineare e l'altra  $s$ -lineare, definite su uno spazio vettoriale  $N$ -dimensionale  $V$ , vogliamo costruirne un'altra,  $(r + s)$ -lineare, che chiameremo *prodotto esterno* delle due e denoteremo con  $\omega \wedge \eta$ .

Anzitutto, se  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  e  $J = \{j_1, \dots, j_s\}$  sono una  $r$ -pla ed una  $s$ -pla di numeri fra 1 e  $N$ , poniamo

$$IJ = \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s\};$$

dunque  $IJ$  è la  $(r + s)$ -pla che si ottiene per giustapposizione di  $I$  e di  $J$ . Naturalmente,  $IJ$  non è in generale crescente, nemmeno quando lo sono  $I$  e  $J$ . Definiamo adesso il prodotto esterno ponendo

$$e^I \wedge e^J = e^{IJ};$$

poi, per linearità, se  $\omega = \sum_{+I} \omega_I e^I$ ,  $\eta = \sum_{+J} \eta_J e^J$ , poniamo

$$\omega \wedge \eta = \sum_{+I, +J} \omega_I \eta_J e^{IJ}.$$

Si noti che se  $r + s > N$  risulta  $\omega \wedge \eta = 0$  in quanto  $e^{IJ} = 0$  per definizione.

Le proprietà del prodotto esterno sono riassunte nella seguente

**Proposizione 4.12.4** *Siano  $r, s, t \in \mathbb{N}^+$ . Si ha:*

- (i)  $(\omega + \zeta) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \zeta \wedge \eta$  per ogni  $\omega, \zeta \in V_r^*$  e  $\eta \in V_s^*$ ;
- (ii)  $(c\omega) \wedge \eta = c(\omega \wedge \eta)$  per ogni  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in V_r^*$  e  $\eta \in V_s^*$ ;
- (iii)  $\eta \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \eta$  per ogni  $\omega \in V_r^*$  e  $\eta \in V_s^*$ ;

(iv)  $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$  per ogni  $\omega \in V_r^*$ ,  $\eta \in V_s^*$  e  $\xi \in V_t^*$ .

**Dimostrazione (i)-(ii)** Sono ovvia conseguenza della definizione di prodotto esterno e della linearità dell'applicazione  $\omega \mapsto \omega_I$ .

(iii) Per trasformare la  $(r+s)$ -pla  $IJ$  in  $JI$  occorrono  $rs$  scambi:  $r$  per spostare  $j_1$ , altri  $r$  per spostare  $j_2$ , e così via per  $s$  volte. Quindi  $e^{IJ}$  si trasforma in  $e^{JI}$  per mezzo di  $rs$  scambi di righe in un determinante: pertanto

$$e^{IJ} = (-1)^{rs} e^{JI},$$

da cui

$$\omega \wedge \eta = \sum_{+I,+J} \omega_I \eta_J e^{IJ} = (-1)^{rs} \sum_{+I,+J} \omega_I \eta_J e^{JI} = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega.$$

(iv) Se  $I$  è una  $r$ -pla,  $J$  è una  $s$ -pla e  $H$  è una  $t$ -pla di numeri fra 1 e  $N$ , si ha

$$(e^I \wedge e^J) \wedge e^H = e^{IJ} \wedge e^H = e^{IJH} = e^I \wedge e^{JH} = e^I \wedge (e^J \wedge e^H);$$

ne segue la tesi per linearità.  $\square$

**Esempi 4.12.5 (1)** Se  $V = \mathbb{R}^N$ ,  $r = 2$  e  $I = \{i, j\}$  con  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , allora

$$e^I = \begin{cases} e^i \wedge e^j & \text{se } i < j \\ -e^i \wedge e^j & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

con

$$e^I(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \det \begin{pmatrix} h_1^i & h_2^i \\ h_1^j & h_2^j \end{pmatrix}.$$

(2) Siano  $r = s = 1$  e  $V = \mathbb{R}^N$ . Allora, posto  $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx^i$  e  $\eta = \sum_{j=1}^N \eta_j dx^j$ , si ha

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,j=1}^N \omega_i \eta_j dx^i \wedge dx^j = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\omega_i \eta_j - \omega_j \eta_i) dx^i \wedge dx^j = \sum_{+I} (\omega_{i_1} \eta_{i_2} - \omega_{i_2} \eta_{i_1}) e^I,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) &= \sum_{+I} (\omega_{i_1} \eta_{i_2} - \omega_{i_2} \eta_{i_1}) \det \begin{pmatrix} h_1^{i_1} & h_2^{i_1} \\ h_1^{i_2} & h_2^{i_2} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{+I} \det \left[ \begin{pmatrix} \omega_{i_1} & \omega_{i_2} \\ \eta_{i_1} & \eta_{i_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{i_1} & h_2^{i_1} \\ h_1^{i_2} & h_2^{i_2} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

**Osservazione 4.12.6** Sullo spazio  $V_r^*$  si può definire un prodotto scalare:

$$\langle \omega, \eta \rangle_{V_r^*} = \sum_{+J} \omega_J \eta_J,$$

e quindi una norma:

$$|\omega|_{V_r^*} = \sqrt{\sum_{+J} |\omega_J|^2}.$$

Trattandosi di uno spazio di dimensione finita,  $V_r^*$  è completo rispetto a questa norma e quindi è uno spazio di Hilbert.



## Vettori e covettori di grado $r$

A partire da questo paragrafo, prenderemo come spazio vettoriale  $V = \mathbb{R}^N$  oppure  $V = (\mathbb{R}^N)^*$ . Nel primo caso, gli elementi di  $V_r^* = (\mathbb{R}^N)_r^*$ , cioè le applicazioni  $r$ -lineari alternanti su  $(\mathbb{R}^N)^r$ , si dicono *covettori di grado  $r$* , o brevemente  *$r$ -covettori*; nel secondo caso gli elementi di  $V_r^* = [(\mathbb{R}^N)^*]_r^*$ , ossia le applicazioni  $r$ -lineari alternanti su  $[(\mathbb{R}^N)^*]^r$ , si chiamano *vettori di grado  $r$* , o  *$r$ -vettori*. Denoteremo con  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  lo spazio degli  $r$ -covettori e con  $\mathbb{R}_r^N$  lo spazio degli  $r$ -vettori; questa notazione è giustificata dal fatto che vi è una dualità naturale fra  $r$ -covettori e  $r$ -vettori, che illustreremo fra poco.

Per quanto visto nel caso di un generico spazio vettoriale  $V$ , gli  $r$ -covettori si rappresentano in modo unico nella forma

$$\omega = \sum_{+I} \omega_I e^I \quad \forall \omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*,$$

ove, per ogni  $r$ -pla crescente  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ,  $e^I = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$  è l'elemento di  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  definito da

$$e^I(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \det\{h_{j_k}^{i_k}\} \quad \forall \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^N,$$

mentre  $\omega_I = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r})$ .

Nello spazio degli  $r$ -covettori  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  è definito il prodotto scalare

$$\langle \omega, \eta \rangle_{N,r,*} = \sum_{+I} \omega_I \eta_I \quad \forall \omega, \eta \in (\mathbb{R}_r^N)^*,$$

il quale, con la norma indotta

$$|\omega|_{N,r,*} = \sqrt{\sum_{+I} (\omega_I)^2} \quad \forall \omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*,$$

rende  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  uno spazio di Hilbert; rispetto ad esso, come è facile verificare, la famiglia  $\{e^I : I \text{ } r\text{-pla crescente}\}$  è una base ortonormale.

Naturalmente, se  $r = 1$  ritroviamo lo spazio delle applicazioni lineari su  $\mathbb{R}^N$ , una base del quale è ovviamente data da  $e^1, \dots, e^N$ , ove

$$e^i(\mathbf{h}) = \pi_i(\mathbf{h}) = h^i = \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle_N \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, \dots, N.$$

Per quanto riguarda gli  $r$ -vettori, ossia le applicazioni  $r$ -lineari alternanti su  $[(\mathbb{R}^N)^*]^r$ , ricordiamo anzitutto che per ogni coppia di  $r$ -ple  $I, J$  è definita la quantità, introdotta in precedenza,

$$\delta_J^I = \det\{\delta_{j_k}^{i_k}\}$$

ove i numeri  $\delta_j^i$  sono gli elementi della matrice identità. Ciò premesso, per ogni  $r$ -pla crescente  $J$  consideriamo l' $r$ -vettore  $\mathbf{e}_J$  che sulle  $r$ -ple di elementi della base  $\{e^i\}_{1 \leq i \leq N}$  agisce nel modo seguente:

$$\mathbf{e}_J(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}) = \delta_J^I \quad \forall I = \{i_1, \dots, i_r\} \text{ crescente.}$$

Allora, dato un qualunque  $r$ -vettore  $\mathbf{h}$ , posto

$$h^J = \mathbf{h}(e^{j_1}, \dots, e^{j_r})$$

esso si rappresenta in modo unico come

$$\mathbf{h} = \sum_{+J} h^J \mathbf{e}_J,$$

poiché per ogni  $r$ -pla crescente di elementi della base  $\{e^i\}_{1 \leq i \leq N}$  vale

$$\sum_{+J} h^J \mathbf{e}_J(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}) = \sum_{+J} h^J \delta_J^I = h^I = \mathbf{h}(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}).$$

Nello spazio degli  $r$ -vettori  $\mathbb{R}_r^N$  è definito il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle_{N,r} = \sum_{+I} h^I k^I \quad \forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}_r^N,$$

che, con la norma indotta

$$|\mathbf{h}|_{N,r} = \sqrt{\sum_{+I} (h^I)^2} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}_r^N,$$

rende  $\mathbb{R}_r^N$  uno spazio di Hilbert; rispetto ad esso, si vede subito che la famiglia  $\{\mathbf{e}_I : I \text{ } r\text{-pla crescente}\}$  è una base ortonormale.

La dualità fra  $r$ -covettori e  $r$ -vettori è data dall'applicazione

$$\langle \omega, \mathbf{h} \rangle_{N,r}^* = \sum_{+I} \omega_I h^I, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}_r^N, \omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*;$$

si noti che in particolare risulta

$$\langle e^I, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \langle e^I, e^J \rangle_{N,r,*} = \langle \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r} = \delta_J^I.$$

Tramite questa applicazione è immediato verificare che gli spazi  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  e  $\mathbb{R}_r^N$  sono l'uno il duale dell'altro: questo fatto giustifica la notazione utilizzata per questi spazi.

**Osservazione 4.12.7** La distinzione fra covettori e vettori è legata al loro comportamento rispetto alle applicazioni lineari. Sia  $\mathbf{L} : \mathbb{R}_r^N \rightarrow \mathbb{R}_r^N$  un'applicazione lineare: posto  $\mathbf{h}_J = \mathbf{L}\mathbf{e}_J$ , sarà  $\mathbf{h}_J = \sum_{+H} c_J^H \mathbf{e}_H$  per opportuni coefficienti  $c_J^H$ : dunque se  $\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x}$  avremo

$$\mathbf{y} = \mathbf{L} \left( \sum_{+J} x^J \mathbf{e}_J \right) = \sum_{+J} x^J \mathbf{h}_J = \sum_{+J,+H} x^J c_J^H \mathbf{e}_H$$

da cui

$$y^I = \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_I \rangle_{N,r} = \sum_{+J} c_J^I x^J \quad \forall I \text{ crescente:}$$

quindi rispetto alle applicazioni lineari gli  $r$ -vettori si trasformano in modo *controvariante*, ossia come vettori-colonna.

Consideriamo adesso l'applicazione  $L^*$ , aggiunta di  $\mathbf{L}$ , che è lineare da  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  in  $(\mathbb{R}_r^N)^*$ : risulta  $\eta = L^*\omega$  se e solo se

$$\langle \eta, \mathbf{x} \rangle_{N,r}^* = \langle L^*\omega, \mathbf{x} \rangle_{N,r}^* = \langle \omega, \mathbf{Lx} \rangle_{N,r}^*$$

e in particolare, posto  $\xi^I = L^*e^I$ , avremo

$$\langle \xi^I, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \langle e^I, \mathbf{L}\mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \langle e^I, \mathbf{h}_J \rangle_{N,r}^* = c_J^I.$$

Dunque si ha  $\xi^I = \sum_{+J} c_J^I e^J$ , da cui

$$\eta_J = \langle \eta, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \langle L^*\omega, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \sum_{+I} \omega_I \langle L^*e^I, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \sum_{+I} \omega_I \langle \xi^I, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^*,$$

e infine

$$\eta_J = \sum_{+I} \omega_I c_J^I, \quad \forall J \text{ crescente:}$$

perciò rispetto alle applicazioni lineari gli  $r$ -covettori si trasformano in modo *covariante*, ossia come vettori-riga.

Passiamo adesso a descrivere un'importante proprietà di vettori e covettori.

**Definizione 4.12.8** Un  $r$ -vettore  $\alpha \in \mathbb{R}_r^N$  si dice decomponibile se è della forma

$$\alpha = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r,$$

con  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^N$ . Similmente, un  $r$ -covettore  $\omega$  si dice decomponibile se è della forma

$$\omega = a^1 \wedge \dots \wedge a^r,$$

con  $a^1, \dots, a^r \in (\mathbb{R}^N)^*$ .

Dunque se  $\alpha$  è un  $r$ -vettore decomponibile si ha

$$\alpha = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r = \sum_{j_1=1}^N \dots \sum_{j_r=1}^N (h_1^{j_1} \dots h_r^{j_r}) \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_r} = \sum_{+J} \det\{h_i^{j_k}\} \mathbf{e}_J,$$

ed in particolare  $\alpha^J = \det\{h_i^{j_k}\}$ , mentre se  $\omega$  è un  $r$ -covettore decomponibile si ha

$$\omega = a^1 \wedge \dots \wedge a^r = \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_r=1}^N (a_{i_1}^1 \dots a_{i_r}^r) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r} = \sum_{+I} \det\{a_{i_h}^j\} e^I,$$

ed in particolare  $\omega_I = \det\{a_{i_h}^j\}$ .

**Esempi 4.12.9** (1) Ogni 1-vettore o 1-covettore è decomponibile.

(2) Ogni  $N$ -vettore o  $N$ -covettore è decomponibile: infatti è della forma

$$c \mathbf{e}_{1\dots N} = (c \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_N, \quad \text{ovvero} \quad c e^{1\dots N} = (c e^1) \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^N.$$

(3) Gli  $r$ -vettori  $\mathbf{e}_J$  e gli  $r$ -covettori  $\mathbf{e}^I$  sono decomponibili:

$$\mathbf{e}_J = \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_r}, \quad e^I = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}.$$

(4) Esistono  $r$ -vettori e  $r$ -covettori non decomponibili (esercizio 4.12.12).

Vediamo adesso come opera la dualità fra  $r$ -covettori e  $r$ -vettori decomponibili.

**Proposizione 4.12.10** Sia  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$  un  $r$ -vettore decomponibile. Allora

$$\langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) \quad \forall \omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*.$$

**Dimostrazione** L'applicazione

$$\tilde{\omega}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \langle \omega, \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r \rangle_{N,r}^*$$

è  $r$ -lineare ed alternante, per le proprietà del prodotto esterno. D'altra parte, fissata una  $r$ -pla crescente  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$  e calcolando tale applicazione in  $(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_r})$ , si ottiene il valore  $\langle \omega, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \omega_J$ : quindi  $\tilde{\omega}$  ha gli stessi valori di  $\omega$  su una base di  $\mathbb{R}_r^N$ . Ne segue che  $\tilde{\omega}$  coincide con  $\omega$ .  $\square$

**Proposizione 4.12.11** Sia  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$  un  $r$ -vettore decomponibile e sia  $\omega = a^1 \wedge \dots \wedge a^r$  un  $r$ -covettore decomponibile. Allora

$$\langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \det\{\langle a^k, \mathbf{h}_i \rangle_N^*\}.$$

**Dimostrazione** L'applicazione

$$\tilde{\omega}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \det\{\langle a^k, \mathbf{h}_i \rangle_N^*\}$$

è  $r$ -lineare e alternante per le proprietà del determinante. Essa prende gli stessi valori di  $\omega$  sugli  $r$ -vettori  $\mathbf{e}_I$  in quanto

$$\tilde{\omega}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) = \det\{\langle a^k, \mathbf{e}_{i_h} \rangle_N^*\} = \det\{a_{i_h}^k\} = \omega_I;$$

pertanto  $\tilde{\omega}$  coincide con  $\omega$ . Ne segue, per la proposizione 4.12.10,

$$\langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \det\{\langle a^k, \mathbf{h}_i \rangle_N^*\}. \quad \square$$

**Corollario 4.12.12** Siano  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$  e  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r$  due  $r$ -vettori decomponibili e siano  $\omega = a^1 \wedge \dots \wedge a^r$  e  $\zeta = a_*^1 \wedge \dots \wedge a_*^r$  due  $r$ -covettori decomponibili. Allora

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r} = \det\{\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_j \rangle_N\}, \quad \langle \omega, \zeta \rangle_{N,r,*} = \det\{\langle a^i, a_*^j \rangle_{N,*}\},$$

ove  $\langle a, b \rangle_{N,*}$  è il prodotto scalare in  $(\mathbb{R}^N)^*$ .

**Dimostrazione** Per  $i = 1, \dots, r$  sia  $b^i$  il covettore le cui coordinate sono quelle del vettore  $\mathbf{h}_i$ : dunque  $b_j^i = h_i^j$  per ogni  $i = 1, \dots, r$  e  $j = 1, \dots, N$ . Allora anche l' $r$ -covettore  $b = b^1 \wedge \dots \wedge b^r$  ha coordinate uguali all' $r$ -vettore  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$ , in quanto per ogni  $r$ -pla crescente  $J$  si ha

$$\langle b^1 \wedge \dots \wedge b^r, \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \det\{b_{jk}^i\} = \det\{h_i^{jk}\} = \langle \mathbf{e}^J, \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r \rangle_{N,r}^*.$$

Quindi, per la proposizione 4.12.11,

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r} = \langle b, \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r}^* = \det\{\langle b^i, \mathbf{h}'_j \rangle_N^*\} = \det\{\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_j \rangle_N\}.$$

Il calcolo per  $\langle \omega, \zeta \rangle_{N,r,*}$  è analogo.  $\square$

**Proposizione 4.12.13** *Siano  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  due  $r$ -vettori tali che  $\langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \langle \omega, \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r}^*$  per ogni  $r$ -covettore decomponibile  $\omega$ . Allora  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ .*

**Dimostrazione** Poiché gli  $\mathbf{e}^I$  sono decomponibili, per ogni  $r$ -pla crescente  $I$  si ha per ipotesi

$$\alpha^I = \langle \mathbf{e}^I, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \langle \mathbf{e}^I, \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r}^* = \beta^I,$$

da cui  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ .  $\square$

Gli  $r$ -vettori decomponibili hanno un importante significato geometrico, che ora illustreremo.

Anzitutto, se  $P \subseteq \mathbb{R}^N$  è un sottospazio vettoriale  $r$ -dimensionale ( $1 \leq r \leq N$ ), una *base ordinata* di  $P$  è una  $r$ -pla ordinata  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r)$  di vettori che siano una base per  $P$ . Vale allora il seguente

**Teorema 4.12.14** *Siano  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^N$ .*

- (i)  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$  sono linearmente dipendenti se e solo se  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r = \mathbf{0}$ .
- (ii) Se  $P$  è un sottospazio  $r$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^N$ ,  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r)$  è una base ordinata di  $P$  e  $(\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_r)$  è un'altra base ordinata di  $P$ , allora esiste  $c \neq 0$  tale che  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r = c(\mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r)$ .
- (iii) Se  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r)$  e  $(\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_r)$  sono basi ordinate di due sottospazi  $r$ -dimensionali  $P, P'$  di  $\mathbb{R}^N$ , e se risulta  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r = c(\mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r)$  con  $c \neq 0$ , allora  $P = P'$ .

Questo teorema ci dice che ogni sottospazio  $r$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^N$  è individuato da un unico  $r$ -vettore decomponibile (a meno, naturalmente, di una costante moltiplicativa). Ciò ci permetterà, come vedremo più avanti, di attribuire un'*orientazione* ai sottospazi di  $\mathbb{R}^N$  e di definire un *volume  $r$ -dimensionale* su certi sottoinsiemi di un dato sottospazio  $r$ -dimensionale.

**Dimostrazione** (i) Supponiamo che gli  $\mathbf{h}_i$  siano linearmente dipendenti. Posto  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$ , per ogni  $r$ -covettore  $\omega$  si ha (proposizione 4.12.10)

$$\langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = 0,$$

essendo  $\omega$  alternante. Dalla proposizione 4.12.13 si ottiene  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ .

Viceversa, sia  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r = \mathbf{0}$ . Se, per assurdo, gli  $\mathbf{h}_i$  fossero linearmente indipendenti, potremmo scegliere  $a^1, \dots, a^r \in (\mathbb{R}^N)^*$  tali che  $\langle a^i, \mathbf{h}_j \rangle_N^* = \delta_j^i$ ; ma allora, posto  $\omega = a^1 \wedge \dots \wedge a^r$ , dalla proposizione 4.12.11 avremmo

$$0 = \langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \det\{\langle a^i, \mathbf{h}_j \rangle_N^*\} = \det\{\delta_j^i\} = 1,$$

il che è assurdo.

(ii) Per ipotesi, ogni  $\mathbf{h}'_j$  è combinazione lineare degli  $\mathbf{h}_i$ :

$$\mathbf{h}'_j = \sum_{k=1}^r c_j^k \mathbf{h}_k, \quad j = 1, \dots, r.$$

Dunque se  $\omega$  è un  $r$ -covettore decomponibile,  $\omega = a^1 \wedge \dots \wedge a^r$ , posto  $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r$  si ha per la proposizione 4.12.11

$$\begin{aligned} \langle \omega, \boldsymbol{\alpha}' \rangle_{N,r}^* &= \det\{\langle a^i, \mathbf{h}'_j \rangle_N^*\} = \det\left\{\sum_{k=1}^r c_j^k \langle a^i, \mathbf{h}_k \rangle_N^*\right\} = \\ &= \det\{c_j^k\} \cdot \det\{\langle a^i, \mathbf{h}_k \rangle_N^*\} = c \langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \langle \omega, c\boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^*, \end{aligned}$$

ove  $c = \det\{c_j^k\}$ . Dalla proposizione 4.12.13 segue  $\boldsymbol{\alpha}' = c\boldsymbol{\alpha}$ , e quindi la tesi, dato che  $c \neq 0$  a causa di (i).

(iii) Proviamo che ogni  $\mathbf{h}'_j$  è combinazione lineare degli  $\mathbf{h}_i$ . Se così non fosse, uno tra gli  $\mathbf{h}'_j$ , ad esempio  $\mathbf{h}'_1$ , sarebbe indipendente da  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ : dunque gli  $r+1$  vettori  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r, \mathbf{h}'_1$  sarebbero linearmente indipendenti, cosicché  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r \wedge \mathbf{h}'_1 \neq \mathbf{0}$ . D'altra parte,

$$\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r \wedge \mathbf{h}'_1 = c(\mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r \wedge \mathbf{h}'_1) = c\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

in quanto ovviamente  $\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_r, \mathbf{h}'_1$  sono linearmente dipendenti. Ciò è assurdo.  $\square$

**Osservazione 4.12.15** Dal teorema precedente segue in particolare che se  $\boldsymbol{\alpha}$  è un  $r$ -vettore decomponibile, esso individua un sottospazio  $r$ -dimensionale  $P$  che dipende solo da  $\boldsymbol{\alpha}$ , e non dal modo in cui  $\boldsymbol{\alpha}$  viene decomposto: infatti se  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r$ , allora  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r)$  e  $(\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_r)$  generano lo stesso sottospazio.

## Applicazioni lineari indotte

Sia  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$  un'applicazione lineare. Fissate su  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^N$  le basi canoniche, e posto  $\mathbf{v}_j = \mathbf{L}\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , la matrice associata a  $\mathbf{L}$  ha i  $\mathbf{v}_j$  come vettori colonna; detti  $c_j^i$  gli elementi di tale matrice, sarà  $\mathbf{v}_j = (c_j^1, \dots, c_j^N)$ . Vogliamo associare a  $\mathbf{L}$ , per ogni  $r \geq 1$ , un'applicazione lineare fra  $r$ -vettori  $\mathbf{L}_r : \mathbb{R}_r^m \rightarrow \mathbb{R}_r^N$  che abbia la seguente proprietà:

$$\mathbf{L}_r(\mathbf{k}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{k}_r) = \mathbf{L}\mathbf{k}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{L}\mathbf{k}_r \quad \forall \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r \in \mathbb{R}^m.$$

Ciò si ottiene nel modo seguente: se  $I$  è una  $r$ -pla crescente di indici fra 1 e  $m$ , definiamo

$$\mathbf{L}_r \mathbf{e}_I = \mathbf{v}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{i_r} = \mathbf{L}\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L}\mathbf{e}_{i_r};$$

poi, per rispettare la linearità, poniamo

$$\mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha} = \sum_{+I} \alpha^I \mathbf{L}_r \mathbf{e}_I \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m.$$

Le applicazioni  $\mathbf{L}_r$  così definite si dicono *applicazioni lineari indotte* da  $\mathbf{L}$ . Osserviamo che se  $r > m$  si ha  $\mathbb{R}_r^m = \{\mathbf{0}\}$  e  $\mathbf{L}_r \equiv \mathbf{0}$ ; se invece  $r = 1$ , ovviamente  $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}$ .

La proposizione che segue ci assicura che le  $\mathbf{L}_r$  hanno la proprietà che cercavamo.

**Proposizione 4.12.16** *Se  $r, s \geq 1$  si ha*

$$\mathbf{L}_{r+s}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{L}_s \boldsymbol{\beta} \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_r^m, \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_s^m.$$

**Dimostrazione** Siano  $I$  una  $r$ -pla crescente e  $J$  una  $s$ -pla crescente. Per definizione,

$$\mathbf{L}_r \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{L}_s \mathbf{e}_J = \mathbf{L} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{i_r} \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_s}.$$

Se nella  $(r+s)$ -pla  $IJ$  c'è qualche indice ripetuto, allora  $\mathbf{L}_r \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{L}_s \mathbf{e}_J = \mathbf{0}$ , e d'altronde in tal caso  $\mathbf{L}_{r+s} \mathbf{e}_{IJ} = \mathbf{L}_{r+s} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Se invece  $IJ$  non contiene indici ripetuti, sia  $H$  il riordinamento crescente di  $IJ$ , ottenuto tramite  $p$  scambi: allora

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_r \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{L}_s \mathbf{e}_J &= (-1)^p \mathbf{L} \mathbf{e}_{h_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{h_{r+s}} = (-1)^p \mathbf{L}_{r+s} \mathbf{e}_H = \\ &= \mathbf{L}_{r+s}((-1)^p \mathbf{e}_H) = \mathbf{L}_{r+s} \mathbf{e}_{IJ} = \mathbf{L}_{r+s}(\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J). \end{aligned}$$

Dunque la tesi è vera per gli elementi delle basi di  $\mathbb{R}_r^m$  e  $\mathbb{R}_s^m$ ; quindi, per linearità, la tesi è vera per ogni  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_r^m$  e  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_s^m$ .  $\square$

**Osservazione 4.12.17** Procedendo induttivamente, si dimostra più in generale che

$$\mathbf{L}_{r_1+\dots+r_k}(\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\alpha}_k) = \mathbf{L}_{r_1} \boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{L}_{r_k} \boldsymbol{\alpha}_k \quad \forall \boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}_{r_i}^m, \quad \forall r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}^+,$$

e se in particolare  $k = r$  e  $r_i = 1$  per  $i = 1, \dots, r$ , si deduce la formula inizialmente richiesta.

**Proposizione 4.12.18** *Se  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_r^m$  e  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_r^N$ , allora si ha  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha}$  se e solo se per ogni  $r$ -pla crescente  $I$  risulta*

$$\beta^I = \sum_{+J} c_J^I \alpha^J,$$

ove  $c_J^I = \det\{c_{jk}^{ih}\}$  e  $(c_j^1, \dots, c_j^N) = \mathbf{L} \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**Dimostrazione** Dalla proposizione 4.12.11 si ha

$$c_J^I = \det\{c_{jk}^{ih}\} = \langle e^I, \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_r} \rangle_{N,r}^*,$$

quindi se  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha}$  otteniamo

$$\begin{aligned} \beta^I &= \langle e^I, \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r}^* = \langle e^I, \mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \sum_{+J} \alpha^J \langle e^I, \mathbf{L}_r \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \\ &= \sum_{+J} \alpha^J \langle e^I, \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_r} \rangle_{N,r}^* = \sum_{+J} \alpha^J c_J^I. \end{aligned}$$

Viceversa, se vale tale relazione allora ovviamente per ogni  $r$ -pla crescente  $I$  abbiamo

$$\langle e^I, \mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N,r}^* = \sum_{+J} \alpha^J c_J^I = \beta^I,$$

da cui  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha}$ .  $\square$

**Osservazione 4.12.19** Nel caso  $r = 1$ , dalla proposizione 4.12.18 si ritrovano le relazioni  $\beta^i = \sum_{j=1}^m c_j^i \alpha^j$ ,  $i = 1, \dots, N$ , che caratterizzano le coordinate di  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha}$ .

Accanto all'applicazione lineare  $\mathbf{L}_r$ , possiamo considerare la sua *aggiunta*, ossia l'applicazione lineare fra  $r$ -covettori  $L_r^* : (\mathbb{R}_r^N)^* \rightarrow (\mathbb{R}_r^m)^*$  definita da

$$\langle L_r^* \omega, \boldsymbol{\beta} \rangle_{m,r}^* = \langle \omega, \mathbf{L}_r \boldsymbol{\beta} \rangle_{N,r}^* \quad \forall \omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*, \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_r^m.$$

In particolare, per  $r = 1$  l'applicazione  $L^*$ , aggiunta di  $\mathbf{L}$ , è data da

$$b = L^* a \quad \iff \quad b_j = \sum_{i=1}^N a_i c_j^i,$$

cosicché, per ogni 1-covettore  $a$  e per ogni 1-vettore  $\mathbf{v}$ ,

$$\langle L^* a, \mathbf{v} \rangle_N^* = \langle a, \mathbf{L} \mathbf{v} \rangle_N^* = \sum_{i=1}^N a_i c_j^i v^j.$$

Per l'applicazione aggiunta  $L_r^*$  valgono formule e proprietà duali di quelle relative a  $\mathbf{L}_r$ . Ad esempio,  $L_r^*$  agisce sugli elementi della base  $\{e^I\}$  in modo analogo a quello di  $\mathbf{L}_r$ , poiché, indicando con  $w^i = L^* e^i$  i covettori riga della matrice associata a  $L$ , ossia  $w^i = (c_1^i, \dots, c_m^i)$ , si ha per ogni  $r$ -pla crescente  $I$

$$L_r^* e^I = w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_r} = L^* e^{i_1} \wedge \dots \wedge L^* e^{i_r}.$$

Infatti, in virtù della proposizione 4.12.11, per tutte le  $r$ -ple crescenti  $I, J$  si ha

$$\langle L_r^* e^I, \mathbf{e}_J \rangle_{m,r}^* = \langle e^I, \mathbf{L}_r \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = c_J^I = \det\{c_{j_k}^{i_h}\} = \langle w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_r}, \mathbf{e}_J \rangle_{m,r}^*.$$

Inoltre, vale l'analogo della proposizione 4.12.16 (e anche la dimostrazione è del tutto simile):

$$L_{r+s}^*(\omega \wedge \xi) = L_r^* \omega \wedge L_s^* \xi \quad \forall \omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*, \quad \forall \xi \in (\mathbb{R}_s^N)^*.$$

Induttivamente si prova poi l'analogo dell'osservazione 4.12.17:

$$L_{r_1+\dots+r_k}^*(a^1 \wedge \dots \wedge a^k) = L_{r_1}^* a^1 \wedge \dots \wedge L_{r_k}^* a^k \quad \forall a^i \in (\mathbb{R}_{r_i}^N)^*, \quad \forall r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}^+,$$

ed in particolare, per  $k = r$  e  $r_i = 1$ ,

$$L_r^*(a^1 \wedge \dots \wedge a^r) = L^* a^1 \wedge \dots \wedge L^* a^r \quad \forall a^1, \dots, a^r \in (\mathbb{R}^N)^*.$$



Infine, vale l'analogo della proposizione 4.12.18: se  $\omega \in (\mathbb{R}_r^N)^*$  e  $\xi \in (\mathbb{R}_r^m)^*$  si ha  $\xi = L_r^* \omega$  se e solo se per ogni  $r$ -pla crescente  $J$  risulta

$$\xi_J = \sum_{+I} c_J^I \omega_I;$$

infatti  $\xi = L_r^* \omega$  se e solo se

$$\xi_J = \langle L_r^* \omega, \mathbf{e}_J \rangle_{m,r}^* = \langle \omega, \mathbf{L}_r \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \sum_{+I} \omega_I \langle e^I, \mathbf{L}_r \mathbf{e}_J \rangle_{N,r}^* = \sum_{+I} \omega_I c_J^I.$$

**Esempio 4.12.20** Consideriamo un'isometria lineare  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ : allora anche  $\mathbf{L}_r : \mathbb{R}_r^N \rightarrow \mathbb{R}_r^N$  e  $L_r^* : (\mathbb{R}_r^N)^* \rightarrow (\mathbb{R}_r^N)^*$  sono isometrie. Infatti, dalla relazione  $\boldsymbol{\beta} = L_r \boldsymbol{\alpha}$  segue, per il corollario 4.12.12 e grazie all'ortogonalità dei vettori  $\mathbf{L} \mathbf{e}_i$ ,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\beta}|_{N,r}^2 &= |\mathbf{L}_r \boldsymbol{\alpha}|_{N,r}^2 = \left| \sum_{+I} \alpha^I \mathbf{L}_r \mathbf{e}_I \right|_{N,r}^2 = \\ &= \sum_{+I,+J} \alpha^I \alpha^J \langle \mathbf{L} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{i_r}, \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_r} \rangle_{N,r} = \\ &= \sum_{+I,+J} \alpha^I \alpha^J \det \{ \langle \mathbf{L} \mathbf{e}_{i_h}, \mathbf{L} \mathbf{e}_{j_k} \rangle_N \} = \sum_{+I,+J} \alpha^I \alpha^J \det \{ \delta_{j_k}^{i_h} \} = \\ &= \sum_{+I,+J} \alpha^I \alpha^J \delta_J^I = \sum_{+I} (\alpha^I)^2 = |\boldsymbol{\alpha}|_{N,r}^2. \end{aligned}$$

Similmente, essendo  $L^*$  a sua volta un'isometria, dalla relazione  $\zeta = L_r^* \omega$  e dall'ortogonalità dei covettori  $L^* \mathbf{e}^j$ , otteniamo allo stesso modo

$$\begin{aligned} |\zeta|_{N,r,*}^2 &= |L_r^* \omega|_{N,r,*}^2 = \\ &= \sum_{+I,+J} \omega_I \omega_J \det \{ \langle L^* \mathbf{e}^{i_h}, L^* \mathbf{e}^{j_k} \rangle_{N,*} \} = \sum_{+I,+J} \omega_I \omega_J \delta_J^I = |\omega|_{N,r,*}^2. \end{aligned}$$

## Orientazioni di un sottospazio

Vediamo adesso come, per mezzo del teorema 4.12.14, sia possibile *orientare* i sottospazi di  $\mathbb{R}^N$ .

**Definizione 4.12.21** Sia  $P$  un sottospazio  $r$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^N$ . Un  $r$ -vettore decomponibile  $\boldsymbol{\alpha}$  è un'orientazione di  $P$  se si ha:

(i)  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$ , ove  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r)$  è una base ordinata di  $P$ ;

(ii)  $|\boldsymbol{\alpha}|_{N,r} = \sqrt{\sum_{+I} (\alpha^I)^2} = 1$ .

Quante sono le possibili orientazioni di un sottospazio  $P$ , orientato con  $\alpha$ ? Se  $\beta = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r$  è un'altra orientazione di  $P$ , sarà  $\beta = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r$  ove  $(\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_r)$  è una base ordinata di  $P$  e  $|\beta|_{N,r} = 1$ ; ma per il teorema 4.12.14 deve essere  $\beta = c\alpha$ , da cui  $|c| = 1$  e pertanto  $c = \pm 1$ . Ne segue  $\beta = \pm\alpha$ , e dunque  $P$  ha solo due orientazioni possibili:  $\alpha$  e  $-\alpha$ .

Date due orientazioni  $\alpha = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$  e  $\beta = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_r$  di un dato sottospazio  $r$ -dimensionale  $P$ , come si fa a riconoscere se esse sono concordi o discordi? Poiché, per il corollario 4.12.12,

$$\pm 1 = \pm |\alpha|_{N,r}^2 = \langle \alpha, \beta \rangle_{N,r} = \det\{\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_j \rangle_N\},$$

le due orientazioni coincidono se  $\det\{\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_j \rangle_N\} = 1$  e sono opposte se tale determinante vale  $-1$ .

**Esempi 4.12.22 (1)**  $\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_r}$  è un'orientazione sullo spazio  $r$ -dimensionale  $P$  generato da  $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}$ , in quanto  $|\mathbf{e}_I|_{N,r} = 1$ .

**(2)** Se  $r = N$ , si ha  $P = \mathbb{R}^N$  e le due orientazioni sono  $\pm \mathbf{e}_{1\dots N}$ : possiamo chiamarle positiva e negativa. Se  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_N)$  è una base ordinata di  $\mathbb{R}^N$ , essa indurrà l'orientazione positiva se  $\det\{h_j^i\} > 0$ , negativa se  $\det\{h_j^i\} < 0$  (ricordiamo che  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_N = \det\{h_j^i\} \mathbf{e}_{1\dots N}$ ).

## Volume $r$ -dimensionale di un parallelepipedo

Vediamo adesso come definire la nozione di volume  $r$ -dimensionale sui parallelepipedi  $r$ -dimensionali di  $\mathbb{R}^N$ . Sia  $K$  il parallelepipedo di vertice  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ , generato da  $r$  vettori  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ :

$$K = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^r \lambda^i \mathbf{h}_i, 0 \leq \lambda^i \leq 1 \right\}.$$

**Definizione 4.12.23** *Il volume  $r$ -dimensionale di  $K$  è il numero non negativo*

$$v_r(K) = |\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r|_{N,r}.$$

Per giustificare questa definizione, osserviamo i seguenti fatti.

- È naturale che il volume sia invariante per traslazioni: ed infatti dalla definizione segue  $v_r(K) = v_r(K - \mathbf{x}_0)$ ; si noti che l'insieme  $K - \mathbf{x}_0$  è incluso nel sottospazio generato da  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ . In particolare, non è restrittivo supporre  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .
- Se i vettori  $\mathbf{h}_i$  sono linearmente dipendenti, allora  $v_r(K) = 0$ , come è giusto: infatti in tal caso  $K$  è contenuto in un sottospazio di dimensione minore di  $r$ .
- Se  $r = N$ , allora

$$v_N(K) = |\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_N|_{N,N} = |\det\{h_j^i\}| = m_N(K),$$

ove  $m_N$  è la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ : ciò segue dall'osservazione 3.14.12 (1).

- Nel caso  $1 \leq r < N$ , esiste una rotazione  $\mathbf{T}$  che porta il sottospazio  $r$ -dimensionale contenente  $K$  nello spazio  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^j = 0 \text{ per } j = r + 1, \dots, N\}$ , che possiamo identificare con  $\mathbb{R}^r$ . Osserviamo che  $\mathbf{T}(K) \subset \mathbb{R}^r$  è il parallelepipedo generato dai vettori  $\mathbf{T}\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{T}\mathbf{h}_r$ . La misura di Lebesgue  $r$ -dimensionale di  $\mathbf{T}(K)$  è data, come sappiamo dall'osservazione 3.14.12 (1), da  $m_r(\mathbf{T}(K)) = |\det \mathbf{A}|$ , ove  $\mathbf{A}$  è la matrice  $r \times r$  le cui colonne sono formate dalle prime  $r$  componenti dei vettori  $\mathbf{T}\mathbf{h}_i$ . Pertanto, grazie al corollario 4.12.12,

$$m_r(\mathbf{T}(K)) = |\det\{[Th_j]^i\}|.$$

D'altra parte, poiché i vettori  $\mathbf{T}\mathbf{h}_j$  hanno le ultime  $N - r$  componenti nulle, nella somma

$$|\mathbf{T}\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{T}\mathbf{h}_r|_{N,r} = \sqrt{\sum_{+I} (\det\{[Th_j]^{i_k}\})^2}$$

tutti gli addendi sono nulli ad eccezione di quello relativo alla  $r$ -pla  $\{1, \dots, r\}$ : pertanto

$$m_r(\mathbf{T}(K)) = |\det\{[Th_j]^i\}| = |\mathbf{T}\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{T}\mathbf{h}_r|_{N,r}.$$

Infine, poiché  $\mathbf{T}$  è un'isometria, dall'esempio 4.12.20 si ha

$$m_r(\mathbf{T}(K)) = |\mathbf{T}\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{T}\mathbf{h}_r|_{N,r} = |\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r|_{N,r} = v_r(K),$$

cosicché il volume  $r$ -dimensionale attribuito a  $K$  è uguale alla misura  $r$ -dimensionale che esso ha, dopo esser stato opportunamente ruotato, come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^r$ .

- Come osservazione finale, notiamo che se i vettori  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$  sono fra loro ortogonali, risulta

$$v_r(K) = |\mathbf{h}_1|_N \cdot \dots \cdot |\mathbf{h}_r|_N :$$

infatti in tal caso  $\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j \rangle_N = |\mathbf{h}_i|_N \cdot |\mathbf{h}_j|_N \cdot \delta_j^i$ , e dunque dal corollario 4.12.12 segue

$$\begin{aligned} v_r(K) &= |\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r|_{N,r} = \sqrt{\det\{\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j \rangle_N\}} = \\ &= \sqrt{\det\{|\mathbf{h}_i|_N \cdot |\mathbf{h}_j|_N \cdot \delta_j^i\}} = |\mathbf{h}_1|_N \cdot \dots \cdot |\mathbf{h}_r|_N . \end{aligned}$$

In altre parole, quando  $K$  è un parallelepipedo rettangolo il suo volume è, come è giusto, il prodotto delle lunghezze dei lati.

Nei paragrafi successivi estenderemo le nozioni di orientazione e di volume  $r$ -dimensionale alle varietà  $r$ -dimensionali  $V \subset \mathbb{R}^N$ .

## Vettori e covettori aggiunti

Dato un  $r$ -vettore  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_r^N$ , vogliamo associare ad esso un  $(N - r)$ -vettore, che chiameremo *aggiunto* di  $\boldsymbol{\alpha}$  e indicheremo con  $*\boldsymbol{\alpha}$ .

Cominciamo con il caso  $r = N - 1$ , che è quello che più ci interesserà. Possiamo scrivere, per ogni  $(N - 1)$ -vettore  $\alpha$ ,

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha^{i'} \mathbf{e}_{i'},$$

ove abbiamo denotato con  $i'$  la  $(N - 1)$ -pla crescente di indici fra 1 e  $N$  nella quale manca l'indice  $i$ . Ciò premesso:

**Definizione 4.12.24** Se  $\alpha$  è un  $(N - 1)$ -vettore, il suo aggiunto  $*\alpha$  è l' $1$ -vettore definito nel modo seguente:

(i)  $*\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ;

(ii)  $*\mathbf{e}_{i'} = (-1)^{i-1} \mathbf{e}_i$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ ;

(iii) se  $\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha^{i'} \mathbf{e}_{i'}$ , allora  $*\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha^{i'} (*\mathbf{e}_{i'}) = \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \alpha^{i'} \mathbf{e}_i$ .

Osserviamo che, essendo  $(*\alpha)^i = (-1)^{i-1} \alpha^{i'}$  per ogni indice  $i$ , si ha

$$|*\alpha|_{N,1} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [(*\alpha)^i]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\alpha^{i'})^2} = |\alpha|_{N,N-1},$$

il che ci dice in particolare che la mappa  $\alpha \mapsto *\alpha$  è iniettiva.

Il significato geometrico del vettore  $*\alpha$  è espresso dalla seguente

**Proposizione 4.12.25** Consideriamo un  $(N - 1)$ -vettore decomponibile  $\alpha = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{N-1}$ . Valgono i seguenti fatti:

(i)  $*\alpha$  è ortogonale al sottospazio  $P$  generato da  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}$ ;

(ii) se  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , allora  $\{*\alpha, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}\}$  è una base ordinata di  $\mathbb{R}^N$  che induce l'orientazione positiva  $\mathbf{e}_{1\dots N}$ , e in particolare  $(*\alpha) \wedge \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{N-1} = c \mathbf{e}_{1\dots N}$  con  $c > 0$ ;

(iii) si ha  $|*\alpha|_{N,1} = |\alpha|_{N,N-1} = v_{N-1}(K)$ , ove  $K$  è il parallelepipedo di vertice  $\mathbf{0}$  generato da  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}$ .

**Dimostrazione** Se  $\alpha = \mathbf{0}$  allora valgono banalmente (i) e (iii). Se  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , le tre condizioni

(i)  $\mathbf{h} \perp P$ ,

(ii)  $\{\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}\}$  è una base ordinata di  $\mathbb{R}^N$  con orientazione  $\mathbf{e}_{1\dots N}$ ,

(iii)  $|\mathbf{h}|_N = |\alpha|_{N,N-1}$

individuano univocamente un vettore  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ : proviamo che  $\mathbf{h} = *\alpha$ .

Sia  $\{\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_{N-1}\}$  una base ortogonale ordinata per  $P$ : dunque  $\langle \mathbf{h}'_i, \mathbf{h}'_j \rangle_N = 0$  per  $i \neq j$ .

Per il teorema 4.12.14 si ha  $\alpha = b \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_{N-1}$  con  $b \neq 0$ ; sostituendo  $b \mathbf{h}'_1$  a  $\mathbf{h}'_1$  possiamo supporre  $b = 1$ , ottenendo

$$\alpha = \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_{N-1}.$$

La condizione (i) assicura che  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}'_i \rangle_N = 0$  per  $i = 1, \dots, N-1$ ; quindi  $\mathbf{h} \wedge \alpha$ , essendo il prodotto esterno di  $N$  vettori ortogonali, per il corollario 4.12.12 verifica

$$|\mathbf{h} \wedge \alpha|_{N,N} = |\mathbf{h} \wedge \mathbf{h}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}'_{N-1}|_{N,N} = |\mathbf{h}|_N \cdot |\mathbf{h}'_1|_N \cdot \dots \cdot |\mathbf{h}'_{N-1}|_N = |\mathbf{h}|_N \cdot |\alpha|_{N,N-1}.$$

D'altra parte,  $\mathbf{h} \wedge \alpha$  è un  $N$ -vettore e quindi esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{h} \wedge \alpha = c \mathbf{e}_{1\dots N}$ ; inoltre  $c > 0$  per la condizione (ii). Pertanto

$$|\mathbf{h}|_N \cdot |\alpha|_N = |\mathbf{h}|_N \cdot |\alpha|_{N,N-1} = |\mathbf{h} \wedge \alpha|_{N,N} = |c| = c.$$

Ma con un calcolo diretto si trova anche

$$c \mathbf{e}_{1\dots N} = \mathbf{h} \wedge \alpha = \sum_{i,j=1}^N h^i \alpha^{j'} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_{j'} = \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} h^i \alpha^{i'} \mathbf{e}_{1\dots N} = \sum_{i=1}^N h^i (*\alpha)^i \mathbf{e}_{1\dots N},$$

da cui  $|\mathbf{h}|_N \cdot |\alpha|_N = c = \sum_{i=1}^N h^i (*\alpha)^i = \langle \mathbf{h}, *\alpha \rangle_N$ . Dunque per i vettori  $\mathbf{h}$  e  $*\alpha$  la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si riduce ad un'uguaglianza: ne segue che essi sono paralleli e concordi. Dato che, per la condizione (iii),  $|\mathbf{h}|_N = |*\alpha|_N$ , si conclude che i due vettori coincidono.

Il fatto che  $|*\alpha|_N$  sia uguale a  $v_{N-1}(K)$  segue da (ii) e dall'ultima osservazione successiva alla definizione 4.12.23.  $\square$

Una conseguenza della proposizione 4.12.25 è la seguente:

**Corollario 4.12.26** *Ogni  $(N-1)$ -vettore è decomponibile.*

**Dimostrazione** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}_{N-1}^N$ . Se  $\alpha = \mathbf{0}$  non c'è nulla da dimostrare. Se  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , poniamo  $\mathbf{h} = *\alpha$ : allora  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ . Sia  $P$  il sottospazio  $(N-1)$ -dimensionale ortogonale a  $\mathbf{h}$ : scelta una base ordinata  $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}\}$  di  $P$ , poniamo  $\beta = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{N-1}$ . Allora, per costruzione, si ha  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}_i \rangle_N = 0$  per  $i = 1, \dots, N-1$ . Inoltre, scambiando eventualmente  $\mathbf{h}_1$  con  $\mathbf{h}_2$ , possiamo supporre che  $\mathbf{h} \wedge \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{N-1} = c \mathbf{e}_{1\dots N}$  con  $c > 0$ , ed infine, scegliendo opportunamente  $c$ , non è restrittivo supporre che  $|\mathbf{h}|_N = |\beta|_{N,N-1}$ . Per la proposizione 4.12.25, deduciamo che  $*\alpha = \mathbf{h} = *\beta$ ; ne segue, per iniettività,  $\alpha = \beta$ . Pertanto  $\alpha$  coincide con l' $(N-1)$ -vettore decomponibile  $\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{N-1}$ .  $\square$

In modo del tutto analogo si definisce l'aggiunto  $*\omega$  di un  $(N-1)$ -covettore  $\omega$ : si pone  $*0 = 0$ ,  $*e^{i'} = (-1)^{i-1} e^i$  per  $i = 1, \dots, N$ , e poi, per linearità,

$$(*\omega)_i = (-1)^{i-1} \omega_{i'}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Passiamo ora a definire l'aggiunto di un  $r$ -vettore,  $0 \leq r \leq N$ . Se  $r = 0$ , definiamo come 0-vettori le costanti: l'aggiunto di  $c \in \mathbb{R}$  è l' $N$ -vettore

$$*\mathbf{c} = c \mathbf{e}_{1\dots N}.$$

Se  $r = N$ , l'aggiunto dell' $N$ -vettore  $c\mathbf{e}_{1\dots N}$  è la costante

$$*(c\mathbf{e}_{1\dots N}) = c.$$

Vediamo ora il caso  $0 < r < N$  (che ovviamente comprende anche il caso già visto  $r = N - 1$ ). Se  $I$  è una  $r$ -pla crescente, indichiamo con  $I'$  la  $(N - r)$ -pla crescente tale che  $I$  e  $I'$  non hanno indici comuni. Poniamo

$$\epsilon_I = \delta_{I'I}^{1\dots N} = (-1)^{p_I},$$

ove  $p_I$  è il numero di scambi che trasformano  $I'I$  in  $\{1, \dots, N\}$ .

**Esempio 4.12.27** Se  $N = 7$  e  $r = 3$ , allora

$$\epsilon_{157} = \delta_{2346157}^{1234567} = (-1)^5 = -1, \quad \epsilon_{367} = \delta_{1245367}^{1234567} = (-1)^2 = 1.$$

**Definizione 4.12.28** L'aggiunto dell' $r$ -vettore  $\alpha$  è l' $(N - r)$ -vettore  $*\alpha$  definito da

$$(*\alpha)^{I'} = \alpha^I \epsilon_I \quad \text{per ogni } I = \{i_1, \dots, i_r\} \text{ crescente.}$$

Si noti che per  $r = N - 1$  si ha  $I = i'$ ,  $I' = i$  e  $\epsilon_I = (-1)^{i-1}$ , per cui si ritrova la definizione già vista.

Dalla definizione è evidente che

$$\begin{aligned} *(\alpha + \beta) &= *\alpha + *\beta, \\ *(c\alpha) &= c(*\alpha) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \\ *\alpha = \mathbf{0} &\iff \alpha = \mathbf{0}; \end{aligned}$$

quindi l'operazione  $*$  è un isomorfismo lineare fra  $\mathbb{R}_r^N$  e  $\mathbb{R}_{N-r}^N$ . Esso conserva i prodotti scalari: infatti per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_r^N$  si ha

$$\langle *\alpha, *\beta \rangle_{N, N-r} = \sum_{+I} (*\alpha)^{I'} (*\beta)^{I'} = \sum_{+I} (\epsilon_I)^2 \alpha^I \beta^I = \sum_{+I} \alpha^I \beta^I = \langle \alpha, \beta \rangle_{N, r},$$

ed in particolare

$$|*\alpha|_{N, N-r} = |\alpha|_{N, r} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_r^N.$$

**Osservazioni 4.12.29 (1)** Si ha

$$*(*\alpha) = (-1)^{r(N-r)} \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_r^N.$$

A questo scopo osserviamo che

$$\epsilon_{I \in I'} = (-1)^{r(N-r)} \quad \text{per ogni } I = \{i_1, \dots, i_r\} \text{ crescente:}$$

infatti  $I'I$  si trasforma in  $II'$  con  $r(N - r)$  scambi, poiché ciascun indice di  $I$  deve fare  $N - r$  scambi per "attraversare"  $I'$ ; poi servono altri  $p_I$  scambi per trasformare  $II'$  in

$\{1, \dots, N\}$ . Ne segue  $\epsilon_{I'} = (-1)^{r(N-r)+p_I}$ ,  $\epsilon_I = (-1)^{p_I}$  e pertanto  $\epsilon_I \epsilon_{I'} = (-1)^{r(N-r)}$ .  
Di conseguenza

$$(* * \alpha)^I = (*\alpha)^{I'} \epsilon_{I'} = \alpha^I \epsilon_I \epsilon_{I'} = (-1)^{r(N-r)} \alpha^I,$$

come si voleva.

(2) Se  $\beta$  è un  $(N-r)$ -vettore e  $\alpha$  è un  $r$ -vettore, si ha la relazione

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{+I, +J} \alpha^I \beta^J \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J = \sum_{+I} \alpha^I \beta^{I'} \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_{I'} = \sum_{+I} \alpha^I \beta^{I'} \epsilon_{I'} \mathbf{e}_{1\dots N} = \langle \alpha, * \beta \rangle_{N, N-r} \mathbf{e}_{1\dots N}.$$

(3) Si noti che, in conseguenza di (2), si ha per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}_r^N$  e  $\beta \in \mathbb{R}_{N-r}^N$

$$\langle * \beta, \alpha \rangle_{N, N-r} = \langle \alpha, * \beta \rangle_{N, N-r} = * (\alpha \wedge \beta) = (-1)^{r(N-r)} * (\beta \wedge \alpha) = (-1)^{r(N-r)} \langle \beta, * \alpha \rangle_{N, r}.$$

Il significato geometrico dell'aggiunto di un  $r$ -vettore è analogo a quella del caso  $r = N-1$ : se  $\alpha \neq \mathbf{0}$  è un  $r$ -vettore decomponibile (cosa che, per  $r \in \{2, N-2\}$ , in generale non è garantita, come ci dice l'esercizio 4.12.12), allora si ha  $*\alpha = \mathbf{h}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_N$ , ove:

- (i)  $\{\mathbf{h}_{r+1}, \dots, \mathbf{h}_N\}$  è una base ordinata per il sottospazio  $P^\perp$  ortogonale al sottospazio  $P$  generato da  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ ;
- (ii)  $\{\mathbf{h}_{r+1}, \dots, \mathbf{h}_N, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r\}$  è una base ordinata di  $\mathbb{R}^N$  con orientazione  $\mathbf{e}_{1\dots N}$ ;
- (iii)  $|\mathbf{h}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_N|_{N, N-r} = |\alpha|_{N, r} = v_r(K)$ , ove  $K$  è il parallelepipedo generato dai vettori  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ .

La dimostrazione di questi fatti è analoga a quella della proposizione 4.12.25 e quindi viene omessa.

In modo assolutamente simile si definisce l'aggiunto di un  $r$ -covettore  $\omega$ : esso è definito come l' $(N-r)$ -covettore  $*\omega$  tale che

$$(*\omega)_{I'} = \omega_{I \in I} \quad \text{per ogni } I = \{i_1, \dots, i_r\} \text{ crescente.}$$

Gli aggiunti di  $r$ -covettori godono di proprietà del tutto analoghe a quelle degli aggiunti di  $r$ -vettori.

### Il caso $N = 3$

Vediamo in dettaglio cosa succede quando  $N = 3$ . Come sappiamo (osservazione 3.14.12 (2)), il prodotto vettoriale  $\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2$  è l'unico vettore  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$  tale che:

- $\mathbf{h}$  è nullo se e solo se  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  sono paralleli;
- $\mathbf{h}$  è ortogonale a  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$ ;
- se  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ , la terna  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}\}$  è una base ordinata di  $\mathbb{R}^3$  con orientazione  $\mathbf{e}_{123}$ ;
- detto  $\vartheta \in [0, \pi]$  l'angolo fra  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$ , si ha  $|\mathbf{h}|_3 = |\mathbf{h}_1|_3 \cdot |\mathbf{h}_2|_3 \cdot \sin \vartheta$ ;

- dette  $h_j^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , le coordinate dei vettori  $\mathbf{h}_j$ ,  $j = 1, 2$ , le coordinate di  $\mathbf{h}$  sono  $(h_1^2 h_2^3 - h_1^3 h_2^2, h_1^3 h_2^1 - h_1^1 h_2^3, h_1^1 h_2^2 - h_1^2 h_2^1)$ .

Dalla proposizione 4.12.25, o più semplicemente da una verifica diretta, segue che

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = *(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2) \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Inoltre, per l'osservazione 4.12.29 (2) si ha, per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \rangle_3 &= \langle *(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2), \mathbf{h}_3 \rangle_3 = *(\mathbf{h}_3 \wedge \mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2) = \\ &= *(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2 \wedge \mathbf{h}_3) = *(\det\{h_j^i\} \mathbf{e}_{123}) = \det\{h_j^i\}, \end{aligned}$$

cosicché ritroviamo la relazione

$$|\langle \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \rangle_3| = |\det\{h_j^i\}| = v_3(R)$$

ove  $R$  è il parallelepipedo di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ , risultato che ci era già noto dall'osservazione 3.14.12 (1)-(2).

**Osservazione 4.12.30** L'area di una superficie regolare  $\Sigma = \sigma(T) \subset \mathbb{R}^3$  è stata definita come  $a(\Sigma) = \int_T |\sigma_u \times \sigma_v|_3 \, dudv$  (definizione 4.9.8); alla luce di quanto detto poc'anzi, risulta

$$a(\Sigma) = \int_T |\sigma_u \wedge \sigma_v|_{3,2} \, dudv.$$

## Esercizi 4.12

1. Date due  $r$ -ple qualunque  $I, J$ , sia  $\delta_J^I = \det\{\delta_{jk}^{ih}\}$ . Per  $N = 5$ , scrivere esplicitamente  $\delta_J^I$  quando:
  - (i)  $r = 2$ ,  $I = \{1, 4\}$ ,  $J = \{4, 1\}$ ;
  - (ii)  $r = 3$ ,  $I = \{1, 4, 2\}$ ,  $J = \{2, 1, 4\}$ ;
  - (iii)  $r = 3$ ,  $I = \{3, 4, 5\}$ ,  $J = \{4, 2, 5\}$ ;
  - (iv)  $r = 4$ ,  $I = \{1, 2, 5, 5\}$ ,  $J = \{3, 5, 1, 2\}$ .
2. Provare che:
  - (i)  $\delta_J^I = \mathbf{e}^I(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_r})$ ,
  - (ii)  $\delta_J^I = \delta_J^J$ ,
  - (iii)  $\delta_J^I = \sum_{+H} \delta_H^I \delta_J^H = \frac{1}{r!} \sum_H \delta_H^I \delta_J^H$ ,
  - (iv)  $\mathbf{e}^I = \sum_{+J} \delta_J^I \mathbf{e}^J = \frac{1}{r!} \sum_H \delta_H^I \mathbf{e}^H$ .
3. Si consideri il 3-covettore  $\omega = \sum_{+J} \omega_J \mathbf{e}^J$  quando  $N = 4$ , ove  $\omega_{123} = -2$ ,  $\omega_{134} = 1$  e  $\omega_J = 0$  per ogni altra terna crescente  $J$ . Si calcoli esplicitamente  $\omega(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ .



4. Sia  $M$  un'applicazione  $r$ -lineare sullo spazio vettoriale  $V$ , non necessariamente alternante. Posto

$$m_I = M(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}), \quad \omega_I = \sum_J m_J \delta_I^J,$$

provare che  $\omega = \frac{1}{r!} \sum_I \omega_I e^I$  è  $r$ -lineare alternante, e che  $\omega = M$  quando  $M$  è alternante.

5. Elencare gli elementi  $e^J$  di  $(\mathbb{R}_r^4)^*$  per  $r = 1, 2, 3, 4$ .  
 6. Per  $N = 5$  calcolare, semplificando il più possibile,

$$\begin{aligned} & \text{(i)} (2e^1 - e^2) \wedge (3e^2 + e^3), \quad \text{(ii)} e^{21} \wedge e^{24}, \\ & \text{(iii)} (e^1 - e^2 + 3e^3) \wedge e^{215}, \quad \text{(iv)} (e^{23} + e^{31}) \wedge (5e^1 - e^4), \\ & \text{(v)} e^{253} \wedge (e^{14} + e^{42}), \quad \text{(vi)} (e^2 + e^5) \wedge e^{31} \wedge (e^5 - e^4). \end{aligned}$$

7. Provare che se  $\omega, \zeta, \eta$  sono 1-covettori, allora

$$\omega \wedge \zeta + \zeta \wedge \eta + \eta \wedge \omega = (\omega - \zeta) \wedge (\zeta - \eta).$$

8. Siano  $\eta, \zeta$  1-covettori. Provare che se  $\omega = \eta \wedge \zeta$  si ha

$$\omega_{ij} \omega_{kl} + \omega_{ik} \omega_{lj} + \omega_{il} \omega_{jk} = 0 \quad \forall i, j, k, \ell \in \{1, \dots, N\}.$$

[**Traccia:** si osservi che  $\omega_{pq} = \eta_p \zeta_q - \eta_q \zeta_p$  e si scriva il primo membro come un determinante  $3 \times 3$ , nel quale la prima riga  $(\omega_{ij}, \omega_{ik}, \omega_{il})$  è combinazione lineare delle altre due.]

9. Se  $\omega \in \mathbb{R}_r^N$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}_s^N$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_t^N$ , e se  $r, t$  sono dispari, si provi che

$$\omega \wedge \zeta \wedge \eta = -\eta \wedge \zeta \wedge \omega.$$

10. Per  $N = 4$  si calcoli:

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \langle e^1 + e^2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle_{4,1}^*, \quad \text{(ii)} \langle e^{12}, \mathbf{e}_{34} \rangle_{4,2}^*, \quad \text{(iii)} \langle e^{134}, \mathbf{e}_{431} + 3\mathbf{e}_{124} \rangle_{4,3}^*, \\ & \text{(iv)} \langle (e^1 - e^4) \wedge (e^2 + e^4), (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4) \wedge (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_4) \rangle_{4,2}. \end{aligned}$$

11. I vettori  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5$ ,  $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6$ ,  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_5$ ,  $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_6$ ,  $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$  sono una base per  $\mathbb{R}^6$  oppure no?

12. Provare che:

- (i)  $\alpha \wedge \alpha = \mathbf{0}$  per ogni  $r$ -vettore decomponibile  $\alpha$ ;  
 (ii) se  $\alpha, \beta$  sono  $r$ -vettori decomponibili, allora

$$(\alpha + \beta) \wedge (\alpha + \beta) = \begin{cases} 2\alpha \wedge \beta & \text{se } r \text{ è pari} \\ \mathbf{0} & \text{se } r \text{ è dispari;} \end{cases}$$

(iii) il 2-vettore  $\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{34}$  non è decomponibile.

13. Siano  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  2-vettori decomponibili e non nulli, e siano  $P, Q$  i sottospazi 2-dimensionali da essi individuati. Provare che se  $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$  allora  $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$  non è decomponibile, mentre se  $\dim P \cap Q = 1$  allora  $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$  è decomponibile e  $\boldsymbol{\alpha}$  non è multiplo di  $\boldsymbol{\beta}$ .

14. Sia  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\mathbf{L}(s, t) = (s - 2t, -s, 2s + 3t)$ . Calcolare:

- (i)  $L^*a$ ,  $a \in (\mathbb{R}^3)^*$ ;    (ii)  $c_{12}^{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ ;    (iii)  $\mathbf{L}_2\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_2^2$ ;  
 (iv)  $L_2^*\omega$ ,  $\omega \in (\mathbb{R}_2^3)^*$ ;    (v)  $\mathbf{L}_3\mathbf{e}_{123}$ ;    (vi)  $L_3^*e^{123}$ .

15. Provare che  $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\}$  e  $\{3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\}$  sono basi ordinate per lo stesso sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ . Le rispettive orientazioni coincidono?

16. Calcolare il volume tri-dimensionale del parallelepipedo di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4$ .

17. Il volume  $r$ -dimensionale dell' $r$ -simpleso di vertici  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^r t^i \mathbf{h}_i, t^i \geq 0, \sum_{i=1}^r t^i = 1, \mathbf{h}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \right\}$$

è definito (si veda l'osservazione 3.14.12 (3)) da

$$v_r(S) = \frac{1}{r!} |\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r|_{N,r}.$$

Si calcoli:

- (i) l'area del triangolo in  $\mathbb{R}^3$  di vertici  $\mathbf{0}, 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$ ;  
 (ii) il volume del tetraedro in  $\mathbb{R}^4$  di vertici  $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4$ .

18. Sia  $K$  il parallelepipedo di vertice  $\mathbf{0}$ , generato dai vettori  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ . Per ogni  $r$ -pla crescente  $I$ , sia  $K^I = \boldsymbol{\pi}^I(K)$ , ove  $\boldsymbol{\pi}^I$  è la proiezione ortogonale sul sottospazio generato da  $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}$ . Si provi che se  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r$ , allora si ha  $|\boldsymbol{\alpha}^I| = v_r(K^I)$ , e quindi

$$v_r(K) = \sqrt{\sum_{+I} (v_r(K^I))^2}.$$

Che cosa accade per  $N = 3$  e  $r = 1, 2$ ?

19. Sia  $S$  l' $r$ -simpleso di vertici  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  e sia  $S_i$  la sua  $i$ -sima faccia, cioè l' $(r-1)$ -simpleso di vertici  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_r$ . Posto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \wedge \dots \wedge (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_1), \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \wedge \dots \wedge (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0) \wedge \dots \wedge (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

ove  $i = 1, \dots, r$ , si provi che  $\sum_{i=0}^r (-1)^i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$ .

20. Sia  $N = 2$ . Posto  $\boldsymbol{\alpha} = c^1 \mathbf{e}_1 + c^2 \mathbf{e}_2$ , si verifichi che  $*\boldsymbol{\alpha} = c^2 \mathbf{e}_1 - c^1 \mathbf{e}_2$ .

21. Si verifichi che per  $1 \leq i \leq N$  si ha

$$*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^N) = (-1)^{i-1} dx^i.$$

22. Si provi che

$$(*\boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} = (-1)^{r(N-r)} \boldsymbol{\alpha} \wedge (*\boldsymbol{\beta}) \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_r^N.$$

23. Si provi che per ogni  $r$ -vettore  $\boldsymbol{\alpha}$  e per ogni  $r$ -covettore  $\omega$  si ha

$$\langle *\omega, *\boldsymbol{\alpha} \rangle_{N, N-r}^* = \langle \omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{N, r}^*.$$

24. Sia  $N = 3$ . Per  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , si calcoli

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge *(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}).$$

25. Sia  $N = 3$ . Provare che per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \in \mathbb{R}^3$  si ha

$$\mathbf{h}_1 \times (\mathbf{h}_2 \times \mathbf{h}_3) = \langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_3 \rangle_3 \mathbf{h}_2 - \langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle_3 \mathbf{h}_3.$$

26. Sia  $N = 3$ . Provare che per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4 \in \mathbb{R}^3$  si ha

$$(\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2) \times (\mathbf{h}_3 \times \mathbf{h}_4) = \langle \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_4 \rangle_3 \mathbf{h}_3 - \langle \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \rangle_3 \mathbf{h}_4.$$

## 4.13 Misura e integrazione su varietà

Sia  $V$  una varietà  $r$ -dimensionale regolare in  $\mathbb{R}^N$ , o brevemente un  $r$ -varietà. Ci limiteremo a considerare il caso in cui  $V = \mathbf{G}(T)$ , ove  $T \subset \mathbb{R}^r$  è tale che esista un aperto  $A$  per cui  $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$ ; supporremo inoltre  $\mathbf{G}$  iniettiva e di classe  $C^1$  in  $A$ , con matrice Jacobiana  $\mathbf{DG}(\mathbf{t})$  di rango massimo  $r$  in ogni punto di  $A$ . Vogliamo definire una *misura  $r$ -dimensionale* su  $V$ , nonché l'integrale rispetto a questa misura. Partiamo dalla nozione di volume  $r$ -dimensionale di un parallelepipedo (definizione 4.12.23). Sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^r$  e consideriamo gli  $r$  vettori di  $\mathbb{R}^N$

$$\mathbf{DG}(\mathbf{t})\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^i}(\mathbf{t}), \quad i = 1, \dots, r,$$

essendo  $\mathbf{t} \in A$  un punto fissato. Il numero

$$\mathcal{I}(\mathbf{t}) = \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right|_{N, r}$$

rappresenta, come si sa, il volume  $r$ -dimensionale del parallelepipedo generato dai vettori  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}), \dots, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t})$ . Esso è strettamente positivo in ogni punto di  $A$ , poiché la matrice  $\mathbf{DG}(\mathbf{t})$  ha rango  $r$  in  $A$ ; notiamo che, in particolare, quando  $r = N$  la varietà  $\mathbf{G}(A)$  è un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e si ha  $\mathcal{I}(\mathbf{t}) = |\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\mathbf{t})|$ , ove  $\mathbf{J}_{\mathbf{G}}$  è, per  $r = N$ , il determinante della

matrice Jacobiana  $\mathbf{DG}$ .

Sia allora  $P$  un plurirettangolo di  $\mathbb{R}^r$  che approssimi bene la misura  $r$ -dimensionale di  $T$ ; sarà  $P = \bigcup_{i=1}^m R_i$ , ove gli  $R_i$  sono rettangoli  $r$ -dimensionali, privi di punti interni comuni, della forma

$$R_i = \mathbf{t}_i + \prod_{j=1}^r [0, h_i^j].$$

Le stesse considerazioni svolte nel caso delle superfici, prima della definizione 4.9.8, ci suggeriscono che, sulla base della formula di Taylor, l'unione dei poliedri

$$S_i = \mathbf{G}(\mathbf{t}_i) + \left\{ \sum_{j=1}^r s^j \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^j}(\mathbf{t}_i), s^j \in [0, h_i^j] \text{ per } j = 1, \dots, r \right\},$$

approssimerà bene la varietà  $V$ , e che quindi la somma  $\sum_{i=1}^m v_r(S_i)$  sarà una buona approssimazione di ciò che vogliamo definire, ossia la misura  $r$ -dimensionale di  $V$ . Poiché, d'altra parte,

$$\begin{aligned} v_r(S_i) &= \left| h_i^1 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}_i) \wedge \dots \wedge h_i^r \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}_i) \right|_{N,r} = \\ &= |h_i^1 \dots h_i^r| \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}_i) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}_i) \right|_{N,r} = m_r(R_i) \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}_i) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}_i) \right|_{N,r}, \end{aligned}$$

la quantità  $\sum_{i=1}^m v_r(S_i)$  è l'integrale della funzione semplice

$$\varphi(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}_i) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}_i) \right|_{N,r} I_{R_i}(\mathbf{t});$$

il numero  $\sum_{i=1}^m v_r(S_i)$  è pertanto una buona approssimazione dell'integrale della funzione  $\mathcal{I}(\mathbf{t})$  sul plurirettangolo  $P$ , e quindi a sua volta una buona approssimazione dell'integrale  $\int_T \mathcal{I}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ . La dimostrazione di questi fatti ricalca quella della proposizione 4.9.7 e non la ripetiamo. Siamo così indotti a dare la seguente

**Definizione 4.13.1** *Sia  $V = \mathbf{G}(T) \subset \mathbb{R}^N$  una  $r$ -varietà. La misura  $r$ -dimensionale di  $V$  è il numero non negativo (eventualmente infinito)*

$$v_r(V) = \int_T \mathcal{I}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_T \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r} \right|_{N,r} d\mathbf{t}.$$

Similmente, definiamo l'integrale di una funzione rispetto alla misura  $r$ -dimensionale su  $V$  nel modo seguente:

**Definizione 4.13.2** *Sia  $V = \mathbf{G}(T)$  una  $r$ -varietà e sia  $f$  una funzione reale continua definita su un aperto di  $\mathbb{R}^N$  contenente  $V$ . Se  $[f \circ \mathbf{G}](\cdot) \mathcal{I}(\cdot)$  è integrabile secondo Lebesgue su  $T$ , l'integrale di  $f$  su  $V$  rispetto alla misura  $v_r$  è dato da*

$$\int_V f d\mathbf{v}_r = \int_T f(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \mathcal{I}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_T f(\mathbf{G}(\cdot)) \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r} \right|_{N,r} d\mathbf{t}.$$

Ricordiamo che, per definizione di prodotto esterno e per il corollario 4.12.12,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{t}) &= \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right|_{N,r} = \sqrt{\sum_{+J} \left[ \det \left\{ \frac{\partial G^{j_h}}{\partial t^i}(\mathbf{t}) \right\} \right]^2} = \\ &= \sqrt{\det \left\{ \left\langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^i}(\mathbf{t}), \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^j}(\mathbf{t}) \right\rangle_N \right\}} = \sqrt{\det [D\mathbf{G}(\mathbf{t})]^t \cdot [D\mathbf{G}(\mathbf{t})]}. \end{aligned}$$

È facile riconoscere che nel caso speciale in cui la varietà  $V$  è un sottoinsieme dell'iperpiano  $r$ -dimensionale  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^{r+1} = \dots = x^N = 0\}$ , allora  $V$  è un insieme misurabile e la sua misura  $v_r(V)$  coincide con la misura  $r$ -dimensionale di Lebesgue  $m_r(V)$ . Similmente, nei casi  $r = 1$  e  $r = 2$  le formule precedenti si riducono agli usuali integrali curvilinei e superficiali. E in effetti, come nei casi  $r = 1$  e  $r = 2$ , si può verificare che tali formule sono invarianti rispetto a cambiamenti di parametri: infatti, se  $U \subseteq \mathbb{R}^r$  è un insieme tale che esista un aperto  $B$  per cui  $B \subseteq U \subseteq \overline{B}$ , e se  $\boldsymbol{\eta} : \overline{B} \rightarrow \overline{A}$  è un diffeomorfismo, posto  $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \boldsymbol{\eta}$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s^1}(\mathbf{s}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s^r}(\mathbf{s}) \right|_{N,r} &= \\ &= \left| \left[ \sum_{k_1=1}^r \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^{k_1}}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^{k_1}}{\partial s^1}(\mathbf{s}) \right] \wedge \dots \wedge \left[ \sum_{k_r=1}^r \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^{k_r}}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^{k_r}}{\partial s^r}(\mathbf{s}) \right] \right|_{N,r} = \\ &= \left| \sum_{+K} \det \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^{k_i}}{\partial s^j}(\mathbf{s}) \right\} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^{k_1}}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^{k_r}}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \right|_{N,r} = \\ &\quad (\text{essendovi un'unica } r\text{-pla ordinata } K \text{ in } \{1, \dots, r\}) \\ &= |J_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{s})| \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \right|_{N,r}; \end{aligned}$$

dunque per ogni funzione  $f$  che verifica i requisiti della definizione 4.13.2 si ha, in virtù del teorema di cambiamento di variabili,

$$\begin{aligned} \int_B f(\mathbf{H}(\mathbf{s})) \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s^1}(\mathbf{s}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s^r}(\mathbf{s}) \right|_{N,r} d\mathbf{s} &= \\ &= \int_B f(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) |J_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{s})| \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s})) \right|_{N,r} d\mathbf{s} = \\ &= \int_A f(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right|_{N,r} dt. \end{aligned}$$

Ciò mostra che l'integrale  $\int_V f d\mathbf{v}_r$  dipende solo dal sostegno  $V$ , e non dalla parametrizzazione scelta per descrivere la varietà. Esso, naturalmente, gode delle usuali proprietà degli integrali (linearità, additività, monotonia, eccetera).

**Esempio 4.13.3** Sia  $V = \mathbf{G}(T)$  una  $r$ -varietà in  $\mathbb{R}^m$  e sia  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$  una funzione iniettiva e di classe  $C^1$ . Posto  $W = \mathbf{F}(V)$ ,  $W$  è una  $r$ -varietà in  $\mathbb{R}^N$  e si ha

$$\begin{aligned} v_r(W) &= \int_T \left| \frac{\partial(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right|_{N,r} dt = \\ &= \int_T \left| \left[ \mathbf{DF}(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \right] \wedge \dots \wedge \left[ \mathbf{DF}(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right] \right|_{N,r} dt = \\ &= \int_T \left| \mathbf{L}_r(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right) \right|_{N,r} dt, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{L}_r(\mathbf{t}) : \mathbb{R}_r^m \rightarrow \mathbb{R}_r^N$  è l'applicazione lineare fra  $r$ -vettori, indotta dall'applicazione lineare  $\mathbf{L}(\mathbf{t}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$  data da

$$\mathbf{L}(\mathbf{t})\mathbf{v} = \mathbf{DF}(\mathbf{G}(\mathbf{t}))\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

## Orientazione di una varietà

Sia  $V$  una  $r$ -varietà. Per ogni  $\mathbf{x} \in V$ , il piano  $r$ -dimensionale tangente a  $V$  in  $\mathbf{x}$  è il traslato dello spazio tangente  $T_V(\mathbf{x})$ , che è un sottospazio vettoriale. Quest'ultimo, secondo la definizione 4.12.21, ha due possibili orientazioni  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  e  $-\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ , ciascuna delle quali è un  $r$ -vettore di norma 1. Vorremmo orientare gli iperpiani  $T_V(\mathbf{x})$  in modo "coerente" su  $V$ , ossia vorremmo che la funzione  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}_r^N$  fosse una funzione continua.

**Definizione 4.13.4** Una  $r$ -varietà  $V$  si dice orientabile se esiste una applicazione  $\boldsymbol{\alpha} : V \rightarrow \mathbb{R}_r^N$  continua, tale che  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  sia un'orientazione per il sottospazio  $T_V(\mathbf{x})$  qualunque sia  $\mathbf{x} \in V$ . Diremo allora che  $\boldsymbol{\alpha}$  è un'orientazione per  $V$ .

Si può dimostrare che una varietà connessa ha al più due orientazioni; d'altronde, come sappiamo, esistono varietà non orientabili come il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein (esempi 4.9.5 e 4.9.6). Se  $r = 1$ , allora  $V$  è una curva regolare; si dimostra che essa è orientabile e la sua orientazione è fornita da uno dei suoi due versori tangenti. Se  $r = N$ , allora  $V$  è un aperto di  $\mathbb{R}^N$  con tutto il suo bordo o una sua parte, e le sue possibili orientazioni sono  $\pm \mathbf{e}_{1\dots N}$ ; se  $V$  è connesso, la sua orientazione è costante e diremo che  $V$  è orientato positivamente o negativamente a seconda che essa coincida con  $\mathbf{e}_{1\dots N}$  o con  $-\mathbf{e}_{1\dots N}$ . Infine, se  $r = N - 1$ , allora l'1-vettore  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = *\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  è definito per ogni  $\mathbf{x} \in V$  ed è un versore ortogonale a  $V$  in  $\mathbf{x}$ : la varietà sarà orientabile se e solo se l'applicazione  $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  è continua su  $V$ .

**Esempio 4.13.5** Sia  $A \subset \mathbb{R}^N$  un aperto con frontiera di classe  $C^1$ : ciò significa che per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \partial A$  esistono un intorno  $U$  ed una funzione  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , con gradiente mai nullo in  $U$ , tale che

$$A \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \phi(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \partial A \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \phi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Si noti che questa definizione è equivalente alla definizione 4.7.1 in virtù del teorema del Dini. Se l'aperto  $A$  ha frontiera di classe  $C^1$ , allora  $\partial A$  è una  $(N - 1)$ -varietà orientabile.

Infatti, fissiamo  $\mathbf{x}_0 \in \partial A$  e consideriamo, per ogni  $\mathbf{x} \in \partial A \cap U$ , il versore (sempre ben definito)

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|_N}, \quad \mathbf{x} \in \partial A \cap U.$$

Chiaramente esso è il versore normale esterno a  $\partial A \cap U$ , cioè  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  appartiene allo spazio uni-dimensionale  $N_{\partial A}(\mathbf{x})$  normale a  $\partial A$ , ed in più esiste  $\delta_{\mathbf{x}} > 0$  tale che  $\mathbf{x} + t\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \in \bar{A}^c$  se  $0 < t < \delta_{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{x} + t\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \in A$  se  $-\delta_{\mathbf{x}} < t < 0$ . Inoltre  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  è continuo su  $\partial A \cap U$ , dato che  $\phi$  è di classe  $C^1$ . Sia ora  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  l'  $(N-1)$ -vettore tale che  $*\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ , ossia

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = (-1)^{N-1} * \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) :$$

allora  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  è un'orientazione per lo spazio tangente  $T_{\partial A}(\mathbf{x})$ , e precisamente quella per cui, data una base ordinata  $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}\}$  di  $T_{\partial A}(\mathbf{x})$  tale che  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{N-1}$ , la  $N$ -pla di vettori  $\{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N-1}\}$  ha l'orientazione  $\mathbf{e}_{1, \dots, N}$ , vale a dire  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{1, \dots, N}$ . Dato che  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  è continua,  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  è continua su  $\partial A \cap U$ . Poiché ogni punto  $\mathbf{x}_0 \in \partial A$  ha un intorno in cui  $\boldsymbol{\alpha}$  è continua,  $\boldsymbol{\alpha}$  è continua su  $\partial A$  e quindi è un'orientazione per l'intera varietà  $\partial A$ . Diremo che un'orientazione  $\boldsymbol{\beta}$  su  $\partial A$  è l'*orientazione positiva*, e denoteremo con  $\partial A^+$  la frontiera orientata positivamente, se  $*\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  è il versore normale esterno a  $\partial A$ ; diremo che  $\boldsymbol{\beta}$  è l'*orientazione negativa*, e denoteremo con  $\partial A^-$  la frontiera orientata negativamente, se  $*\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ .

**Osservazione 4.13.6** Ogni  $r$ -varietà orientabile della forma  $V = \mathbf{G}(A)$ , ove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^r$  e  $\mathbf{G}$  è di classe  $C^1$  con  $\mathbf{DG}$  di rango massimo  $r$  in ogni punto di  $A$ , “eredita” un'orientazione, tramite l'applicazione  $\mathbf{G}$ , a partire da un'assegnata orientazione su  $A$ , ad esempio quella positiva determinata da  $\mathbf{e}_{1 \dots r}$ . Sia infatti  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  un punto di  $V$ , e poniamo

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t});$$

allora si ha

$$|\mathbf{a}(\mathbf{t})|_{N,r} = \left| \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right|_{N,r} = \mathcal{I}(\mathbf{t}) > 0,$$

e quindi l' $r$ -vettore

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t})}{|\mathbf{a}(\mathbf{t})|_{N,r}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t}) \in \mathbf{G}(A) = V,$$

è un'orientazione per  $V$  che si chiama *orientazione indotta* da  $\mathbf{G}$ .

**Esempi 4.13.7 (1)** Se  $r = 1$  e  $V = \mathbf{G}[a, b]$  è una curva regolare, si ha  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{G}'(t)$ , quindi  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{G}'(t)}{|\mathbf{G}'(t)|_N}$  è il versore tangente orientato nel verso delle  $t$  crescenti.

**(2)** Sia  $r = 2$  e  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0\}$ :  $V$  è la semisfera unitaria contenuta nel semispazio  $z \geq 0$ . Usando la parametrizzazione

$$\mathbf{G}(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \quad \varphi \in [-\pi, \pi],$$

il 2-vettore  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\vartheta, \varphi)$ , è

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)}{\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(\vartheta, \varphi)} = \frac{\mathbf{G}_{\vartheta} \wedge \mathbf{G}_{\varphi}}{\sqrt{EG - F^2}} = \alpha^{12} \mathbf{e}_{12} + \alpha^{13} \mathbf{e}_{13} + \alpha^{23} \mathbf{e}_{23},$$

ove per  $1 \leq i < j \leq 3$  si ha

$$\alpha^{ij} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G^i}{\partial \vartheta} & \frac{\partial G^i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial G^j}{\partial \vartheta} & \frac{\partial G^j}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

ossia

$$\alpha^{12} = \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\sin \vartheta}, \quad \alpha^{13} = -\frac{\sin^2 \vartheta \sin \varphi}{\sin \vartheta}, \quad \alpha^{23} = \frac{\sin^2 \vartheta \cos \varphi}{\sin \vartheta},$$

da cui

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \cos \vartheta \mathbf{e}_{12} - \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_{13} + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_{23}.$$

Quindi il versore normale  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = * \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ , le cui componenti sono  $\nu^i(\mathbf{x}) = (-1)^{i-1} \alpha^{i'}(\mathbf{x})$ , è dato da

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \alpha^{23} \mathbf{e}_1 - \alpha^{13} \mathbf{e}_2 + \alpha^{12} \mathbf{e}_3 = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3,$$

cioè  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  è il versore normale diretto verso l'esterno della semisfera. Si noti che la stessa parametrizzazione, con l'ordine dei parametri invertito, dà luogo all'orientazione opposta ( $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  diretta verso l'interno), in quanto i tre numeri  $\alpha^{12}, \alpha^{13}, \alpha^{23}$  cambiano segno.

**(3)** Se  $r = N$ ,  $A$  e  $B$  sono aperti di  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{G} : A \rightarrow B$  è un diffeomorfismo, e  $A$  ha l'orientazione positiva  $\mathbf{e}_{1\dots N}$ , allora è immediato verificare che  $B$  ha orientazione positiva o negativa a seconda che  $J_{\mathbf{G}}$  sia positivo o negativo in  $A$ .

**(4)** Nella situazione descritta dall'esempio 4.13.3, il volume della varietà  $W = \mathbf{F}(V)$ ,  $V = \mathbf{G}(T)$ , può essere espresso in modo intrinsecamente legato a  $V$ : infatti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} v_r(W) &= \int_T \left| \mathbf{L}_r(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right) \right|_{N,r} dt = \\ &= \int_T \left| \mathbf{L}_r(\mathbf{t}) \left( \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t})}{|\mathbf{a}(\mathbf{t})|_{N,r}} \right) \right|_{N,r} \left| \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right) \right|_{N,r} dt = \\ &= \int_V |\boldsymbol{\Lambda}_r(\cdot)(\boldsymbol{\alpha})|_{N,r} d\mathbf{v}_r, \end{aligned}$$

ove  $\mathbf{L}_r(\mathbf{t})$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_r(\mathbf{x})$  sono rispettivamente le applicazioni lineari fra  $r$ -vettori indotte dalle applicazioni associate alle matrici  $\mathbf{DF}(\mathbf{G}(\mathbf{t}))$  e  $\mathbf{DF}(\mathbf{x})$ , mentre  $\boldsymbol{\alpha}$  è l'orientazione indotta dalla parametrizzazione  $\mathbf{G}$  di  $V$ ; naturalmente il valore dell'integrale non cambia se si sceglie la parametrizzazione opposta.

**Osservazione 4.13.8** Sia  $V$  una  $r$ -varietà di classe  $C^1$  orientabile, dotata di una fissata orientazione  $\boldsymbol{\beta}$ . Se  $V = \mathbf{G}(A)$ , con  $\mathbf{G}$  iniettiva, di classe  $C^1$  e tale che  $\mathbf{DG}$  abbia rango



$r$  in ogni punto, allora  $V$  eredita anche l'orientazione  $\alpha$  indotta da  $G$ . Per sapere se le due orientazioni coincidono o sono opposte, si osservi che se  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  si ha

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t})}{|\mathbf{a}(\mathbf{t})|_{N,r}} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t})}{\mathcal{I}(\mathbf{t})}$$

ove

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) = \sum_{+I} \det \left\{ \frac{\partial G^{i_h}}{\partial t^k}(\mathbf{t}) \right\} \mathbf{e}_I;$$

poiché  $\beta(\mathbf{x}) = \pm \alpha(\mathbf{x})$ , si ha

$$\beta^I(\mathbf{x}) = \pm \alpha^I(\mathbf{x}) = \pm \frac{1}{\mathcal{I}(\mathbf{t})} \det \left\{ \frac{\partial G^{i_h}}{\partial t^k}(\mathbf{t}) \right\}$$

per ogni  $r$ -pla crescente  $I$ . Basterà dunque calcolare un singolo coefficiente  $\beta^I$  e controllare se il suo segno coincide o no con quello di  $\alpha^I$ .

**Esempio 4.13.9** Sia

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3, z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2}) \right\} :$$

$V$  è una 2-varietà (è il grafico di una funzione di classe  $C^1$ ). Orientiamo  $V$  in modo che la normale  $\mathbf{n}(x, y, z)$  abbia la terza componente negativa. Una parametrizzazione di  $V$  è ovviamente quella cartesiana:

$$\mathbf{G}(x, y) = \left( x, y, \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2}) \right), \quad (x, y) \in T,$$

ove  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3x\}$ . L'orientazione  $\alpha$  indotta su  $V$  da  $\mathbf{G}$  è  $\alpha = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|_{N,r}}$ , ove

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \\ &= \det \begin{pmatrix} G_x^1 & G_x^2 \\ G_y^1 & G_y^2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_{12} + \det \begin{pmatrix} G_x^1 & G_x^3 \\ G_y^1 & G_y^3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_{13} + \det \begin{pmatrix} G_x^2 & G_x^3 \\ G_y^2 & G_y^3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_{23} = \\ &= \mathbf{e}_{12} + y^{1/2} \mathbf{e}_{13} - x^{1/2} \mathbf{e}_{23}. \end{aligned}$$

Quindi il versore normale corrispondente ad  $\alpha$  è

$$\nu = * \alpha = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \alpha^{i'} \mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{1+x+y}} (-x^{1/2} \mathbf{e}_1 - y^{1/2} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Dato che  $\nu^3 = \frac{1}{\sqrt{1+x+y}}$ , l'orientazione  $\alpha$  è opposta a quella attribuita a  $V$ .

Se  $V$  è una varietà con bordo, di classe  $C^1$  ed orientabile, dotata di una fissata orientazione  $\alpha \in \mathbb{R}_r^N$ , vogliamo attribuire al bordo  $bV$  un'orientazione  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_{r-1}^N$  che sia "coerente" con  $\alpha$ , in un senso opportuno, come è stato fatto prima della dimostrazione del teorema di Stokes (teorema 4.9.16). A questo scopo, fissiamo un aperto  $U$ , tale che  $U \cap bV \neq \emptyset$ , e un'applicazione  $\mathbf{g}$  di classe  $C^1$ , iniettiva e con  $\mathbf{D}\mathbf{g}$  di rango massimo, tale che  $\mathbf{g}(B^-) = U \cap V$  e  $\mathbf{g}(B_0) = U \cap bV$ , ove  $B^- = \{(\mathbf{x}', x^r) \in B(\mathbf{0}, 1) : x^r \leq 0\}$  e  $B_0 = \{(\mathbf{x}', x^r) \in B^- : x^r = 0\}$  (dunque,  $\mathbf{g}(\mathbf{t} - \varepsilon \mathbf{e}_r) \in iV$  per  $\mathbf{t} \in B_0$  ed  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo). A partire dall'orientazione positiva  $\mathbf{e}_{1\dots r}$  di  $B^-$  la mappa  $\mathbf{g}$  induce su  $U$  l'orientazione  $\beta = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|_{N,r}}$ , ove

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^r}.$$

Consideriamo, inoltre, l'orientazione positiva  $\beta_0$  di  $B_0$ : sulla base dell'esempio 4.13.5, dato che il versore normale esterno a  $B^0 \subset \partial B^-$  è  $\mathbf{e}_r$ , tale orientazione deve essere tale che  $\mathbf{e}_r \wedge \beta_0 = \mathbf{e}_{1\dots r}$ , e quindi è data da  $\beta_0 = (-1)^{r-1} \mathbf{e}_{1\dots(r-1)}$ . A partire da questa  $\beta_0$ , la  $\mathbf{g}$  induce su  $U \cap bV$  l'orientazione  $\bar{\beta} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|_{N,r-1}}$ , ove

$$\mathbf{b} = (-1)^{r-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^{r-1}}.$$

Ciò osservato, definiamo l'orientazione  $\bar{\alpha}$  di  $U \cap bV$  a partire dall'orientazione  $\alpha$  di  $V$ , che pensiamo assegnata a priori. Poniamo

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \bar{\beta} & \text{se } \alpha = \beta \\ -\bar{\beta} & \text{se } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

Così facendo, otteniamo questo risultato:

**Proposizione 4.13.10** *Nelle ipotesi precedenti, se  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  è il versore tangente a  $V$  e normale a  $bV$  nel punto  $\mathbf{x} \in bV \cap U$ , diretto verso l'esterno di  $V$ , allora l'orientazione  $\alpha$  di  $V$  e l'orientazione  $\bar{\alpha}$  di  $U \cap bV$  sono coerenti, nel senso che le due orientazioni  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \bar{\alpha}$  e  $\alpha$  sono concordi.*

**Dimostrazione** Cominciamo con l'osservare che, posto  $\mathbf{t} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})$ , si ha  $t \in B_0$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$  e, dalla definizione di  $\mathbf{g}$ ,

$$\left\langle \mathbf{n}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i}(\mathbf{t}) \right\rangle_N = 0, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad \left\langle \mathbf{n}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \right\rangle_N > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in bV \cap U.$$

Di conseguenza, possiamo scrivere

$$\mathbf{h}_r = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) = c \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{h},$$

con  $c > 0$  e  $\mathbf{h}$  vettore tangente a  $bV$  in  $\mathbf{x}$ , dunque combinazione lineare dei vettori  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i}(\mathbf{t})$ ,  $1 \leq i \leq r-1$ .

Allora quando  $\alpha = \beta$  si ha, a meno di costanti moltiplicative,

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \bar{\alpha} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \bar{\beta} = (-1)^{r-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^r}(\mathbf{t}) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^{r-1}}(\mathbf{t}) = \beta = \alpha.$$

Analogamente si procede quando  $\alpha = -\beta$ .  $\square$

In realtà la proprietà espressa dalla precedente proposizione vale in ogni punto di  $bV$ , e dunque l'orientazione  $\bar{\alpha}$  sopra costruita è globale su  $bV$ . In particolare, il bordo  $bV$  è una  $(r-1)$ -varietà orientabile ogni volta che  $V$  è una  $r$ -varietà orientabile con bordo.

**Osservazione 4.13.11** Nel caso  $N = r = 2$ ,  $V$  è la chiusura di un aperto  $A$  con  $iV = A$  e  $bV = \partial A$ ; in questo caso, l'orientazione su  $\partial A$  coerente con l'orientazione positiva  $\mathbf{e}_{12}$  di  $A$  è quella in cui il versore tangente  $\boldsymbol{\tau}$  a  $\partial A$  è orientato in modo da lasciare  $A$  alla sua sinistra; in questo caso  $*\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu}$  è il versore normale esterno ad  $A$  e, infatti,  $\boldsymbol{\nu} \wedge \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_{12}$ .

### Esercizi 4.13

1. Calcolare l'area della varietà 2-dimensionale

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1\}.$$

2. Sia  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un'applicazione di classe  $C^1$  e sia  $V$  la varietà 2-dimensionale grafico di  $\mathbf{f}$ , ossia

$$V = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \in A\}.$$

Si verifichi che, posto  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (h(u, v), k(u, v))$ , si ha

$$a(V) = \int_A \sqrt{1 + |\mathbf{D}h|_2^2 + |\mathbf{D}k|_2^2 + \left[ \det \begin{pmatrix} h_u & h_v \\ k_u & k_v \end{pmatrix} \right]^2} dudv.$$

3. Si provi la *formula di coarea* in  $\mathbb{R}^N$ : se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , se  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  e se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e sommabile su  $A$ , allora

$$\int_A f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\{\mathbf{x} \in A : F(\mathbf{x})=t\}} \frac{f}{|\mathbf{D}F|_N} d\mathbf{v}_{N-1} \right] dt.$$

[**Traccia:** Si imiti la dimostrazione della formula di coarea in  $\mathbb{R}^3$  (proposizione 4.9.11).]

4. Si calcoli l'area della bottiglia di Klein di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (\sqrt{3} + 2 \cos v) \cos u \\ y = (\sqrt{3} + 2 \cos v) \sin u \\ z = 2 \sin v \cos \frac{u}{2} \\ w = 2 \sin v \sin \frac{u}{2}, \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2.$$

5. Sia  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^r$  un'applicazione di classe  $C^1$  ( $N > r$ ). Se

$$V = \{\mathbf{x} \in D : \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}) \text{ ha rango } r\} \neq \emptyset,$$

si provi che  $V$  è una  $(N-r)$ -varietà orientabile.

6. Sia  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definita da

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2 + z^2).$$

Posto  $V = \mathbf{G}(B)$ , ove  $B$  è la palla unitaria chiusa di  $\mathbb{R}^3$  orientata positivamente, si determini la “forma” di  $V$  e se ne determini l’orientazione indotta da  $\mathbf{G}$ .

7. Sia  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = ax + by + c, x, y \in [0, 1]\}$ , ove  $a, b, c$  sono fissati numeri reali. Si calcoli l’area di  $V$  e, scelta l’orientazione  $\boldsymbol{\alpha}$  di  $V$  tale che  $\alpha^{12} < 0$ , si determini l’orientazione di  $bV$  che è coerente con  $\boldsymbol{\alpha}$ .

## 4.14 Forme differenziali lineari di grado $r$

In analogia con le 1-forme, per  $1 \leq r \leq N$  possiamo definire sugli aperti di  $\mathbb{R}^N$  le forme differenziali lineari di grado  $r$  o, brevemente, le  $r$ -forme.

**Definizione 4.14.1** Una  $r$ -forma sull’aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  è un’applicazione  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}_r^N)^*$ , dunque della forma

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{x}) e^I.$$

Diciamo che la  $r$ -forma è di classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) se i coefficienti  $\omega_I$  appartengono allo spazio  $C^k(A)$ .

Se  $r > N$ , l’unica  $r$ -forma è  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ . Se  $r = 0$ , per convenzione una 0-forma è una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $r = 1$ , come sappiamo dal paragrafo 4.6, le 1-forme sono del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{x}) e^i = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{x}) dx^i,$$

poiché, come è noto,

$$\langle e^i, \mathbf{h} \rangle_N^* = \langle dx^i, \mathbf{h} \rangle_N^* = h^i = \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle_N \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N.$$

Per analogia, scriveremo le  $r$ -forme nel modo seguente:

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{r!} \sum_I \omega_I(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Se  $\omega$  è una  $r$ -forma e  $f$  è una 0-forma, il prodotto  $f\omega$  è la  $r$ -forma

$$(f\omega)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A,$$

mentre se  $\eta$  è una  $s$ -forma, il prodotto esterno  $\omega \wedge \eta$  è la  $(r + s)$ -forma

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) \wedge \eta(\mathbf{x}) = \sum_{+I, +J} \omega_I(\mathbf{x}) \eta_J(\mathbf{x}) e^{IJ}.$$

## Differenziale esterno

Se  $f$  è una 0-forma, cioè una funzione, ed è di classe  $C^1$ , il suo differenziale, come abbiamo visto nell'esempio 4.6.1, è la 1-forma

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^j}(\mathbf{x}) dx^j.$$

Vogliamo definire il simbolo  $d\omega$  per ogni  $r$ -forma  $\omega$ . Notiamo che se  $\omega$  è di classe  $C^1$  allora per ogni  $r$ -pla crescente  $I$  il coefficiente  $\omega_I$  ha differenziale

$$d\omega_I = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j}(\mathbf{x}) dx^j.$$

**Definizione 4.14.2** *Se  $\omega$  è una  $r$ -forma di classe  $C^1$ , il differenziale esterno  $d\omega$  è la  $(r+1)$ -forma  $d\omega$  data da*

$$d\omega(\mathbf{x}) = \sum_{+I} d\omega_I(\mathbf{x}) \wedge e^I = \sum_{+I} d\omega_I(\mathbf{x}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

**Esempi 4.14.3 (1)** Se  $r = 1$  e  $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx^i$ , allora

$$d\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N d\omega_i(\mathbf{x}) \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) dx^j \wedge dx^i = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) \right) dx^i \wedge dx^j.$$

(2) Se  $r = N$ , si ha  $\omega(\mathbf{x}) = \omega_{1\dots n}(\mathbf{x}) e^{1\dots N}$  e  $d\omega = 0$ , trattandosi di una  $(N+1)$ -forma.

(3) Sia  $N = 3$  e  $\omega(x, y, z) = (2+x) dx + z^2 dy + x^2 y dz$ . Allora

$$\begin{aligned} d\omega(x, y, z) &= d(2+x) \wedge dx + d(z^2) \wedge dy + d(x^2 y) \wedge dz = \\ &= dx \wedge dx + 2z dz \wedge dy + (2xy dx + x^2 dy) \wedge dz = \\ &= 0 + 2z dz \wedge dy + 2xy dx \wedge dz + x^2 dy \wedge dz = \\ &= 2xy dx \wedge dz + (x^2 - 2z) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

(4) Se  $\omega = \sum_{+I} \omega_I e^I$  è una  $r$ -forma costante (ossia un  $r$ -covettore), allora  $d\omega = 0$ .

Le principali proprietà del differenziale esterno sono riunite nella seguente

**Proposizione 4.14.4** *Siano  $\omega, \eta$   $r$ -forme e sia  $\zeta$  una  $s$ -forma. Allora:*

- (i) se  $\omega, \eta$  sono di classe  $C^1$  si ha  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ ;
- (ii) se  $c \in \mathbb{R}$  e  $\omega$  è di classe  $C^1$  si ha  $d(c\omega) = c d\omega$ ;
- (iii) se  $\omega, \zeta$  sono di classe  $C^1$  si ha  $d(\omega \wedge \zeta) = d\omega \wedge \zeta + (-1)^r \omega \wedge d\zeta$ ;

(iv) se  $\omega$  è di classe  $C^2$  si ha  $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ .

**Dimostrazione** Le proprietà (i) e (ii) sono evidenti per definizione, dato che per i coefficienti si ha, per ogni  $r$ -pla crescente  $I$ ,

$$d(\omega_I + \eta_I) = d\omega_I + d\eta_I, \quad d(c\omega_I) = c d\omega_I \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Proviamo (iii). Anzitutto, se  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  risulta. per tutte le  $r$ -ple  $I, J$

$$d[(f e^I) \wedge e^J] = df \wedge e^I \wedge e^J;$$

infatti se  $I$  e  $J$  hanno indici in comune si ha

$$d[(f e^I) \wedge e^J] = d[f(e^I \wedge e^J)] = d0 = 0, \quad df \wedge e^I \wedge e^J = df \wedge 0 = 0,$$

mentre se non ci sono indici in comune, detto  $H$  il riordinamento crescente di  $IJ$  ottenuto con  $p$  scambi, si ha

$$d[(f e^I) \wedge e^J] = d[f(e^I \wedge e^J)] = d[f(-1)^p e^H] = df \wedge (-1)^p e^H = df \wedge e^I \wedge e^J.$$

Siano ora  $\omega, \eta$  due  $r$ -forme di classe  $C^1$ . Si ha

$$\omega \wedge \eta = \sum_{+I, +J} \omega_I \eta_J e^I \wedge e^J,$$

da cui

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta)(\mathbf{x}) &= \sum_{+I, +J} d[\omega_I(\mathbf{x}) \eta_J(\mathbf{x})] \wedge e^I \wedge e^J = \\ &= \sum_{+I, +J} [d\omega_I(\mathbf{x}) \eta_J(\mathbf{x}) + \omega_I(\mathbf{x}) d\eta_J(\mathbf{x})] \wedge e^I \wedge e^J = \\ &= \sum_{+I, +J} (d\omega_I(\mathbf{x}) \wedge e^I \wedge [\eta_J(\mathbf{x}) e^J] + (-1)^r [\omega_I(\mathbf{x}) e^I] \wedge [d\eta_J(\mathbf{x}) \wedge e^J]) = \\ &= \left[ \sum_{+I} d\omega_I(\mathbf{x}) \wedge e^I \right] \wedge \left[ \sum_{+J} \eta_J(\mathbf{x}) e^J \right] + (-1)^r \left[ \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{x}) e^I \right] \wedge \left[ \sum_{+J} d\eta_J(\mathbf{x}) \wedge e^J \right] = \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Proviamo (iv). Se  $f$  è una funzione di classe  $C^2$ , per il teorema di Schwarz si ha

$$d^2 f(\mathbf{x}) = d \left[ \sum_{i=1}^N D_i f(\mathbf{x}) dx^i \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq N} [D_i D_j f(\mathbf{x}) - D_j D_i f(\mathbf{x})] dx^i \wedge dx^j = 0;$$

quindi, se  $f$  è di classe  $C^2$  e  $I$  è una  $r$ -pla crescente, per (iii) si ha

$$d(df(\mathbf{x}) \wedge e^I) = (d^2 f)(\mathbf{x}) \wedge e^I + (-1)^r df(\mathbf{x}) \wedge de^I = 0,$$

dato che  $e^I$  è una  $r$ -forma costante. Ne segue che per ogni  $r$ -forma  $\omega$  di classe  $C^2$  si ha

$$d^2\omega = \sum_{+I} d(d\omega_I(\mathbf{x}) \wedge e^I) = \sum_{+I} 0 = 0. \quad \square$$

Alla proposizione precedente si collega la seguente definizione particolarmente importante.

**Definizione 4.14.5** Una  $r$ -forma  $\omega$ , definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ , si dice chiusa se è di classe  $C^1$  e se  $d\omega = 0$ ; si dice esatta se possiede una primitiva, ossia esiste una  $(r-1)$ -forma  $\eta$ , definita su  $A$  e di classe  $C^1$ , tale che  $d\eta = \omega$ .

Per  $r = 1$  si ritrova la definizione di 1-forma chiusa ed esatta (definizioni 4.6.8 e 4.6.6). Si noti che se  $\omega$  è una  $r$ -forma esatta di classe  $C^1$ , allora  $\omega$  è chiusa: infatti si ha  $\omega = d\eta$  con  $\eta$  di classe  $C^2$ , e quindi  $d\omega = d^2\eta = 0$ . Il viceversa non è vero in generale, come sappiamo già nel caso  $r = 1$  (esempio 4.6.4). Vedremo nel seguito una condizione geometrica su  $A$  che assicura la validità del viceversa.

## Pull-back di una $r$ -forma

Sia  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  un aperto, e sia  $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  un'applicazione di classe  $C^1$ . Se  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  è un aperto contenente l'immagine di  $\mathbf{g}$  e se  $\omega(\mathbf{x})$  è una  $r$ -forma definita in  $A$ , esiste un'opportuna  $r$ -forma definita su  $B$ , la quale corrisponde alla forma  $\omega$  calcolata nelle variabili  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$ : essa si ottiene formalmente sostituendo  $\mathbf{g}(\mathbf{t})$  al posto della  $\mathbf{x}$  e  $dg^i(\mathbf{t})$  al posto dei differenziali  $dx^i$ . Vediamone la definizione e le proprietà.

**Definizione 4.14.6** Siano  $B$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathbf{g} : B \rightarrow A$  un'applicazione di classe  $C^1$ . Se  $\omega$  è una  $r$ -forma definita su  $A$ ,  $r \geq 1$ , la trasformata o pull-back di  $\omega$  secondo  $\mathbf{g}$  è la  $r$ -forma  $\mathbf{g}^\#\omega$ , definita su  $B$  nel modo seguente:

$$\mathbf{g}^\#\omega(\mathbf{t}) = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}).$$

Se  $r = 0$ , il pull-back  $\mathbf{g}^\#f$  della 0-forma  $f$  è la 0-forma  $f \circ \mathbf{g}$ .

**Osservazione 4.14.7** Vediamo come agisce il pull-back  $\mathbf{g}^\#\omega$ : se

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

allora, ponendo per ogni coppia  $I, J$  di  $r$ -ple crescenti

$$g_J^I(\mathbf{t}) = \det \left\{ \frac{\partial g^{i_h}}{\partial t^{j_k}}(\mathbf{t}) \right\},$$

quando  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$  si ha, per le proposizioni 4.14.4 e 4.14.9,

$$\mathbf{g}^\#\omega(\mathbf{t}) = \sum_{+I,+J} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) g_J^I(\mathbf{t}) e^J.$$

In particolare, se  $r = m \leq N$  vi è un'unica  $m$ -pla crescente  $J$  e quindi si ha

$$\mathbf{g}^\#\omega(\mathbf{t}) = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \det \left\{ \frac{\partial g^{i_h}}{\partial t^j}(\mathbf{t}) \right\} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m.$$

**Osservazione 4.14.8** Usando l'applicazione lineare fra  $r$ -covettori  $L_r^*(\mathbf{t})$ , aggiunta dell'applicazione fra  $r$ -vettori  $\mathbf{L}_r(\mathbf{t})$  indotta da  $\mathbf{L}(\mathbf{t}) = \mathbf{D}\mathbf{G}(\mathbf{t})$ , l'azione del pull-back  $\mathbf{g}^\#\omega$  si può scrivere nel modo seguente: se  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$ , allora per ogni  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^m$  si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}^\#\omega(\mathbf{t}), \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r \rangle_{m,r}^* &= \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \langle dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}), \mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r \rangle_{m,r}^* = \\ &= \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \det\{\langle dg^{i_h}(\mathbf{t}), \mathbf{h}_j \rangle_m^*\} = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \det\{\langle \nabla g^{i_h}(\mathbf{t}), \mathbf{h}_j \rangle_m\} = \\ &= \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \det\{\langle e^{i_h}, \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{t})(\mathbf{h}_j) \rangle_N^*\} = \\ &= \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \langle e^I, \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{t})(\mathbf{h}_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{t})(\mathbf{h}_r) \rangle_{N,r}^* = \\ &= \langle \omega(\mathbf{g}(\mathbf{t})), \mathbf{L}(\mathbf{h}_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{L}(\mathbf{h}_r) \rangle_{N,r}^* = \langle \omega(\mathbf{g}(\mathbf{t})), \mathbf{L}_r(\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_r) \rangle_{N,r}^*, \end{aligned}$$

ossia

$$\mathbf{g}^\#\omega(\mathbf{t}) = L_r^*(\mathbf{t})(\omega(\mathbf{g}(\mathbf{t}))), \quad \mathbf{t} \in B.$$

Avendo fissato una funzione  $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  di classe  $C^1$ , l'operatore di pull-back  $\omega \mapsto \mathbf{g}^\#\omega$  gode delle seguenti proprietà:

**Proposizione 4.14.9** Siano  $B$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{g} : B \rightarrow A$  un'applicazione di classe  $C^1$ . Allora:

- (i)  $\mathbf{g}^\#(\omega + \eta) = \mathbf{g}^\#\omega + \mathbf{g}^\#\eta$  per tutte le  $r$ -forme  $\omega, \eta$  definite su  $A$ ;
- (ii)  $\mathbf{g}^\#(c\omega) = c\mathbf{g}^\#\omega$  per ogni  $c \in \mathbb{R}$  e per ogni  $r$ -forma  $\omega$  definita su  $A$ ;
- (iii)  $\mathbf{g}^\#(\omega \wedge \zeta) = \mathbf{g}^\#\omega \wedge \mathbf{g}^\#\zeta$  per tutte le  $r$ -forme  $\omega$  e  $s$ -forme  $\zeta$  definite su  $A$ ;
- (iv)  $\mathbf{g}^\#(df) = d(f \circ \mathbf{g})$  per ogni 0-forma  $f$  definita su  $A$  e di classe  $C^1$ ;
- (v) se  $\mathbf{g}$  è di classe  $C^2$ , si ha  $d(\mathbf{g}^\#\omega) = \mathbf{g}^\#(d\omega)$  per ogni  $r$ -forma  $\omega$  definita su  $A$  e di classe  $C^1$ .

**Dimostrazione** Le proprietà (i) e (ii) sono evidenti per linearità.

Proviamo (iii). Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^\#(\omega \wedge \zeta)(\mathbf{t}) &= \sum_{+I, +J} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \zeta_J(\mathbf{g}(\mathbf{t})) dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}) \wedge dg^{j_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{j_s}(\mathbf{t}) = \\ &= \left[ \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{g}(\mathbf{t})) dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}) \right] \wedge \left[ \sum_{+J} \zeta_J(\mathbf{g}(\mathbf{t})) dg^{j_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{j_s}(\mathbf{t}) \right] = \\ &= \mathbf{g}^\#\omega(\mathbf{t}) \wedge \mathbf{g}^\#\zeta(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Dimostriamo (iv):  $df$  è una 1-forma, e per ogni  $\mathbf{t} \in B$  si ha

$$\langle \mathbf{g}^\#(df)(\mathbf{t}), \mathbf{h} \rangle_m^* = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^j}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \langle dg^j(\mathbf{t}), \mathbf{h} \rangle_m = \langle d(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}), \mathbf{h} \rangle_m^*.$$



Proviamo infine (v). Dalle proprietà del differenziale esterno (proposizione 4.14.4) si ha, utilizzando il fatto che  $d^2g^i = 0$  per  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned}
[d(\mathbf{g}^\# \omega)](\mathbf{t}) &= \sum_{+I} d[(\omega_I \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}) dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t})] = \\
&= \sum_{+I} [d(\omega_I \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}) \wedge dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}) + (\omega_I \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}) d[ dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}) ] = \\
&= \sum_{+I} d(\omega_I \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}) \wedge dg^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dg^{i_r}(\mathbf{t}) = \text{(per (iv))} \\
&= \sum_{+I} \mathbf{g}^\#(d\omega_I)(\mathbf{t}) \wedge \mathbf{g}^\#(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{g}^\#(dx^{i_r}) = \text{(per (iii))} \\
&= \mathbf{g}^\# \left[ \sum_{+I} d\omega_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right] (\mathbf{t}) = \mathbf{g}^\#(d\omega)(\mathbf{t}). \quad \square
\end{aligned}$$

**Esempi 4.14.10 (1)** Se  $N = 3$  e  $r = m = 2$  sia  $(x, y, z) = \mathbf{g}(s, t)$ . Allora

$$\mathbf{g}^\#(dx \wedge dz) = \det \begin{pmatrix} g_s^1 & g_t^1 \\ g_s^3 & g_t^3 \end{pmatrix} ds \wedge dt;$$

quindi, se  $\omega = f(\cdot) dx \wedge dz$  avremo

$$\mathbf{g}^\# \omega(s, t) = (f \circ \mathbf{g})(s, t) \det \begin{pmatrix} g_s^1(s, t) & g_t^1(s, t) \\ g_s^3(s, t) & g_t^3(s, t) \end{pmatrix} ds \wedge dt.$$

**(2)** Se  $r = m = N$ , si ha  $\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N$  e

$$\mathbf{g}^\# \omega(\mathbf{t}) = f \circ \mathbf{g}(\mathbf{t}) J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^N.$$

Si noti l'analogia con la legge che regola il cambiamento di variabili negli integrali multipli, nei quali  $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})$  è in valore assoluto e l'elemento di volume  $d\mathbf{x} = dx^1 \dots dx^N$  non è orientato; qui  $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})$  compare senza il valore assoluto,  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N$  rappresenta l'elemento di volume *orientato* e l'integrale dipende dall'orientazione. Torneremo in seguito su questo punto.

**(3)** Sia  $r = m = 1$ . Allora  $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{x}) dx^i$  e

$$\mathbf{g}^\# \omega(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{g}(t)) \frac{\partial g^i}{\partial t}(t) dt = \langle \omega(\mathbf{g}(t)), \mathbf{g}'(t) \rangle_N^* dt;$$

dunque se  $\Gamma$  è il sostegno della curva  $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , orientata nel verso delle  $t$  crescenti, si ha, ricordando la definizione 4.6.3,

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \langle \omega(\mathbf{g}(t)), \mathbf{g}'(t) \rangle_N^* dt = \int_{[a,b]^+} \mathbf{g}^\# \omega.$$

Questa relazione spiega perché la forma  $\mathbf{g}^\# \omega$  viene chiamata pull-back di  $\omega$  secondo  $\mathbf{g}$ : infatti “pull-back” è un termine militare che significa “ripiegamento”, e per l'appunto la formula precedente costituisce un “ripiegamento” dall'integrale di  $\omega$  sulla curva  $\Gamma = \mathbf{g}[a, b]$  all'integrale di  $\mathbf{g}^\# \omega$  su  $[a, b]$ .

Nel seguito generalizzeremo questa formula al caso di integrali di  $r$ -forme su  $r$ -varietà orientate.

## Aggiunta di una $r$ -forma

Se  $\omega$  è una  $r$ -forma definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ , la sua *aggiunta* è la  $(N - r)$ -forma  $*\omega$  definita da

$$(*\omega)(\mathbf{x}) = *(\omega(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

In altre parole, l'aggiunta della  $r$ -forma  $\omega$  è la  $(N - r)$ -forma il cui valore in ogni punto  $\mathbf{x}$  è l'aggiunto dell' $r$ -covettore  $\omega(\mathbf{x})$ .

Nel caso  $r = N - 1$  è particolarmente importante il seguente

**Esempio 4.14.11** Sia  $\omega$  una  $(N - 1)$ -forma di classe  $C^1$ : allora  $d\omega$  è una  $N$ -forma, dunque del tipo

$$d\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N.$$

Vogliamo determinare la  $f$ . Sia  $\zeta = *\omega$ :  $\zeta$  è una 1-forma e, ricordando la definizione 4.12.24, si ha

$$\zeta_i(\mathbf{x}) = (-1)^{i-1} \omega_{i'}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Introduciamo la *divergenza* della 1-forma  $\zeta$ , ossia la funzione

$$(\operatorname{div} \zeta)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A;$$

si vede facilmente allora che  $f = \operatorname{div} \zeta$ : infatti

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N d(\omega_{i'}(\mathbf{x}) e^{i'}) = \sum_{i=1}^N d\omega_{i'}(\mathbf{x}) \wedge e^{i'} = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_{i'}}{\partial x^j}(\mathbf{x}) e^j \wedge e^{i'} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_{i'}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) (-1)^{i-1} e^{1\dots N} = \operatorname{div} \zeta(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N. \end{aligned}$$

In definitiva, per ogni  $(N - 1)$ -forma  $\omega$  si ha

$$*d\omega = \operatorname{div}(*\omega).$$

**Osservazione 4.14.12** Ancora una volta vediamo cosa accade nel caso particolare  $N = 3$ . Se  $\omega$  è una 1-forma definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\omega(x, y, z) = \omega_1(x, y, z)dx + \omega_2(x, y, z)dy + \omega_3(x, y, z)dz,$$

il *rotore* di  $\omega$  è la 1-forma

$$\operatorname{rot} \omega = *d\omega;$$

dunque

$$(\operatorname{rot} \omega)_i = (*d\omega)_i = (-1)^{i-1}(d\omega)^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Poiché

$$\begin{aligned} d\omega &= d\omega_1 \wedge dx^1 + d\omega_2 \wedge dx^2 + d\omega_3 \wedge dx^3 = \\ &= \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

otteniamo l'espressione del rotore che ci è ben nota dalla fisica:

$$\operatorname{rot} \omega = \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} \right) dx^1 - \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} \right) dx^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^3.$$

Notiamo infine che, tenuto conto dell'esempio 4.14.11, per ogni 1-forma  $\omega$  di classe  $C^1$  su un aperto di  $\mathbb{R}^3$  si ha

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \omega = \tilde{d}(\operatorname{rot} \omega) = \tilde{d}(*d\omega) = *d(d\omega) = *0 = 0.$$

#### Esercizi 4.14

1. Determinare il differenziale esterno delle seguenti forme differenziali in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & x^2 y \, dy - xy^2 \, dz, & \text{(ii)} \quad & \sin(xy^2) \, dx \wedge dz, \\ \text{(iii)} \quad & x \, dy \wedge dz + y \, dx \wedge dz + z \, dx \wedge dy, & \text{(iv)} \quad & (x^2 + z^2) \, dx. \end{aligned}$$

2. Determinare una  $(N-1)$ -forma  $\zeta$ , di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^N$ , tale che

$$d\zeta(\mathbf{x}) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N.$$

3. Trovare una  $(r-1)$ -forma  $\omega$ , di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^N$ , tale che  $d\omega(\mathbf{x}) = e^I$ , ove  $I$  è una  $r$ -pla crescente fissata. Dedurre che ogni  $r$ -covettore è una  $r$ -forma esatta in  $\mathbb{R}^N$ .

4. (i) Provare che se  $\omega, \zeta$  sono  $r$ -forme chiuse di classe  $C^1$ , anche  $\omega \wedge \zeta$  è chiusa.

(ii) Provare che se  $\omega$  è chiusa e  $\zeta$  è esatta, allora  $\omega \wedge \zeta$  è esatta.

5. Determinare il differenziale esterno delle seguenti  $r$ -forme di classe  $C^1$ :

$$\text{(i)} \quad d\omega \wedge \zeta - \omega \wedge d\zeta, \quad \text{(ii)} \quad d\omega \wedge \zeta \wedge \eta + \omega \wedge d\zeta \wedge \eta + \omega \wedge \zeta \wedge d\eta.$$

6. Sia  $f$  un *fattore integrante* nell'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  per la 1-forma  $\omega$ , ossia una funzione mai nulla in  $A$  tale che  $f\omega$  sia una 1-forma chiusa in  $A$ ; provare che  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

7. Sia  $N = 2$ . Fissate due funzioni  $M, N$  di classe  $C^1$ , provare che:

$$\text{(i)} \quad *(M \, dx + N \, dy) = N \, dx - M \, dy, \quad \text{(ii)} \quad *d(N \, dx - M \, dy) = -(M_x + N_y).$$

8. Sia  $N = 3$  e siano  $P, Q, R$  funzioni di classe  $C^1$ . Posto

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

si provi che

$$*\omega = P dx + Q dy + R dz,$$

$$d\omega = (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

9. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , sia  $f \in C^1(A)$  e sia  $\omega$  una 1-forma di classe  $C^1$  definita in  $A$ . Provare che:

$$(i) \operatorname{div}(df) = \Delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2},$$

$$(ii) \operatorname{div}(f\omega) = f \operatorname{div} \omega + \langle df, \omega \rangle_{N,1,*}.$$

(L'operatore  $\Delta$ , già introdotto nell'esercizio 4.8.5, si chiama *operatore di Laplace*).

10. Siano  $N = m = 3$  e poniamo  $\mathbf{g}(s, t, u) = (s \cos t, s \sin t, u)$ . Calcolare

$$(i) \mathbf{g}^\#(f dx \wedge dy \wedge dz), \quad (ii) \mathbf{g}^\#(x dy \wedge dz).$$

11. Provare che se  $\omega$  è una 2-forma di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^N$ , allora

$$d\omega = \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \left( \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k.$$

12. Sia  $N = 3$ . Se  $\zeta, \omega$  sono 1-forme, definiamo la 1-forma

$$\zeta \times \omega = *(\zeta \wedge \omega).$$

Si provi che se  $\zeta$  e  $\omega$  sono di classe  $C^2$  e chiuse, allora

$$\operatorname{div}(\zeta \times \omega) = 0.$$

13. Sia  $N = 3$  e sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Se  $f \in C^2(A)$  e  $\omega, \zeta$  sono 1-forme di classe  $C^2$  su  $A$ , provare che

$$(i) \operatorname{rot}(f\omega) = f \operatorname{rot} \omega + df \times \omega,$$

$$(ii) \operatorname{rot}(f df) = 0;$$

$$(iii) \operatorname{rot}(\zeta \times \omega) = *d[* (\zeta \wedge \omega)];$$

$$(iv) \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \omega) = d(\operatorname{div} \omega) - \sum_{i=1}^3 \Delta \omega_i dx^i;$$

$$(v) \langle \zeta, (*d\omega) \rangle_{3,1,*} = *(\zeta \wedge d\omega);$$

$$(vi) \langle \zeta, \operatorname{rot} \omega \rangle_{3,1,*} - \langle \omega, \operatorname{rot} \zeta \rangle_{3,1,*} = \operatorname{div}(\omega \times \zeta).$$

## 4.15 Integrazione di $r$ -forme su $r$ -varietà orientate

Sia  $V$  una  $r$ -varietà della forma  $V = \mathbf{G}(T)$ , con  $T$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}^r$  tale che esista un aperto  $A$  con  $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$ , e con  $\mathbf{G} : T \rightarrow \mathbb{R}^N$  di classe  $C^1$  tale che  $\mathcal{I}(\mathbf{t}) > 0$  per ogni  $\mathbf{t} \in A$ . Supponiamo che  $V$  sia orientabile, e che la sua orientazione  $\boldsymbol{\alpha}$  sia quella indotta da  $\mathbf{G}$  nel modo descritto nell'osservazione 4.13.6: dunque per  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{t})$  si ha

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t})}{\mathcal{I}(\mathbf{t})}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t^r}(\mathbf{t}).$$

**Definizione 4.15.1** Sia  $B \subseteq A$  un compatto e sia  $D = \mathbf{G}(B)$ . Se  $\omega$  è una  $r$ -forma di classe  $C^0$  su  $D$ , l'integrale di  $\omega$  su  $D^\alpha$ , ossia sull'insieme  $D$  orientato mediante  $\boldsymbol{\alpha}$ , è il numero reale

$$\int_{D^\alpha} \omega = \int_D \langle \omega(\mathbf{x}), \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \rangle_{N,r}^* d\mathbf{v}_r.$$

Osserviamo che l'integrale a destra è quello introdotto nella definizione 4.13.2, ed ha senso perché  $\mathbf{x} \mapsto \langle \omega(\mathbf{x}), \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \rangle_{N,r}^*$  è una funzione continua sul compatto  $D$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} \int_{D^\alpha} \omega &= \int_B \langle \omega(\mathbf{G}(\mathbf{t})), \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \rangle_{N,r}^* \mathcal{I}(\mathbf{t}) dt = \int_B \langle \omega(\mathbf{G}(\mathbf{t})), \mathbf{a}(\mathbf{t}) \rangle_{N,r}^* dt = \\ &= \int_B \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \det \left\{ \frac{\partial G^{i_h}}{\partial t^k}(\mathbf{t}) \right\} dt = \\ &= \int_B \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \langle dG^{i_1}(\mathbf{t}) \wedge \dots \wedge dG^{i_r}(\mathbf{t}), \mathbf{e}_{1\dots r} \rangle_{r,r}^* dt = \\ &= \int_B \langle \mathbf{G}^\# \omega(\mathbf{t}), \mathbf{e}_{1\dots r} \rangle_{r,r}^* dt = \int_{B^+} \mathbf{G}^\# \omega, \end{aligned}$$

ove  $\mathbf{G}^\# \omega$  è il pull-back di  $\omega$  secondo  $\mathbf{G}$  introdotto nella definizione 4.14.6 e  $B^+$  è orientato secondo  $\mathbf{e}_{1\dots r}$ . Questa relazione generalizza quella ottenuta nel caso  $r = 1$  nell'esempio 4.14.10 (3).

**Esempi 4.15.2 (1)** Quando  $r = 1$ , ritroviamo l'usuale integrale curvilineo di 1-forme: se  $\Gamma = \mathbf{G}[a, b]$  è orientata nel verso delle  $t$  crescenti,

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{G}(t)) (G^i)'(t) dt.$$

**(2)** Sia  $r = 2$  e sia  $V$  la semisfera di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Se  $f \in C^0(V)$ , e  $\boldsymbol{\alpha}$  è l'orientazione corrispondente alla normale diretta verso l'esterno di  $V$ , utilizzando le coordinate sferiche si ha, ricordando l'esempio 4.13.7 (2),

$$\begin{aligned} \int_{V^\alpha} f dx \wedge dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta) \alpha^{12}(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

(3) Per  $r = N$  si ottiene una “precisazione” dell’usuale formula del cambiamento di variabili: sia  $\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N$ , supponiamo che  $B$  sia orientato positivamente, e scegliamo per  $D = \mathbf{G}(B)$  l’orientazione positiva; dall’esempio 4.13.7 (3) sappiamo che questa orientazione su  $D$  è quella indotta da  $\mathbf{G}$  se  $J_{\mathbf{G}} > 0$ , mentre è l’opposta se  $J_{\mathbf{G}} < 0$ . Nel primo caso si ha

$$\int_{D^+} \omega = \int_D \langle \omega(\mathbf{x}), \mathbf{e}_{1\dots N} \rangle_{N,N}^* d\mathbf{v}_N = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{G}(\mathbf{t})) J_{\mathbf{G}}(\mathbf{t}) dt,$$

mentre nel secondo caso risulta

$$\int_{D^+} \omega = \int_D \langle \omega(\mathbf{x}), \mathbf{e}_{1\dots N} \rangle_{N,N}^* d\mathbf{v}_N = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_B f(\mathbf{G}(\mathbf{t})) J_{\mathbf{G}}(\mathbf{t}) dt.$$

In entrambi i casi, ovviamente, ritroviamo l’abituale relazione

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{G}(\mathbf{t})) |J_{\mathbf{G}}(\mathbf{t})| dt.$$

(4) Calcoliamo l’integrale

$$\int_{\Sigma^{\alpha}} \omega,$$

ove  $\omega$  è una 2-forma e  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  (con  $a, b, c$  non tutti nulli). Dunque la superficie  $\Sigma$  è l’intersezione tra la palla unitaria di  $\mathbb{R}^3$  ed il piano per l’origine perpendicolare al vettore  $\mathbf{w} = (a, b, c)$ , ed è orientata secondo l’orientazione assegnata  $\alpha$ : sarà dunque  $\alpha = \pm \left( * \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|_3} \right)$ . Per parametrizzare  $\Sigma$  è utile determinare due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  tali che la terna  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  sia una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  orientata positivamente, da cui  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = C \left( * \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|_3} \right)$  con  $C > 0$ . Si può scrivere allora  $\Sigma = \mathbf{g}(B)$ , ove

$$\mathbf{g}(s, t) = s \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|_3} + t \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|_3}, \quad (s, t) \in B = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 1\}.$$

Pertanto, se denotiamo con  $\bar{\alpha}$  l’orientazione su  $B$  dalla quale viene indotta su  $\Sigma$ , mediante  $\mathbf{g}$ , l’orientazione assegnata  $\alpha$ , otteniamo che l’integrale proposto vale

$$\int_{\Sigma^{\alpha}} \omega = \int_{B^{\bar{\alpha}}} \mathbf{g}^{\#} \omega = \pm \int_B \langle \omega(\mathbf{g}(s, t)), \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle_{2,2}^* ds dt,$$

col segno  $+$  se  $\alpha = +C \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ , col segno opposto se  $\alpha = -C \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ .

Per esempio, se  $\omega = x^2 dx \wedge dy + z^2 dx \wedge dz + y^2 dy \wedge dz$  ed  $a = 2, b = 1, c = 1$ , possiamo scegliere  $\mathbf{u} = (-1, 0, 2)$  e  $\mathbf{v} = (2, -5, 1)$ , da cui  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 5 \mathbf{e}_{12} - 5 \mathbf{e}_{13} + 10 \mathbf{e}_{23}$ ; supposto ad esempio che  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  sia un multiplo positivo di  $\alpha$ , si ha

$$\int_{\Sigma^{\alpha}} \omega = \int_B [5(-s + 2t)^2 - 5(-5t)^2 + 10(2s + t)^2] ds dt$$

e passando in coordinate polari, con facili calcoli si trova  $\int_{\Sigma^{\alpha}} \omega = \frac{45}{2} \pi$ .

## Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^N$

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$ . Se  $D$  è orientato positivamente, allora la normale esterna a  $\partial D$  (che è una  $(N-1)$ -varietà di classe  $C^1$ ) ne determina l'orientazione positiva, come illustrato nell'esempio 4.13.5. Vale allora il seguente

**Teorema 4.15.3 (della divergenza)** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$ . Allora per ogni  $(N-1)$ -forma  $\omega$  di classe  $C^1$  su  $\overline{D}$  si ha*

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_{D^+} d\omega.$$

Prima di provare il teorema facciamo qualche considerazione.

**Osservazioni 4.15.4 (1)** Il risultato vale anche se  $\partial D$  è unione finita di varietà  $C^1$  che si intersecano in sottovarietà  $(N-2)$ -dimensionali: ad esempio  $D$  potrebbe essere la parte interna di un cubo  $N$ -dimensionale. Per semplicità, proveremo il teorema nel caso più restrittivo in cui  $\partial D$  è di classe  $C^2$  (definizione 4.7.1). Il caso generale segue per approssimazione, seguendo quanto esposto nell'osservazione 4.9.17 (1).

**(2)** Se  $N = 2$ , il teorema si riduce alle formule di Gauss-Green (teorema 4.8.1). Infatti l'orientazione positiva di  $\partial D$  è quella per cui la coppia  $(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))$  ( $\boldsymbol{\nu}$  versore normale esterno,  $\boldsymbol{\tau}$  versore tangente a  $\partial D$ ) verifica  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})\mathbf{e}_{12}$  con  $c(\mathbf{x}) > 0$ ; ciò corrisponde, come sappiamo dall'osservazione 4.9.17 (2), a stare con i piedi su  $\partial D$ , immersi in  $\mathbb{R}^3$  con la testa dalla parte di  $\mathbf{e}_3$ , e a percorrere  $\partial D$  nel verso che lascia i punti di  $D$  a sinistra. Per una fissata 1-forma  $\omega = M dx + N dy$ , il teorema dice che

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} (M dx + N dy) &= \int_{\partial D^+} \omega = \int_{D^+} d\omega = \\ &= \int_{D^+} (N_x - M_y) dx \wedge dy = \int_D (N_x - M_y) dx dy, \end{aligned}$$

e questo è precisamente ciò che ci forniscono le formule di Gauss-Green.

**(3)** Se  $N = 1$  ci si riduce al teorema fondamentale del calcolo integrale. Infatti  $D = ]a, b[$ ,  $\partial D = \{a, b\}$ , la "normale esterna" è il numero 1 nel punto  $b$  e il numero  $-1$  nel punto  $a$ ; per la 0-forma  $\omega = f$ , ove  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ , si ha allora

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega = f(b) \cdot (+1) + f(a) \cdot (-1) = f(b) - f(a).$$

**(4)** Il nome "teorema della divergenza" deriva da una diversa ma equivalente formulazione. Sia  $\zeta$  una 1-forma su  $\overline{D}$  di classe  $C^1$ , e sia  $\omega$  la  $(N-1)$ -forma tale che  $*\omega = \zeta$ . Allora, indicata con  $\boldsymbol{\alpha}$  l'orientazione positiva di  $\partial D$ , si ha  $*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nu}$  (versore normale esterno); quindi

$$\langle \omega(\mathbf{x}), \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \rangle_{N, N-1}^* = \langle *\omega(\mathbf{x}), *\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \rangle_{N, 1}^* = \langle \zeta(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle_{N, 1}^*,$$

e poiché, per l'esempio 4.14.11,

$$d\omega(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \zeta(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N,$$

otteniamo

$$\int_D \operatorname{div} \zeta d\mathbf{x} = \int_{D^+} \operatorname{div} \zeta dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N = \int_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega = \int_{\partial D} \langle \zeta, \boldsymbol{\nu} \rangle_{N,1}^* d\mathbf{v}_{N-1}.$$

Sostituendo all'1-covettore  $\zeta$  il corrispondente 1-vettore  $\boldsymbol{\zeta}$  che ha le stesse coordinate, si ricava allora

$$\int_{\partial D} \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\nu} \rangle_N d\mathbf{v}_{N-1} = \int_D \operatorname{div} \zeta d\mathbf{x}.$$

Questa relazione è il motivo della denominazione del teorema.

Per provare il teorema della divergenza occorre un risultato preliminare.

**Lemma 4.15.5** *Sia  $\zeta$  una 1-forma di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}^N$  a supporto compatto, ossia con coefficienti nulli al di fuori di un compatto  $K \subset \mathbb{R}^N$ . Allora:*

(i)  $\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \zeta d\mathbf{x} = 0;$

(ii) *detto  $H$  il semispazio  $\{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x^N) \in \mathbb{R}^N : x^N < 0\}$ , si ha*

$$\int_H \operatorname{div} \zeta d\mathbf{x} = \int_{\partial H} \zeta_N(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{v}_{N-1}.$$

**Dimostrazione** (i) Integrando dapprima rispetto alla variabile  $x^i$ , e posto  $\mathbf{x}^{i'} = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^N)$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^i} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^i} dx^i \right] d\mathbf{x}^{i'} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} [\zeta_i(x^1, \dots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \dots, x^N)]_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x}^{i'} = 0, \end{aligned}$$

da cui, per definizione di divergenza di una 1-forma, sommando su  $i$  si ricava

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \zeta d\mathbf{x} = 0.$$

(ii) Se  $1 \leq i \leq N-1$ , ragionando come in (i), si trova

$$\int_H \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^i} d\mathbf{x} = 0.$$

Se  $i = N$ , integrando dapprima rispetto a  $x^N$  si ha

$$\int_H \frac{\partial \zeta_N}{\partial x^N} d\mathbf{x} = \int_{\partial H} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \zeta_N}{\partial x^N} dx^N \right] d\mathbf{x}' = \int_{\partial H} [\zeta_N(\mathbf{x}', t)]_{-\infty}^0 d\mathbf{x}' = \int_{\partial H} \zeta_N(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{v}_{N-1};$$



sommando fra 1 e N si ottiene la tesi del lemma 4.15.5.  $\square$

**Dimostrazione del teorema 4.15.3** Proviamo anzitutto che per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \overline{D}$  esiste un intorno  $U_0$  tale che per ogni  $(N-1)$ -forma  $\omega$  con supporto contenuto in  $\overline{U_0}$  si ha

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_{D^+} d\omega.$$

Se  $\mathbf{x}_0 \in D$ , la cosa è facile: scelto  $U_0 \subseteq D$ , avremo  $\int_{\partial D^+} \omega = 0$  in quanto  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  per  $\mathbf{x} \in \partial D$ ; d'altronde anche l'integrale  $\int_{D^+} d\omega$  è nullo poiché, ricordando l'esempio 4.14.11,

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{(\mathbb{R}^N)^+} d\omega = \int_{(\mathbb{R}^N)^+} \operatorname{div}(*\omega) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N = \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(*\omega) d\mathbf{x} = 0,$$

ove l'ultimo passaggio è conseguenza del lemma 4.15.5 (i).

Se  $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ , la dimostrazione è meno facile. Scelto un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^N$ , osserviamo che per ipotesi, pur di rimpicciolire opportunamente  $U$ , esiste  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^2$ , tale che  $\nabla\varphi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  in  $U$  e

$$U \cap D = \{\mathbf{x} \in U : \varphi(\mathbf{x}) < 0\}, \quad U \cap \partial D = \{\mathbf{x} \in U : \varphi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

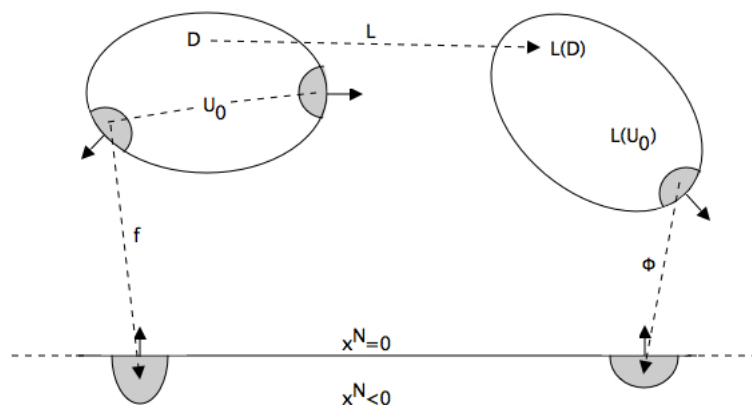
Andiamo a costruire un diffeomorfismo  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  tale che  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$  in  $U$  ed inoltre

$$\mathbf{f}(U \cap D) \subseteq H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^N < 0\}, \quad \mathbf{f}(U \cap \partial D) \subseteq \partial H.$$

Se il versore normale esterno a  $D$  verifica  $\nu^N(\mathbf{x}_0) \neq 0$  allora, osservando che  $\nu(\mathbf{x}) = \frac{\nabla\varphi(\mathbf{x})}{|\nabla\varphi(\mathbf{x})|_N}$ , basta definire

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x^1, \dots, x^{N-1}, \varphi(\mathbf{x}))$$

per soddisfare entrambe le richieste quando  $U$  è sufficientemente piccolo.



Se invece  $\nu^N(\mathbf{x}_0) = 0$ , fissiamo una rotazione  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tale che  $\mathbf{L}(\nu(\mathbf{x}_0))$  abbia la sua  $N$ -sima componente non nulla. Allora il punto  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{L}(\mathbf{x}_0)$  appartiene al bordo dell'aperto  $\mathbf{L}(D)$ , e nel suo intorno  $\mathbf{L}(U)$  è definita la funzione  $\phi = \varphi \circ \mathbf{L}^{-1}$ , la quale verifica

$$\mathbf{L}(U \cap D) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{L}(U) : \phi(\mathbf{y}) < 0\}, \quad \mathbf{L}(U \cap \partial D) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{L}(U) : \phi(\mathbf{y}) = 0\},$$

ed inoltre, detto  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  il versore normale esterno nei punti di  $\partial\mathbf{L}(D)$ ,

$$\frac{\partial\phi}{\partial y^N}(\mathbf{y}_0) = |\nabla\phi(\mathbf{y}_0)|_N \mathbf{n}^N(\mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Posto  $\Phi(\mathbf{y}) = (y^1, \dots, y^{N-1}, \phi(\mathbf{y}))$ , la mappa  $\Phi$  è un diffeomorfismo tale che  $J_\Phi(\mathbf{y}) \neq 0$  in  $\mathbf{L}(U)$ , se  $U$  è sufficientemente piccolo. Ne segue che  $\mathbf{f} = \Phi \circ \mathbf{L}$  è un diffeomorfismo con le proprietà richieste.

Poniamo  $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{-1}$ : notiamo che  $\mathbf{g}$  è di classe  $C^2$ . Denotiamo con  $\alpha$  l'orientazione su  $H$  che dà luogo, tramite il diffeomorfismo  $\mathbf{g}$ , all'orientazione positiva su  $D \cap U$ . Allora, in base alla proposizione 4.13.10, visto che il versore normale esterno a  $H$  è  $\mathbf{e}_N$ , l'orientazione  $\bar{\alpha}$  su  $\partial H$ , tale che  $\mathbf{e}_N \wedge \bar{\alpha} = \alpha$ , è coerente con  $\alpha$  e darà luogo, tramite  $\mathbf{g}$ , all'orientazione positiva su  $\partial D \cap U$ .

Si noti che, in particolare, da  $\mathbf{e}_N \wedge \bar{\alpha} = \alpha$  segue che  $*\bar{\alpha} = c \mathbf{e}_N$ , con  $|c| = 1$ . Ne segue

$$\mathbf{e}_{1\dots N} = *\bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} = c \mathbf{e}_N \wedge \bar{\alpha} = c \alpha,$$

da cui  $\text{sgn}(\bar{\alpha}) = c = \text{sgn}(\alpha)$ .

Ciò premesso, sia  $U_0$  un intorno di  $\mathbf{x}_0 \in \partial D$  con  $\bar{U}_0 \subseteq U$  e consideriamo per adesso il caso di una  $(N-1)$ -forma  $\omega$  con supporto contenuto in  $U_0$ . Utilizzando la definizione e le proprietà del pull-back secondo  $\mathbf{g}$ , nonché la definizione di divergenza di una 1-forma, si ha

$$\begin{aligned} \int_{D^+} d\omega &= \int_{(U_0 \cap D)^+} d\omega = \int_{[\mathbf{f}(U_0 \cap D)]^\alpha} \mathbf{g}^\#(d\omega) = \int_{H^\alpha} \mathbf{g}^\#(d\omega) = \int_{H^\alpha} d(\mathbf{g}^\#\omega) = \\ &= \int_{H^\alpha} \text{div}(*\mathbf{g}^\#\omega) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N = \text{sgn}(\alpha) \int_H \text{div}(*\mathbf{g}^\#\omega) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'altra parte, si ha anche

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} \omega &= \int_{(U_0 \cap \partial D)^+} \omega = \int_{[\mathbf{f}(U_0 \cap \partial D)]^{\bar{\alpha}}} \mathbf{g}^\#\omega = \int_{\partial H^{\bar{\alpha}}} \mathbf{g}^\#\omega = \\ &= \int_{\partial H} \langle \mathbf{g}^\#\omega, \bar{\alpha} \rangle_{N, N-1}^* d\mathbf{x}' = \int_{\partial H} \langle *\mathbf{g}^\#\omega, *\bar{\alpha} \rangle_{N, 1}^* d\mathbf{x}' = \\ &= \text{sgn}(*\bar{\alpha}) \int_{\partial H} (*\mathbf{g}^\#\omega)_N(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}' = \text{sgn}(\bar{\alpha}) \int_{\partial H} (*\mathbf{g}^\#\omega)_N(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}', \end{aligned}$$

e per il lemma 4.15.5 (ii), grazie alla coerenza fra  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ , si conclude che

$$\int_{D^+} d\omega = \text{sgn}(\alpha) \int_H \text{div}(*\mathbf{g}^\#\omega) d\mathbf{x} = \text{sgn}(\bar{\alpha}) \int_{\partial H} (*\mathbf{g}^\#\omega)_N(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}' = \int_{\partial D^+} \omega.$$

La tesi del teorema 4.15.3 è dunque provata nel caso in cui la  $(N-1)$ -forma abbia supporto compatto e sufficientemente piccolo.

Per passare al caso generale ricopriamo il compatto  $\bar{D}$  con un numero finito di intorni  $U_1, \dots, U_k$  per i quali valga la relazione

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega$$

per ogni  $(N - 1)$ -forma  $\omega$ , di classe  $C^1$ , avente supporto contenuto in uno degli  $U_j$ . Sia  $\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq k}$  una partizione dell'unità associata al ricoprimento  $\{U_j\}$  (proposizioni 3.15.22 e 3.15.23). Se  $\omega$  è un'arbitraria  $(N - 1)$ -forma di classe  $C^1$  in  $\overline{D}$ , avremo

$$\int_{\partial D^+} \phi_j \omega = \int_{D^+} d(\phi_j \omega) = \int_{D^+} (d\phi_j \wedge \omega + \phi_j d\omega), \quad 1 \leq j \leq k,$$

perché il supporto di  $\phi_j \omega$  è contenuto in  $U_j$ . Ma essendo  $\sum_{j=1}^k \phi_j \equiv 1$ , si ha  $\sum_{j=1}^k d\phi_j \equiv 0$ , e quindi

$$\int_{\partial D^+} \omega = \sum_{j=1}^k \int_{\partial D^+} \phi_j \omega = \sum_{j=1}^k \int_{D^+} d(\phi_j \omega) = \sum_{j=1}^k \int_{D^+} \phi_j d\omega = \int_{D^+} d\omega,$$

e ciò conclude la dimostrazione del teorema della divergenza.  $\square$

## Formula di Stokes per $r$ -varietà

Il teorema della divergenza può essere generalizzato al caso in cui l'aperto  $D \subset \mathbb{R}^N$  è rimpiazzato da una  $r$ -varietà orientata  $V$  e la frontiera  $\partial D$  dal bordo  $bV$  della varietà, anch'esso convenientemente orientato, mentre la forma  $\omega$  da integrare è di grado  $r - 1$  anziché  $N - 1$ .

Ricordiamo che se  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  è il versore tangente a  $V$  e normale a  $bV$  nel generico punto  $\mathbf{x} \in bV$ , diretto verso l'esterno, allora l'orientazione positiva  $\boldsymbol{\alpha}$  di  $V$  e l'orientazione positiva  $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$  di  $bV$  verificano, grazie alla proposizione 4.13.10,  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \overline{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = c\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  con  $c > 0$ .

**Teorema 4.15.6 (formula di Stokes  $r$ -dimensionale)** *Sia  $V$  una  $r$ -varietà con bordo, compatta, orientabile e di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^N$ , con assegnata orientazione  $\boldsymbol{\alpha}$ ; supponiamo che il bordo  $bV$  abbia orientazione  $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$  coerente con  $\boldsymbol{\alpha}$ , e denotiamo tali varietà orientate con  $V^\boldsymbol{\alpha}$  e con  $bV^{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}$ . Allora se  $\omega$  è una  $(r - 1)$ -forma di classe  $C^1$  definita su  $V$ , si ha*

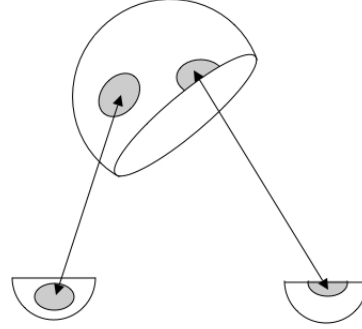
$$\int_{V^\boldsymbol{\alpha}} d\omega = \int_{bV^{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}} \omega.$$

**Dimostrazione** Sulla base della definizione 4.11.5, per ogni  $\mathbf{x} \in V$  esistono un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}$  in  $V$  ed un omeomorfismo  $\boldsymbol{\varphi} : U \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(U) \subseteq B_-$  con inversa di classe  $C^1$ . Per compattezza, esiste un sottoricoprimento finito, di indici  $i_1, \dots, i_m$ , e sia  $\boldsymbol{\varphi}_i$  il corrispondente omeomorfismo. Fissato  $h \in \{1, \dots, m\}$ , supponiamo dapprima che la forma  $\omega$  abbia supporto contenuto in  $U_{i_h}$ . Poniamo  $W_h = \boldsymbol{\varphi}_{i_h}(U_{i_h})$ ,  $\boldsymbol{\psi}_h = \boldsymbol{\varphi}_{i_h}^{-1}$  e denotiamo con  $\boldsymbol{\beta}$  l'orientazione su  $W_h$  dalla quale viene indotta su  $U_{i_h}$ , tramite  $\boldsymbol{\psi}_h$ , l'orientazione  $\boldsymbol{\alpha}$ ; utilizzando il pull-back  $\boldsymbol{\psi}_h^\# \omega$  secondo  $\boldsymbol{\psi}_h$ , dal teorema della divergenza in  $\mathbb{R}^r$  (teorema 4.15.3) segue

$$\int_{(U_{i_h})^\boldsymbol{\alpha}} d\omega = \int_{(W_h)^\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\psi}_h^\#(d\omega) = \int_{(W_h)^\boldsymbol{\beta}} d(\boldsymbol{\psi}_h^\# \omega) = \int_{(\partial W_h)^{\overline{\boldsymbol{\beta}}}} \boldsymbol{\psi}_h^\# \omega.$$

Ora, se  $U_{i_h} \cap bV = \emptyset$ , allora  $\psi_h^\# \omega$  ha supporto contenuto nell'aperto  $W_h$  e quindi  $\int_{(\partial W_h)^\beta} \psi_h^\# \omega = 0$ ; d'altronde anche l'integrale  $\int_{(U_{i_h} \cap bV)^\alpha} \omega$  è nullo, essendo  $U_{i_h} \cap bV = \emptyset$ . Pertanto se  $U_{i_h} \cap bV = \emptyset$

$$\int_{(U_{i_h})^\alpha} d\omega = 0 = \int_{(U_{i_h} \cap bV)^\alpha} \omega.$$



Se invece  $U_{i_h} \cap bV \neq \emptyset$ , allora  $W_h \cap \Gamma \neq \emptyset$ ; in questo caso si ha, dato che il supporto di  $\psi_h^\# \omega$  è disgiunto da  $\partial W_h \setminus \Gamma$  e quello di  $\omega$  è disgiunto da  $b(U_{i_h} \cap V) \setminus bV$ ,

$$\int_{(U_{i_h})^\alpha} d\omega = \int_{(\partial W_h)^\beta} \psi_h^\# \omega = \int_{\Gamma^\beta} \psi_h^\# \omega = \int_{(U_{i_h} \cap bV)^\alpha} \omega.$$

Risulta dunque in entrambi i casi, quando il supporto di  $\omega$  è incluso in  $U_{i_h}$ ,

$$\int_{(U_{i_h})^\alpha} d\omega = \int_{(U_{i_h} \cap bV)^\alpha} \omega, \quad h = 1, \dots, m.$$

Sia ora  $\omega$  una  $(r-1)$ -forma di classe  $C^1$  arbitraria. Se  $\{\phi_h\}_{1 \leq h \leq m}$  è una partizione dell'unità associata al ricoprimento  $\{U_{i_h}\}_{1 \leq h \leq m}$ , possiamo scrivere, essendo  $\sum_{h=1}^m d\phi_h = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{bV^\alpha} \omega &= \sum_{h=1}^m \int_{bV^\alpha} \phi_h \omega = \sum_{h=1}^m \int_{(U_{i_h} \cap bV)^\alpha} \phi_h \omega = \sum_{h=1}^m \int_{U_{i_h}^\alpha} d(\phi_h \omega) = \\ &= \sum_{h=1}^m \int_{U_{i_h}^\alpha} [d\phi_h \wedge \omega + \phi_h d\omega] = 0 + \sum_{h=1}^m \int_{U_{i_h}^\alpha} (\phi_h \omega) = \sum_{h=1}^m \int_{V^\alpha} \phi_h \omega = \int_{V^\alpha} \omega. \quad \square \end{aligned}$$

**Osservazione 4.15.7** Nel caso  $N = 3$  e  $r = 2$ , si ha

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

con  $P, Q, R$  funzioni di classe  $C^1$ ; inoltre  $*d\omega = \text{rot } \omega$  (osservazione 4.14.12), mentre  $*\alpha(x, y, z)$  è il versore  $\mathbf{n}(x, y, z)$  normale alla superficie  $V$  (osservazione 4.15.4 (4)). Sia poi  $\boldsymbol{\tau}$  il versore tangente a  $bV$ , con verso coerente con quello di  $\mathbf{n}$ ; in base all'osservazione 4.9.17 (3), un osservatore con i piedi su  $V$  e la testa nella direzione di  $\mathbf{n}$ , che percorra  $bV$  nel verso di  $\boldsymbol{\tau}$ , vedrà  $V$  alla sua sinistra. Allora la formula di Stokes diventa

$$\begin{aligned} \int_{bV} \langle \omega, \boldsymbol{\tau} \rangle_{3,1}^* ds &= \int_{bV^\alpha} \omega = \int_{V^\alpha} d\omega = \int_V \langle d\omega, \boldsymbol{\alpha} \rangle_{3,2}^* d\mathbf{v}_2 = \\ &= \int_V \langle *d\omega, *\boldsymbol{\alpha} \rangle_{3,1}^* d\mathbf{v}_2 = \int_V \langle \text{rot } \omega, \mathbf{n} \rangle_{3,1}^* ds, \end{aligned}$$

che è la formula già incontrata nel teorema 4.9.16.

## Forme chiuse e forme esatte di grado $r$

Ogni 1-forma esatta di classe  $C^1$  su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  è chiusa, come illustrato subito dopo la definizione 4.6.2, ma come sappiamo il viceversa è falso, tranne che nel caso in cui l'aperto  $A$  sia semplicemente connesso.

Nel caso di  $r$ -forme vale un risultato analogo, ma meno forte.

**Lemma 4.15.8 (di Poincaré)** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto stellato rispetto ad un suo punto  $\mathbf{x}_0$ , ossia tale che per ogni  $\mathbf{x} \in A$  il segmento di estremi  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$  sia contenuto in  $A$ . Allora ogni  $r$ -forma chiusa definita su  $A$  è esatta in  $A$ .*

**Dimostrazione** Cominciamo con l'associare ad ogni  $r$ -forma  $\eta$ , di classe  $C^1$  su  $[0, 1] \times A$ , una  $(r-1)$ -forma, di classe  $C^1$  su  $A$ , che denoteremo  $\int \eta$ , definita come segue:

- se  $r = 1$ , e  $\eta = f(s, \mathbf{x}) ds + \sum_{i=1}^N f_i(s, \mathbf{x}) dx^i$ , poniamo

$$\int \eta = \int_0^1 f(s, \cdot) ds;$$

- se  $1 < r \leq N$ , ogni  $r$ -forma su  $A$  è del tipo

$$\eta = ds \wedge \vartheta + \zeta,$$

ove la  $(r-1)$ -forma  $\vartheta$  e la  $r$ -forma  $\zeta$  sono genericamente date da

$$\vartheta = \sum_{+J} \vartheta_J(s, \mathbf{x}) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}}, \quad \zeta = \sum_{+I} \zeta_I(s, \mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r};$$

poniamo allora

$$\int \eta = \sum_{+J} \left( \int_0^1 \vartheta_J(s, \cdot) ds \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}}.$$

Osserviamo che l'applicazione  $\eta \mapsto \int \eta$  è lineare, nel senso che

$$\int [ds \wedge (c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2)] = c_1 \int [ds \wedge \vartheta_1] + c_2 \int [ds \wedge \vartheta_2]$$

per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  e per ogni coppia di  $(r-1)$ -forme  $\vartheta_1, \vartheta_2$ . Inoltre per ogni  $r$ -pla crescente  $I$  vale una particolare proprietà associativa, vale a dire

$$[\int \eta] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \int [\eta \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}].$$

Dimostriamo il seguente

**Lemma 4.15.9** *Sia  $\eta = ds \wedge \vartheta + \zeta$  una  $r$ -forma di classe  $C^1$  su  $[0, 1] \times A$ , dove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^N$ . Allora*

$$\int d\eta + d \int \eta = \zeta(1) - \zeta(0),$$

ove si è posto

$$\zeta(1) = \sum_{+I} \zeta_I(1, \mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad \zeta(0) = \sum_{+I} \zeta_I(0, \mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

**Dimostrazione** Denotiamo con  $d'$  il differenziale esterno relativo alle variabili  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N) \in A$ . Dalle regole di calcolo del differenziale esterno si ricava facilmente

$$d\eta = d(ds \wedge \vartheta) + d\zeta = d^2s \wedge \vartheta - ds \wedge d\vartheta + d\zeta = -ds \wedge d'\vartheta + ds \wedge \frac{\partial \zeta}{\partial s} + d'\zeta,$$

ove si è posto

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \sum_{+I} \frac{\partial \zeta_I}{\partial s}(s, \mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Dunque, per definizione dell'operatore  $\int$  e per linearità,

$$\int d\eta = -\int [ds \wedge d'\vartheta] + \int \left[ ds \wedge \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right],$$

ed anche

$$\begin{aligned} \int \left[ ds \wedge \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right] &= \sum_{+I} \left( \int_0^1 \frac{\partial \zeta_I}{\partial s}(s, \cdot) ds \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \sum_{+I} [\zeta_I(1, \cdot) - \zeta_I(0, \cdot)] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \zeta(1) - \zeta(0). \end{aligned}$$

Ora osserviamo che se  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  su  $[0, 1] \times A$ , allora si ha

$$d \int_0^1 f(s, \cdot) ds = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(s, \cdot) ds \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_N} = \int [ds \wedge d'f].$$

Ne segue, utilizzando la linearità e l'associatività, che per ogni  $r$ -forma  $\eta = ds \wedge \vartheta$  di classe  $C^1$  si ha

$$\begin{aligned} d\int \eta &= d \left[ \sum_{+J} \left( \int_0^1 \vartheta_J(s, \cdot) ds \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \right] = \\ &= \sum_{+J} \left[ d \left( \int_0^1 \vartheta_J(s, \cdot) ds \right) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \right] = \\ &= \int_0^1 \left[ ds \wedge \sum_{+J} d'\vartheta_J \right] \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} = \\ &= \int_0^1 \left[ ds \wedge \left( \sum_{+J} d'\vartheta_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \right) \right] = \int [ds \wedge d'\vartheta]. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int d\eta + d \int \eta = -\int [ds \wedge d'\vartheta] + \zeta(1) - \zeta(0) + \int [ds \wedge d'\vartheta],$$

e ciò prova il lemma 4.15.9.  $\square$

Torniamo alla dimostrazione del lemma di Poincaré. Consideriamo l'omotopia  $\mathbf{H}(s, \mathbf{x})$  fra le funzioni  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$  (costante) e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  (l'identità), data da

$$\mathbf{H}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (s, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times A.$$

Poiché  $A$  è stellato rispetto a  $\mathbf{x}_0$ , la mappa  $\mathbf{H}$  è a valori in  $A$ . Se  $\omega$  è una  $r$ -forma di classe  $C^1$  definita in  $A$ , siano  $\mathbf{f}^\#\omega$ ,  $\mathbf{g}^\#\omega$  e  $\mathbf{H}^\#\omega$  i pull-back di  $\omega$  secondo le funzioni  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{H}$ . Osserviamo in particolare che se  $\omega = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{x}) dx^i$ , possiamo scrivere

$$\mathbf{H}^\#\omega = \sum_{+I} \omega_I(\mathbf{H}(s, \mathbf{x})) dH^{i_1} \wedge \dots \wedge dH^{i_r} = ds \wedge \vartheta + \zeta,$$

dove  $\vartheta$  è una  $(r-1)$ -forma in cui compaiono tutti i termini contenenti derivate delle componenti di  $\mathbf{H}$  rispetto a  $s$ , e che quindi sono relativi a differenziali  $dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_{r-1}}$  in cui  $ds$  non appare perché è stato “messo in evidenza”, mentre  $\zeta$  è una  $r$ -forma in cui compaiono tutti i termini privi di derivate delle componenti di  $\mathbf{H}$  rispetto a  $s$ , e che quindi sono relativi a differenziali  $dt^{i_1} \wedge \dots \wedge dt^{i_r}$  in cui  $ds$  non è presente. Si vede facilmente, di conseguenza, che se  $\eta = \mathbf{H}^\#\omega$  allora si ha  $\zeta(1) = \mathbf{g}^\#\omega$  e  $\zeta(0) = \mathbf{f}^\#\omega$ , in quanto in  $\zeta$  non compaiono derivazioni rispetto a  $s$ . Dal lemma 4.15.9 ricaviamo perciò

$$\int d(\mathbf{H}^\#\omega) + d \int \mathbf{H}^\#\omega = \mathbf{g}^\#\omega - \mathbf{f}^\#\omega.$$

Notiamo adesso che, per ipotesi,  $\omega$  è chiusa, ossia  $d\omega = 0$ : ne segue, automaticamente, che  $d(\mathbf{H}^\#\omega) = 0$ , mentre  $\mathbf{f}^\#\omega = \sum_{*I} \omega_I(\mathbf{x}_0) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_r} = 0$  e  $\mathbf{g}^\#\omega = \omega$ . Dalla relazione precedente ricaviamo allora, posto  $\xi = \int \mathbf{H}^\#\omega$ ,

$$d\xi = d \int \mathbf{H}^\#\omega = - \int d(\mathbf{H}^\#\omega) + \mathbf{g}^\#\omega - \mathbf{f}^\#\omega = - \int 0 + \omega - 0 = \omega,$$

cosicché  $\omega$  è esatta e  $\xi$  ne è una primitiva.  $\square$

**Osservazione 4.15.10** Esiste un risultato più generale che caratterizza precisamente gli aperti  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  tali che ogni  $r$ -forma chiusa su  $A$  sia esatta.

Consideriamo gli spazi vettoriali reali

$$\mathcal{Z}^r(A) = \{\omega : \omega \text{ è una } r\text{-forma chiusa di classe } C^\infty \text{ su } A\},$$

$$\mathcal{E}^r(A) = \{\omega : \omega \text{ è una } r\text{-forma esatta di classe } C^\infty \text{ su } A\}.$$

È chiaro che  $\mathcal{E}^r(A)$  è un sottospazio di  $\mathcal{Z}^r(A)$ . In topologia algebrica vi è un noto teorema, dovuto a De Rham, secondo il quale lo spazio quoziente  $\mathcal{Z}^r(A)/\mathcal{E}^r(A)$  è isomorfo a  $\mathcal{H}^r(A)$ , *gruppo di coomologia  $r$ -dimensionale* di  $A$  a coefficienti reali. Da questo risultato segue in particolare che

$$\mathcal{E}^r(A) = \mathcal{Z}^r(A) \iff \mathcal{H}^r(A) = \{0\}.$$

Pertanto, dato un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ , avremo l'esattezza di ogni  $r$ -forma chiusa di classe  $C^\infty$  definita su  $A$  se e solo se  $\mathcal{H}^r(A) = \{0\}$ .

La dimostrazione di questi fatti esula dall'ambito del nostro corso.

## Esercizi 4.15

1. Sia  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, y \leq 4\}$ , e sia  $\alpha$  l'orientazione su  $V$  tale che  $\alpha^{13} < 0$ . Si calcolino gli integrali

$$\int_{V\alpha} z dx \wedge dy, \quad \int_{V\alpha} e^y dx \wedge dz.$$

2. Sia  $T$  il triangolo di  $\mathbb{R}^3$  con vertici  $\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}^3$ .

(i) Si verifichi che  $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_{23} + 2\mathbf{e}_{13} + \mathbf{e}_{12})$  è un'orientazione per il piano che contiene  $T$ .

(ii) Si calcoli  $\int_{T\boldsymbol{\alpha}} x dy \wedge dz$ .

3. Sia  $V = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + u^2 = 1\}$ . Posto

$$\mathbf{g}(s, t) = \cos s \mathbf{e}_1 + \sin s \mathbf{e}_2 + \cos t \mathbf{e}_3 + \sin t \mathbf{e}_4, \quad s, t \in [0, 2\pi],$$

si determini l'orientazione  $\boldsymbol{\alpha}$  indotta su  $V$  da  $\mathbf{g}$  e si calcoli

$$\int_{V\boldsymbol{\alpha}} (xz dy \wedge du + dz \wedge du).$$

4. Si provi che se  $V$  è una  $r$ -varietà orientabile, orientata da  $\boldsymbol{\alpha}$ , e  $A$  è un sottoinsieme compatto di  $V$ , allora:

(i) l'applicazione  $\omega \mapsto \int_{A\boldsymbol{\alpha}} \omega$  è lineare nello spazio delle  $r$ -forme;

(ii)  $\int_{A-\boldsymbol{\alpha}} \omega = -\int_{A\boldsymbol{\alpha}} \omega$ ;

(iii) se  $|\omega(\mathbf{x})|_{N,r,*} \leq c$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ , allora  $|\int_{A\boldsymbol{\alpha}} \omega| \leq c v_r(A)$ ;

(iv) se  $A_1$  e  $A_2$  sono compatti contenuti in  $V$  tali che  $A = A_1 \cup A_2$  e  $v_r(A_1 \cap A_2) = 0$ , allora  $\int_{A\boldsymbol{\alpha}} \omega = \int_{A_1\boldsymbol{\alpha}} \omega + \int_{A_2\boldsymbol{\alpha}} \omega$ .

5. Sia  $\omega$  una 1-forma di classe  $C^1$  su  $\overline{D}$ , essendo  $D$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$  con frontiera di classe  $C^1$ . Si provi che

$$\int_D \operatorname{div} \omega d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \langle \omega, \boldsymbol{\nu} \rangle_{N,1}^* d\mathbf{v}_{N-1},$$

ove  $\boldsymbol{\nu}$  è il versore normale esterno a  $\partial D$ .

6. Si provino le seguenti *formule di integrazione per parti*, valide per ogni  $f, g \in C^1(\overline{D})$ , ove  $D$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$  con frontiera di classe  $C^1$ :

$$\int_D f (D_i g) d\mathbf{x} = \int_{\partial D} f g \nu^i d\mathbf{v}_{N-1} - \int_D (D_i f) g d\mathbf{x}.$$

7. Sia  $D$  un aperto limitato di  $R^N$  con frontiera di classe  $C^1$ . Detto  $\boldsymbol{\nu}$  il versore normale esterno a  $\partial D$ , si verifichi che:

(i)  $\int_{\partial D} \nu^i d\mathbf{v}_{N-1} = 0, i = 1, \dots, N$ ;

(ii)  $\int_{\partial D} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle_N d\mathbf{v}_{N-1} = N m_N(D)$ ;

(iii) se  $f \in C^2(\overline{D})$ , allora

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} d\mathbf{v}_{N-1} = \int_D \Delta f d\mathbf{x},$$

ove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace, già introdotto nell'esercizio 4.8.5 e definito da  $\Delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$  per ogni  $f$  di classe  $C^2$ ;



(iv) per ogni  $f, g \in C^2(\overline{D})$  si ha

$$\int_D (f \Delta g - g \Delta f) d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \left( f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\nu}} - g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) d\mathbf{v}_{N-1}.$$

8. Sia  $D = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 < u^2, 0 < u < 1\}$ . Calcolare:

$$(i) \int_{\partial D^+} (y + u) dx \wedge dy \wedge dz, \quad (ii) \int_{\partial D^+} (x^2 + y^2 + z^2 + u^2) dx \wedge dy \wedge du.$$

9. Calcolare

$$\int_{\partial D} \langle \text{rot } \omega, \boldsymbol{\nu} \rangle_{3,1}^* d\mathbf{v}_2,$$

ove  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $\omega = y^3 dx - z dy + xyz dz$ , e  $\boldsymbol{\nu}$  è la normale esterna.

10. (i) Si calcoli il volume dell'ellissoide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\};$$

(ii) si calcoli analogamente il volume dell'ellissoide  $N$ -dimensionale

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \left( \frac{x^i}{a^i} \right)^2 \leq 1 \right\};$$

(iii) Si determini il volume  $(N - 1)$ -dimensionale della frontiera dell'ellissoide  $E$ .

[**Traccia:** si ricordi l'esercizio 3.14.11.]

# Indice analitico

- 0-forma, 449
- 1-forma, 341, 449
  - chiusa, 346, 347, 362, 452
  - di classe  $C^0$ , 344
  - di classe  $C^1$ , 346
  - di classe  $C^k$ , 342
  - esatta, 342, 344–347, 352, 387, 452
- $C^0$ -equivalenza
  - fra curve, 304
- $C^r$ -equivalenza
  - a tratti fra curve, 303
  - fra curve, 303
- $\sigma$ -algebra, 167
  - degli insiemi Lebesgue misurabili in  $\mathbb{R}^N$ , 167, 170
  - dei boreliani di  $\mathbb{R}^N$ , 170
  - generata, 170
- $r$ -covettore, 422, 450
  - decomponibile, 424
- $r$ -forma, 449
  - chiusa, 452, 456, 466, 468
  - di classe  $C^2$ , 451, 453
  - di classe  $C^k$ , 449
  - esatta, 452, 456, 466, 468
- $r$ -varietà, 440
  - orientabile, 444, 445
    - con bordo, 447, 448, 464
- $r$ -vettore, 422
  - decomponibile, 424, 430, 434, 436
  - non decomponibile, 439
  - di un  $(N - 1)$ -vettore, 433
  - di un  $r$ -covettore, 436, 455
  - di un  $r$ -vettore, 435
- algebra, 45, 244, 247
  - di insiemi, 161
- ampiezza, 261
- anomalia, 321
- aperto, 26
  - connesso, 342, 350, 366, 387
  - convesso, 347
  - semplicemente connesso, 389
  - semplicemente connesso, 347, 387
  - stellato, 347, 466
  - superficialmente connesso, 388, 389
- applicazione
  - $r$ -lineare, 417
    - alternante, 417, 419
  - affine, 67, 230, 235, 236
  - lineare, 45, 54, 70, 91, 109, 233, 341, 427
    - aggiunta, 429
    - indotta, 428, 443
  - localmente invertibile, 368
- area
  - di insiemi piani, 360
  - di una superficie, 375, 437
  - orientata, 234
- ascissa curvilinea, 311, 398
- assioma della scelta, 177
- assoluta continuità, 200
- astroide, 310, 325, 363
- autovalore, 83, 97, 101, 131, 292
- autovettore, 292
  - generalizzato, 110
- bacino di attrazione, 140
- baricentro, 221, 242, 377, 392
- base
  - di aperti, 34
  - di uno spazio vettoriale, 91, 117, 124
  - ordinata, 426, 430, 433, 444

- ortogonale, 266, 433
  - ortonormale, 84, 422, 423
- bordo
  - di una superficie, 380
  - di una varietà, 416
- bottiglia di Klein, 372, 443, 448
- cambiamento
  - di parametri, 370, 373, 395, 399, 409, 442
  - di variabili, 222, 230, 308, 378, 442
- campo
  - conservativo, 345, 387
  - descritto da un rotore, 388
  - di forze, 345
  - gravitazionale, 345
  - indivergente, 387–389
  - irrotazionale, 362, 387
  - solenoidale, 387–389
  - vettoriale, 130, 362, 365, 386
- cardioide, 310, 332, 363
- catenaria, 310, 333
- catenoide, 409
- caustica di riflessione, 332
- centro, 137, 139, 149
  - di curvatura, 323, 324, 326, 329, 333
- cerchio osculatore, 323, 324, 326, 329, 334
- chiuso, 27
- chiusura, 27, 159
- ciclo limite, 151
  - instabile, 151
  - semistabile, 151
  - stabile, 151
- cicloide, 310, 331, 361, 393
- cilindro, 390, 391, 406, 411
  - parabolico, 396
- circonferenza, 57, 324
- circuitazione, 362
- circuito
  - elettrico, 88, 151
  - oscillante, 153
- cissoide di Diocle, 325, 333
- classe di equivalenza, 244
  - in  $[0, 1]/\mathbb{Q}$ , 177
- coefficienti
  - di Fourier, 265
  - di una 1-forma, 342
  - di una serie
    - di potenze, 265
    - trigonometrica, 265
- colatitudine, 229
- compatto, 31
  - per successioni, 31
- completamento, 48, 52
- completezza
  - del sistema trigonometrico, 268
  - della misura di Lebesgue, 190
  - di  $\mathbb{C}^m$ , 35
  - di  $\mathbb{R}^m$ , 35
  - di  $C[a, b]$ , 36
  - di  $C^1[a, b]$ , 37
  - di  $C^k[a, b]$ , 37
  - di  $L^1(D)$ , 244
  - di  $L^\infty(D)$ , 247
  - di  $L^p(D)$ , 246
  - di  $\mathcal{R}(a, b)$ , 37
  - di uno spazio metrico, 35
- concoide di Nicomede, 325
- conduzione del calore, 291
- coniche, 57
- cono, 390, 411
  - a cuneo, 221
  - logaritmico, 412
- continuità
  - delle omotetie, 259
  - delle traslazioni, 252, 259, 270
- contrazione, 52, 68
- controvariante, 424
- convenzione  $0 \cdot \infty = 0$ , 159, 179, 209
- convergenza
  - assoluta, 4
  - dominata, 184, 200, 248
  - puntuale, 1, 4, 183, 273
    - dominata, 184
  - totale, 4, 6, 263
  - uniforme, 1, 4, 6, 10, 12, 13, 40, 184, 263, 284
- convoluzione, 250, 269, 289
- coordinate
  - cilindriche, 227, 228, 406
  - polari, 71, 137
    - in  $\mathbb{R}^2$ , 224
    - in  $\mathbb{R}^3$ , 229
    - in  $\mathbb{R}^N$ , 243
  - sferiche, 381, 458
    - in  $\mathbb{R}^3$ , 229

in  $\mathbb{R}^N$ , 243  
 covariante, 424  
 covettore, 341  
   aggiunto, 434, 436  
 crescita malthusiana, 87  
 criterio di completezza, 44  
 curva, 301  
   cartesiana, 302, 306, 325  
   chiusa, 147, 301, 303, 371  
   di classe  $C^1$ , 307  
     a tratti, 302  
   di classe  $C^k$ , 301  
   di livello, 145  
   in coordinate polari, 302, 310, 325, 363  
   in forma parametrica, 76  
   opposta, 304, 313  
   piana, 75, 319  
   regolare, 75, 302, 305, 311, 312, 366, 443, 444  
     a tratti, 302, 305  
   rettificabile, 307  
   riferita  
     a un parametro qualunque, 320, 331, 337  
     alla lunghezza d'arco, 320, 321, 329, 337  
   semplice, 302, 312  
   sghemba, 333  
 curvatura, 398  
   di una curva  
     piana, 320, 324, 325  
     sghemba, 333  
   gaussiana, 404, 405, 407, 410, 412  
   media, 404  
   normale, 398, 399, 401, 403, 411  
   principale, 401, 404  
 curve  
    $C^1$ -equivalenti, 312, 343  
     a tratti, 312  
    $C^2$ -equivalenti, 395  
    $C^r$ -equivalenti, 303  
     a tratti, 303  
   equivalenti, 308  
   omòtope, 347  
 cuspidi, 305  
 decadimento  
   esponenziale, 116, 141  
   radioattivo, 88  
 decomposizione coordinata, 160, 162  
 deltoide, 310  
 densità  
   dei polinomi in  $C[a, b]$ , 38  
   delle costanti a tratti in  $L^p(\mathbb{R})$ , 260  
   di  $C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$ , 248  
   di  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$ , 256  
   di  $C_0^0(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$ , 249  
   di  $X$  in  $\hat{X}$ , 48  
   di  $\mathcal{S}_0$  in  $L^\infty(D)$ , 248  
   di  $\mathcal{S}_0$  in  $L^p(D)$ , 248  
   di  $\mathcal{T}$  in  $C_\#[-\pi, \pi]$ , 287  
   di corrente, 362  
   di un fluido, 362  
   di un insieme, 168  
 derivata  
   direzionale, 364  
   parziale, 401  
 derivazione  
   delle funzioni composte, 222  
   di un prodotto, 121  
 determinante, 72, 97, 420  
 diametro, 238, 299  
 diffeomorfismo, 222, 235, 311, 368, 370, 373, 395, 411, 445  
   locale, 407  
 differenza simmetrica, 177  
 differenziale  
   di una funzione, 342, 450  
   esterno, 450, 456, 467  
 dinamica delle popolazioni, 87  
 dipendenza continua dai dati, 94, 120  
 direzione, 374, 382, 399  
   normale, 415  
   principale, 401  
   tangente, 399–401, 415  
 distanza, 25  
   con segno, 395  
   da un insieme, 31, 170, 235, 240, 249  
   indotta da una norma, 25  
   su  $[-\infty, +\infty]$ , 25  
   su  $C^\infty[a, b]$ , 26  
   sull'insieme delle successioni, 30  
 disuguaglianza  
   di Bernstein, 287  
   di Bessel, 267  
   di Cauchy-Schwarz, 17

- di Hölder, 24, 246, 269
- di Minkowski, 24, 246
  - integrale, 259
- di Young, 23
  - per convoluzioni, 253
- triangolare, 25
- divergenza, 361, 365
  - di una 1-forma, 455, 461
- doppio cono, 367, 369
- duale
  - di  $(\mathbb{R}_r^N)^*$ , 423
  - di  $\mathbb{R}^N$ , 341
  - di  $\mathbb{R}_r^N$ , 423
- dualità
  - fra  $(\mathbb{R}^N)^*$  e  $\mathbb{R}^N$ , 341
  - fra  $(\mathbb{R}_r^N)^*$  e  $\mathbb{R}_r^N$ , 423
  - fra covettori e vettori, 423, 425
- eccentricità, 318
- elemento
  - d'area, 377, 378
  - di lunghezza, 312, 373, 406
  - di volume, 454
    - orientato, 454
- elica cilindrica, 311, 339, 393
- elicoide, 391, 409, 412
- ellisse, 57, 318, 324
- ellissoide, 57, 368, 391, 411
- energia
  - cinetica, 150, 346
  - meccanica, 150
  - potenziale, 150, 346
  - totale, 346
- equazione
  - caratteristica, 121, 131
  - del calore, 291
  - delle onde, 295
  - delle oscillazioni smorzate, 153
  - di D'Alembert, 295
  - di Laplace, 299
  - di Van der Pol, 151
  - differenziale, 86
    - di Bessel, 129
    - di Eulero, 128
    - lineare, 86
    - non omogenea, 126
    - omogenea, 123
  - logistica, 88
  - Newtoniana, 346
  - equazioni parametriche
    - di un piano  $r$ -dimensionale, 415
    - di un sottospazio, 415
    - di una curva, 302
    - di una superficie, 366
  - esempio di Schwarz, 392
  - esponenziale
    - complessa, 72
    - di matrice, 46
  - estensione
    - di una funzione  $C^0$ , 29
    - di una funzione  $C^1$ , 355, 356
    - di una funzione  $C^r$ , 357
  - estremi di una curva, 301
  - estremo
    - inferiore essenziale, 246
    - superiore essenziale, 246, 260
  - evoluta, 329, 330
  - evolvente, 331
  - faccia
    - di un piano, 336
    - di un simpleso, 439
  - famiglia
    - equicontinua, 40, 51
    - equilimitata, 40, 51
  - fase, 261
  - fattore
    - di crescita, 87
    - integrante, 352, 456
  - fenomeno di Gibbs, 290
  - finestra di Viviani, 391
  - flusso
    - di un campo vettoriale, 362, 387
    - uscende da una superficie chiusa, 387
    - uscende dalla frontiera di un aperto, 362
  - folium di Cartesio, 364
  - forma
    - canonica
      - di Jordan, 101
      - di una funzione semplice, 181, 186
    - differenziale lineare, 341, 449
    - quadratica, 373, 395
  - formula
    - del binomio, 51
    - del cambiamento di variabili, 222, 459
    - di coarea, 378, 448

- di derivazione
  - delle funzioni composte, 222
  - di un prodotto, 121
- di Eulero, 412
- di integrazione
  - “per circonferenze”, 228
  - “per fette incurvate”, 378
  - “per fette”, 211, 218, 222, 235, 376
  - per parti, 196, 469
  - per sostituzione, 196, 218
- di Stokes
  - $r$ -dimensionale, 464
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 383, 394
- di Taylor, 374, 441
- formule
  - di Frénet-Serret
    - per le curve piane, 320, 323, 324, 329
    - per le curve sghembe, 335–337, 398
  - di Gauss-Green, 357, 361, 362, 460
  - di integrazione per parti, 364, 469
- frequenza, 261
- frontiera, 27, 159, 380, 416
  - di classe  $C^1$ , 357, 360, 361, 365, 443
  - di classe  $C^r$ , 353, 354
- funzione
  - affine, 67, 230, 235, 236
  - armonica, 365
  - caratteristica, 157, 180
  - continua, 10, 27
  - costante a tratti, 195
  - definita implicitamente, 57, 67
  - derivabile, 11, 185
  - di scelta, 177
  - differenziabile, 185
  - dispari, 265
  - esponenziale complessa, 72
  - essenzialmente limitata, 246
  - hölderiana, 289
  - Hamiltoniana, 150
  - implicita, 57, 67
  - indicatrice, 180
  - integrabile, 187
    - in senso improprio, 196
    - secondo Lebesgue, 187
    - secondo Riemann, 13, 194
  - invertibile, 58, 70
  - Lagrangiana, 80
  - limitata, 194
  - lineare, 45, 54, 70, 91, 233, 341
  - lipschitziana, 60, 289
  - localmente invertibile, 72
  - logaritmo complesso, 72
  - misurabile, 183, 195
    - secondo Lebesgue, 180
  - multivoca, 72
  - omogenea, 401
  - pari, 265
  - periodica, 262
  - regolarizzata, 254
  - segno, 272
  - semplice, 180, 183, 195, 375, 441
    - in forma canonica, 181, 186
  - sommabile, 187, 195
  - subadditiva, 30
  - uniformemente continua, 38, 52, 308
  - vettoriale, 116
- fuoco, 137, 139
  - instabile, 137
- grado
  - di un polinomio, 38
  - trigonometrico, 266
- grafico
  - di una funzione, 2, 69, 74, 414
  - implicita, 57, 58, 65
- gruppo
  - delle permutazioni, 417
  - di coomologia  $r$ -dimensionale, 468
- identità
  - del parallelogrammo, 21, 24
  - di Abel, 7, 279
  - di Bessel, 270
  - di Parseval, 271
- insieme
  - aperto, 26
  - boreliano in  $\mathbb{R}^N$ , 170
  - chiuso, 27
  - compatto, 31, 67
    - per successioni, 31, 35
  - denso, 34, 40
  - di Cantor, 171, 196
  - di livello, 57, 81
  - di misura nulla, 190, 195, 245, 260
  - di sopralivello, 179

- di sottolivello, 179
- di Vitali, 177
- Lebesgue misurabile in  $\mathbb{R}^N$ , 164
- limitato, 27, 31
- misurabile, 442
  - limitato, 374
  - secondo Lebesgue, 158
  - secondo Riemann, 158
- non Lebesgue misurabile, 177
- normale
  - di  $\mathbb{R}^2$ , 215, 357
  - di  $\mathbb{R}^3$ , 217
  - di  $\mathbb{R}^N$ , 231
- separabile, 34
- sequenzialmente compatto, 31
- ternario di Cantor, 196
- test, 164
- totalmente limitato, 34, 35
- trascurabile, 190
- integrale
  - curvilineo
    - di una 1-forma, 342, 360, 383, 387, 458
    - di una funzione, 315, 360
  - di Lebesgue, 195
  - di Poisson, 300
  - di Riemann, 195
  - di una funzione
    - di  $\mathcal{S}_0$ , 186, 441
    - misurabile, 187
    - vettoriale, 56
  - dipendente da parametro, 201, 203, 208, 209
  - generale, 92, 94, 112, 123
  - multiplo, 209
  - primo, 145, 147, 149
  - rispetto alla misura  $v_r$ , 441
  - su un insieme normale, 215
  - su un sostegno, 316
  - su una  $r$ -varietà
    - di una  $r$ -forma, 458
    - di una funzione, 441
  - superficiale
    - di una 2-forma, 460, 468
    - di una funzione, 377
  - vettoriale, 56
- integrazione
  - “per circonferenze”, 228
  - “per fette incurvate”, 378
  - “per fette”, 211, 218, 222, 235, 376
  - per parti, 196, 364, 469
  - per sostituzione, 196
  - secondo Lebesgue, 157
  - secondo Riemann, 157, 158
- interno
  - di una superficie, 380
  - di una varietà, 416
- intorno, 26
  - superficiale, 406, 407
  - tubolare, 2, 151
- invarianza
  - per rotazioni, 240
  - per simmetrie, 240
  - per traslazioni, 161, 240
- inviluppo, 329, 330, 332
- iperbole, 57, 332
- iperboloide
  - a due falde, 369, 391
  - a una falda, 368, 390, 391
- iperpiano
  - $r$ -dimensionale, 85
  - tangente, 69, 74, 79
- ipocicloide, 310
- isometria, 48, 49, 432
  - lineare, 430
  - locale, 406, 407, 409
- lacuna di un aperto, 362
- Laplaciano, 364
- lavoro, 345, 387
- legge di Newton, 150
- lemma
  - del Dini, 51
  - di Abel, 279
  - di Fatou, 198, 213
  - di Riemann-Lebesgue, 260, 271, 275
  - di Urysohn, 27
- lemniscata di Bernoulli, 242, 314, 332, 363
- limite, 26
- linea
  - coordinata, 366, 390, 393, 399, 410
  - di curvatura, 412
- linearità dell'integrale, 186, 317, 377, 442
- logaritmo complesso, 72
- longitudine, 229
- lunghezza

- di un intervallo, 158
- di un sostegno, 314
- di una curva, 307
- di una poligonale, 306
- di una spezzata, 306
- negativa, 312
- mappa di Gauss, 405
- massimo, 79
  - limite, 51
    - di insiemi, 176
  - relativo, 61
  - vincolato, 79
- matrice, 45
  - di transizione, 92, 99
  - diagonale, 100, 108
  - diagonalizzabile, 100, 109
  - esponenziale, 46, 98, 99, 108
  - Hessiana, 61, 84
  - Jacobiana, 67, 72, 74, 222
  - nilpotente, 100, 109
  - non singolare, 70
  - quadrata, 45
  - simmetrica, 83
  - trasposta, 85
  - triangolabile, 101
  - triangolare superiore, 100, 109
  - unitaria, 101
  - Wronskiana, 91, 97, 117
- matrici
  - simili, 101
- media
  - aritmetica, 83
  - armonica, 83
  - geometrica, 83
  - integrale, 365
- meridiano, 381, 391, 400, 403
- metodo
  - dei moltiplicatori, 80
  - di eliminazione, 124
  - di riduzione dell'ordine, 127, 129
  - di risoluzione per serie, 128
  - di separazione delle variabili, 292, 295
  - di variazione delle costanti, 93, 118
- metrica, 25
  - discreta, 25, 31
  - Riemanniana, 373
- minimo, 79
- limite, 199
  - di insiemi, 176
- relativo, 61
- vincolato, 79
- misura
  - $r$ -dimensionale
    - di un parallelepipedo, 440
    - di un plurirettangolo, 441
    - di una varietà, 441, 442
  - di Lebesgue, 158, 209, 431
  - di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ , 173
  - esterna di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ , 161
  - regolare, 175
- modello
  - di Lotka-Volterra, 148
  - economico, 88
  - preda-predatore, 148
- molla elastica, 88
- moltiplicatore, 81
- momento di inerzia, 221, 377, 393, 394
- monotonia
  - dell'integrale, 186, 191, 195, 196, 317, 377, 442
  - della misura di Lebesgue, 162
- nastro di Möbius, 371, 443
- nefroide, 310
- nodo, 132
  - asintoticamente stabile, 132
  - improprio, 136, 139
  - instabile, 133
- norma, 19
  - di  $(\mathbb{R}_r^N)^*$ , 422
  - di  $\ell^1$ , 20
  - di  $\ell^\infty$ , 20
  - di  $\ell^p$ , 20, 24
  - di  $\mathbb{R}_r^N$ , 423
  - di  $C(X)$ , 40
  - di  $C^k[a, b]$ , 21
  - di  $L^1(D)$ , 244
  - di  $L^\infty(D)$ , 247
  - di  $L^p$ , 21, 24
  - di  $L^p(D)$ , 246
  - euclidea, 19
  - hilbertiana, 21, 45
  - indotta da un prodotto scalare, 19, 21, 45, 422, 423
  - uniforme, 19, 24



nucleo  
   di Dirichlet, 273  
   di Fejér, 278  
   di un'applicazione lineare, 415  
 numero di Lebesgue, 32  
  
 omeomorfismo, 75  
 omogeneità dell'integrale, 191  
 omotetia, 240  
 omotopia, 347, 467  
   fra superfici, 388  
   tra curve, 347, 348, 387  
 operatore  
    $\eta \mapsto \int \eta$ , 466, 467  
   di Laplace, 364, 457, 469  
   di pull-back, 453  
 opposta di una curva, 304, 313  
 orbita, 130  
   orientata, 130  
   periodica, 137, 147  
 ordine di contatto  
   con una circonferenza, 322  
   con una retta, 322  
 orientazione  
   coerente, 382, 447, 449  
   della frontiera, 444  
   di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ , 458  
   di un sottospazio, 430, 443  
   di una curva, 301, 343  
   di una superficie, 371, 395  
   di una varietà, 443  
   indotta  
     su una varietà, 444, 446, 447  
     sul bordo di una varietà, 447  
 negativa  
   di  $\mathbb{R}^N$ , 431  
   di un aperto, 443  
   di una varietà, 444  
 positiva  
   della frontiera, 444, 460, 463  
   di  $\mathbb{R}^N$ , 431, 433  
   di un aperto, 443, 460  
   di una frontiera piana, 358, 362  
   di una varietà, 463  
 ortogonalità, 18, 432  
 oscillazione armonica, 261  
  
 palla, 26  
  
 parabola, 310, 325, 326, 331, 393  
   semicubica, 310, 331  
 paraboloide, 403  
   ellittico, 369, 391, 396  
   iperbolico, 369, 390, 391, 396, 411  
   osculatore, 396  
 parallela di una curva, 326  
 parallelepipedo, 158, 234, 431, 433, 437  
   rettangolo, 432  
 parallelo, 400, 403  
 parallelogrammo, 374  
 parametrizzazione, 302, 312, 345, 366, 371, 372, 375, 381  
   locale, 414  
 parametro lunghezza d'arco, 311, 317  
 parte  
   intera, 259  
   interna, 27, 159, 380, 416  
 partizione dell'unità, 256, 257, 356, 378, 464, 465  
 pendolo  
   semplice, 144  
   smorzato, 144  
 periodo di una 1-forma rispetto a una lacuna, 362  
 permutazione, 417  
 piano, 391  
   delle fasi, 130  
   normale, 334  
     a una varietà, 415  
   osculatore, 333, 399  
   rettificante, 334  
   tangente  
     a una superficie, 366, 370  
     a una varietà, 415  
 pluri-parallelepipedo, 161, 171, 210, 212  
 plurirettangolo, 374, 441  
 poliedro, 233, 441  
 poligonale, 306, 344, 350, 374  
 polinomio  
   caratteristico, 101, 131  
   di Bernstein, 38, 351  
   di matrici, 45  
   minimo, 101, 105  
   monico, 101  
   trigonometrico, 266  
 potenziale, 345, 387

- gravitazionale, 346
- vettore, 388
- prima forma fondamentale, 373, 391, 407
- primitiva
  - di una 1-forma, 342, 344, 346, 350, 387
  - di una  $r$ -forma, 452, 468
  - di una funzione, 352
- principio
  - di sovrapposizione, 89, 91, 116
- problema
  - di Cauchy, 86, 90, 92, 94, 99, 117
  - di Cauchy-Dirichlet, 292, 295
  - di Cauchy-Neumann, 295, 298
  - di Dirichlet, 299
- prodotto
  - di 0-forme con  $r$ -forme, 449
  - di convoluzione, 250
  - esterno, 420, 442
    - di  $r$ -forme con  $s$ -forme, 449
  - scalare, 16, 422, 423
    - di  $(\mathbb{R}^N)^*$ , 425
    - di  $\mathbb{C}^N$ , 17
    - di  $\ell^2$ , 17, 20
    - di  $\mathbb{R}^N$ , 17, 341
    - di  $C[a, b]$ , 17, 21
    - di  $L^2(-\pi, \pi)$ , 263
    - di  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , 263
    - di  $L^2(D)$ , 246
    - di  $\mathcal{M}_{m,n}$ , 45
  - vettoriale, 234, 334, 366, 436
- proiezione
  - canonica, 341
  - ortogonale, 267, 439
- propagazione vibratoria, 295
- proprietà
  - della media, 365
  - di miglior approssimazione, 266
- pull-back, 452, 455, 458, 463, 464, 468
- punto
  - a stella, 135
  - aderente, 27, 159
  - angoloso, 303, 305
  - caratteristico, 327
  - critico, 130
    - asintoticamente stabile, 131
    - instabile, 131
    - isolato, 130, 139
    - non isolato, 152
    - stabile, 131
  - d'accumulazione, 10, 26
  - di massimo, 78
    - relativo, 398
  - di minimo, 78
    - relativo, 398
  - di sella, 61, 134, 149, 398
  - ellittico, 396, 405
  - fisso, 53
  - interno, 27, 159
  - iperbolico, 396, 405
  - isolato, 61
  - non ombelicale, 412
  - non planare, 401
  - ombelicale, 401, 403
  - parabolico, 396, 405
  - planare, 397, 405
  - stazionario, 79, 130
    - libero, 80
    - vincolato, 79, 401
- quadrica, 57, 368
- quasi ovunque, 197, 244, 245
- raggio
  - di convergenza, 6, 7
  - spettrale, 51
- rango, 69, 74, 76, 79, 80, 85
- regolarità delle convoluzioni, 251
- relazione di equivalenza, 197, 244, 245, 303, 347, 371, 372
- relazioni di ortogonalità, 263
- resistenza idraulica, 89
- restringimento, 256
- retta
  - binormale, 334
  - normale
    - a una curva piana, 319, 330
    - a una superficie, 366
    - alla frontiera di un aperto, 444
  - tangente, 305
    - a una curva, 319
- ricoprimento, 31
- riordinamento crescente, 418
- rosa
  - a due petali, 326
  - a quattro petali, 364

- a tre petali, 326, 363
- rotazione, 432
- rotore, 349, 362, 365, 383
  - di una 1-forma, 455, 465
- scambio dell'ordine di integrazione, 216
- seconda forma fondamentale, 395, 411
- separatrici, 134
- serie
  - binomiale, 315
  - convergente, 44
    - assolutamente, 4
    - puntualmente, 4
    - totalmente, 4, 44
    - uniformemente, 4
  - di Fourier, 265, 281
  - di funzioni, 3
  - di matrici, 46
  - di potenze, 6, 128, 129, 261
  - di soli coseni, 265
  - di soli seni, 266
  - di vettori, 43
  - logaritmica, 5
  - trigonometrica, 261
- sezione
  - normale, 399, 400, 404
  - orizzontale, 211
  - verticale, 211
- sfera, 57, 400, 403
- significato fisico
  - del rotore, 362
  - della divergenza, 362
  - della formula di coarea, 380
- significato geometrico
  - degli  $r$ -vettori decomponibili, 426
  - dei moltiplicatori, 84
  - del determinante, 234
  - del piano osculatore, 334
  - dell'aggiunto di un  $(N - 1)$ -vettore, 433
  - dell'aggiunto di un  $r$ -vettore, 436
  - della curvatura, 335
  - della seconda forma fondamentale, 395
  - della torsione, 335
- similitudine fra matrici, 101
- simpleso, 234
  - standard, 235
- sistema
  - canonico, 132, 135–137
  - differenziale, 86
    - a coefficienti costanti, 98
    - autonomo, 129
    - di Eulero, 114
    - in forma canonica, 132
    - lineare, 86, 131, 337
    - non lineare, 86, 129, 139
    - non omogeneo, 90, 93
    - omogeneo, 90
  - dinamico, 130
    - conservativo, 150
  - fondamentale di soluzioni, 91, 118
  - linearizzato, 140
  - trigonometrico, 263
- solido di rotazione, 218, 242
- soluzione
  - globale, 86
  - locale, 86
- somma
  - di Fejér, 278
  - di funzioni trigonometriche, 280
- sostegno, 301, 308, 311, 312
  - di una superficie, 365, 370
  - di una varietà, 414, 442
- sottoricoprimento, 31
- sottospazio
  - individuato da un  $r$ -vettore, 426
  - orientato, 430
  - ortogonale, 287, 434, 436
  - vettoriale, 90
- sottosuccessione, 31, 35, 40
  - diagonale, 41
- spazio
  - $(\mathbb{R}^N)^*$ , 341
  - $(\mathbb{R}_r^N)^*$ , 422
  - $C(K)$ , 20
  - $C(X)$ , 40
  - $C[a, b]$ , 17, 21
  - $C_0^0(\Omega)$ , 252
  - $C^1(\bar{A})$ , 354, 355
  - $C^\infty(\Omega)$ , 254
  - $C_0^\infty(\Omega)$ , 254
  - $C^k[a, b]$ , 21
  - $C^r(\bar{A})$ , 357
  - $C_0^0(\Omega)$ , 249
  - $C_\#[-\pi, \pi]$ , 287
  - $L^1(D)$ , 244

$L^\infty(D)$ , 247  
 $L^p(D)$ , 246  
 $\mathbb{R}_r^N$ , 422  
 $\ell^1$ , 20  
 $\ell^2$ , 17  
 $\ell^\infty$ , 20  
 $\ell^p$ , 20, 35, 50  
 $c_{00}$ , 52  
 $\mathcal{B}(K)$ , 50  
 $\mathcal{E}^r(A)$ , 468  
 $\mathcal{M}_D$ , 244  
 $\mathcal{M}_{m,n}$ , 45  
 $\mathcal{R}(a, b)$ , 18, 21, 195  
 $\mathcal{S}$ , 248  
 $\mathcal{S}_0$ , 186, 248, 374, 375  
 $\mathcal{T}$ , 266  
 $\mathcal{T}_N$ , 266  
 $\mathcal{Z}^r(A)$ , 468  
 affine, 90, 117, 230  
 con prodotto scalare, 17  
 di Banach, 35, 244, 246  
 di Hilbert, 35, 246, 422, 423  
 euclideo, 35  
 metrico, 25  
     compatto, 35  
     completo, 35, 53, 68  
     separabile, 40  
 normale  
     a una varietà, 415  
 normato, 19  
 quoziente, 468  
 tangente  
     a una varietà, 415, 443  
     alla frontiera di un aperto, 444  
     vettoriale, 16, 90, 117, 244, 247, 417  
 spezzata, 306  
 spirale, 303  
     di Archimede, 311  
     iperbolica, 311, 326  
     logaritmica, 311  
 strofoide, 325, 363  
 subadditività  
     dell'integrale, 189  
     della misura, 197  
     della norma, 19  
     numerabile, 161  
 successione  
     convergente, 26  
         puntualmente, 1  
         uniformemente, 1  
     di Cauchy, 34, 48  
     di funzioni, 1  
 suddivisione di un intervallo, 306  
 superficie, 365  
     cartesiana, 367, 368, 378, 390, 398, 400  
         di rotazione, 411  
     chiusa, 381  
     con bordo, 380  
     di Gauss, 405  
     di livello, 368  
     di rotazione, 375, 392, 411  
     doppiamente rigata, 390  
     non orientabile, 371, 372  
     orientabile, 380  
     poliedrica, 374, 392  
     regolare, 75, 366, 370, 380  
         a tratti, 391  
         di classe  $C^r$ , 366  
         orientata, 398, 401, 405, 407  
     rigata, 390  
     semplice, 366, 380  
     senza bordo, 381  
     sferica, 367, 375  
 supporto, 249, 251  
 teorema  
     del Dini  
         in  $\mathbb{R}^2$ , 57, 327  
         in  $\mathbb{R}^3$ , 69, 368  
         in  $\mathbb{R}^N$ , 66, 443  
     del rango, 74  
     del rotore, 383  
     della convergenza  
         dominata, 200  
         monotona, 197, 199, 212, 214  
     della divergenza  
         in  $\mathbb{R}^2$ , 361, 384  
         in  $\mathbb{R}^3$ , 386  
         in  $\mathbb{R}^N$ , 460, 464  
     della media, 318, 377  
     delle contrazioni, 53  
         dipendenti da parametro, 53, 68  
     delle funzioni implicite, 57  
     di Abel, 9  
     di Ascoli-Arzelà, 40

- di Beppo Levi, 197, 199, 212, 214
- di Cayley-Hamilton, 101
- di De Rham, 468
- di Dirichlet, 273
- di esistenza e unicità
  - globale, 86
  - locale, 86
- di Fejér, 278
- di Fubini, 214, 228
- di Gauss-Green, 358
- di invertibilità locale, 72, 368
- di Lebesgue, 200
- di Lindelöf, 34
- di linearizzazione, 141
- di Liouville, 97
- di Pappo-Guldino, 242, 392
- di permanenza del segno, 59
- di Poincaré-Bendixon, 152
- di Schwarz, 221, 346, 451
- di Stokes
  - $r$ -dimensionale, 464
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 383, 387
- di Tietze, 29
- di Tonelli, 214
- di Weierstrass, 33
- fondamentale del calcolo integrale, 196, 460
- tetraedro, 439
- theoremata egregium, 407, 410, 413
- toro, 228, 376, 393, 397, 400, 403
- torsione, 335
- traccia, 97
- traiettoria, 130
  - periodica, 137
- trasformata di una  $r$ -forma, 452
- trasformazione
  - affine, 67, 230, 235, 236
  - lineare, 45, 54, 70, 91, 233
  - per raggi vettori reciproci, 70
- trattrice, 333
- tribù, 167
- triedro principale, 334
- valore critico, 81
- varietà
  - $r$ -dimensionale
    - di classe  $C^1$ , 69, 79
    - di classe  $C^k$ , 301, 416
  - regolare, 69, 75, 76, 413–415, 440
  - 2-dimensionale, 370
  - con bordo, 416
  - non orientabile, 443
  - orientabile, 443
  - regolare a tratti, 82
  - senza bordo, 416
- velocità, 346
- versore
  - binormale, 334
  - normale
    - a una  $(N - 1)$ -varietà, 443
    - a una curva piana, 319, 324
    - a una superficie, 371, 380, 398
    - esterno, 354, 358, 361, 364, 365, 386, 387, 444, 445, 458, 460
    - interno, 354, 397, 445
    - principale, 333, 398
  - tangente, 398
    - a una curva, 306, 312, 319, 324, 443, 444
    - al bordo di una superficie, 381
    - alla frontiera di un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , 362
- vertice di una curva, 324
- vettore, 70, 79, 341
  - aggiunto, 433, 435
  - colonna, 424
  - ortogonale, 79, 80
  - polinomio, 114
  - riga, 424
  - tangente, 130
    - a una curva, 366
- vincolo, 79, 401
- volume
  - $r$ -dimensionale
    - di un parallelepipedo, 431, 440
    - di un semplice, 439
    - di un parallelepipedo, 159
    - di un solido di rotazione, 227, 242
    - di una  $r$ -varietà, 441
- vorticità, 362