Esame di Analisi matematica A - Informatica
Prova scritta del 9 gennaio 2003 - Tema n. 1

Prima parte

Esercizio 1 Trovare, se esistono, i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{z}{z+1} = i\overline{z} + 1.$$

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Seconda parte

Esercizio 3 Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 - ax^2 + x$.

(i) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è surgettiva.

(ii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è iniettiva.

(iii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è invertibile con inversa derivabile. e in tal caso si calcoli $(f^{-1})'(0)$.

Esercizio 4 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{1-\cos\sqrt{t}} - 1 - t/2}{t^2}.$$

Terza parte

Esercizio 5

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scriva la soluzione $u_n(x)$ dell'equazione differenziale

$$u_n'(x) = -n^3 u_n(x) + \sin x$$

che si annulla nel punto $x = 0$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si determini il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Esame di Analisi matematica A - Informatica
Prova scritta del 9 gennaio 2003 - Tema n. 2

Prima parte

Esercizio 1 Trovare, se esistono, i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{z}{z-1} = i\overline{z} + 1.$$

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^n \binom{m-1}{n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \le n < m.$$

Seconda parte

Esercizio 3 Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + ax^2 + x$.

(i) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è surgettiva.

(ii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è iniettiva.

(iii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è invertibile con inversa derivabile. e in tal caso si calcoli $(f^{-1})'(0)$.

Esercizio 4 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{\sin^2 \sqrt{t}} - 1 - t}{t^2}.$$

Terza parte

Esercizio 5

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scriva la soluzione $u_n(x)$ dell'equazione differenziale

$$u_n'(x) = -n^3 u_n(x) + \cos x$$

che si annulla nel punto $x = 0$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si determini il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Esame di Analisi matematica A - Informatica
Prova scritta del 9 gennaio 2003 - Tema n. 3

Prima parte

Esercizio 1 Trovare, se esistono, i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{z}{z+2} = i\overline{z} - 1.$$

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m \leq n.$$

Seconda parte

Esercizio 3 Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax^3 + x^2 + x$.

(i) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è surgettiva.

(ii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è iniettiva.

(iii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è invertibile con inversa derivabile. e in tal caso si calcoli $(f^{-1})'(0)$.

Esercizio 4 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{\cos\sqrt{t}-1} - 1 + t/2}{t^2}.$$

Terza parte

Esercizio 5

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scriva la soluzione $u_n(x)$ dell'equazione differenziale

$$u_n'(x) = -n^2 u_n(x) - \sin x$$

che si annulla nel punto $x = 0$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si determini il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Esame di Analisi matematica A - Informatica
Prova scritta del 9 gennaio 2003 - Tema n. 4

Prima parte

Esercizio 1 Trovare, se esistono, i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{z}{z-2} = i\overline{z} - 1.$$

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\sum_{k=n}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k-n} = (-1)^m \binom{m}{n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ con } n \leq m.$$

Seconda parte

Esercizio 3 Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax^3 - x^2 - x$.

(i) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è surgettiva.

(ii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è iniettiva.

(iii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è invertibile con inversa derivabile. e in tal caso si calcoli $(f^{-1})'(0)$.

Esercizio 4 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-\sin^2 \sqrt{t}} - 1 + t}{t^2}.$$

Terza parte

Esercizio 5

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scriva la soluzione $u_n(x)$ dell'equazione differenziale

$$u_n'(x) = -n^2 u_n(x) - \cos x$$

che si annulla nel punto $x = 0$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si determini il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Soluzioni

Esercizio 1

Tema n. 1 L'equazione proposta equivale, come si verifica immediatamente, a $i\overline{z}(z+1) = -1$, ossia a $i|z|^2 + i\overline{z} = -1$. Scrivendo $z = a + ib$, essa è equivalente a $i(a^2+b^2) + i(a - ib) = -1$, cioè al sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + a = 0 \\ b = -1, \end{cases}$$

risolvendo il quale si ottiene l'equazione $a^2 + a + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali. Pertanto l'equazione proposta non ha soluzioni.

Tema n. 2 L'equazione proposta equivale, come si verifica immediatamente, a $i\overline{z}(z-1) = 1$, ossia a $i|z|^2 - i\overline{z} = 1$. Scrivendo $z = a+ib$, essa è equivalente a $i(a^2+b^2) - i(a-ib) = 1$, cioè al sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a = 0 \\ b = -1, \end{cases}$$

risolvendo il quale si ottiene l'equazione $a^2 - a + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali. Pertanto l'equazione proposta non ha soluzioni.

Tema n. 3 L'equazione proposta equivale, come si verifica immediatamente, a $2z = i\overline{z}(z+2) - 2$, ossia a $2z = i|z|^2 + 2i\overline{z} - 2$. Scrivendo $z = a + ib$, essa è equivalente a $2(a+ib) = i(a^2+b^2) + 2i(a-ib) - 2$, cioè al sistema

$$\begin{cases} 2b = a^2 + b^2 + 2a \\ b = a + 1, \end{cases}$$

risolvendo il quale si ottiene l'equazione $2a^2 + 2a - 1 = 0$ che ha le soluzioni $a = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Pertanto l'equazione proposta ha le soluzioni

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Tema n. 4 L'equazione proposta equivale, come si verifica immediatamente, a $2z = i\overline{z}(z-2) + 2$, ossia a $2z = i|z|^2 - 2i\overline{z} + 2$. Scrivendo $z = a + ib$, essa è equivalente a $2(a+ib) = i(a^2+b^2) - 2i(a-ib) + 2$, cioè al sistema

$$\begin{cases} 2b = a^2 + b^2 - 2a \\ b = -a + 1, \end{cases}$$

risolvendo il quale si ottiene l'equazione $2a^2 - 2a - 1 = 0$ che ha le soluzioni $a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Pertanto l'equazione proposta ha le soluzioni

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Esercizio 2

Tema n. 1 Ragioneremo per induzione su n. Se $n = 0$, si ha

$$\binom{m}{0} = 1 = \binom{m+1}{0},$$

quindi l'uguaglianza è vera per qualunque $m \in \mathbb{N}$. Se poi l'uguaglianza vale per un intero positivo n e per qualunque $m \in \mathbb{N}$, allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} + \binom{m+n+1}{n+1} = \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

il che prova l'uguaglianza per l'intero $n + 1$ e per qualunque $m \in \mathbb{N}$. Per il principio di induzione, la tesi è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualunque $m \in \mathbb{N}$.

Tema n. 2 Ragioneremo per induzione su n. Se $n = 0$, si ha

$$(-1)^0 \binom{m}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{m-1}{0},$$

quindi l'uguaglianza è vera per qualunque $m \in \mathbb{N}^+$. Se poi l'uguaglianza vale per un intero positivo n e per qualunque $m \in \mathbb{N}^+$ con $m > n$, allora se $n + 1 < m$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{m}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} + (-1)^{n+1} \binom{m}{n+1} = \\ &\quad \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= (-1)^n \binom{m-1}{n} + (-1)^{n+1} \binom{m}{n+1} = \\ &= (-1)^{n+1} \left[-\binom{m-1}{n} + \binom{m}{n+1} \right] = (-1)^{n+1} \binom{m-1}{n+1}, \end{aligned}$$

il che prova l'uguaglianza per l'intero $n+1$ e per qualunque $m \in \mathbb{N}^+$ con $m > n+1$. Per il principio di induzione, la tesi è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualunque $m \in \mathbb{N}^+$ con $m > n$.

Tema n. 3 Ragioneremo per induzione su n. Sia $m \in \mathbb{N}$: se $n = m$, si ha

$$\binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1},$$

quindi l'uguaglianza è vera. Se poi l'uguaglianza vale per un intero $n > m$, allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} = \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1}, \end{aligned}$$

il che prova l'uguaglianza per l'intero $n+1$. Per il principio di induzione, la tesi è vera per qualunque $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.

Tema n. 4 Ragioneremo per induzione su n. Sia $n = 0$: allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k} &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} - (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} = \\ &= (1-1)^{m+1} - (-1)^{m+1} = (-1)^m = (-1)^m \binom{m}{0}, \end{aligned}$$

quindi l'uguaglianza è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$. Se poi l'uguaglianza vale per un intero positivo n e per ogni $m \geq n$, allora se $n+1 \leq m$ si ha

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k-n-1} = \sum_{h=n}^{m-1} (-1)^{h+1} \binom{m+1}{h-n} = \\ &= \sum_{h=n}^{m} (-1)^{h+1} \binom{m+1}{h-n} - (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m-n} = \\ &\text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= -(-1)^m \binom{m}{n} + (-1)^m \binom{m+1}{n+1} = (-1)^m \binom{m}{n+1}, \end{aligned}$$

il che prova l'uguaglianza per l'intero $n+1$ e per qualunque $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n+1$. Per il principio di induzione, la tesi è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualunque $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$.

Esercizio 3

Tema n. 1 Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, per il teorema dei valori intermedi la funzione continua f è surgettiva per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Dire che f è iniettiva significa dire che f è strettamente monotona, anzi strettamente crescente. Questo è garantito dalla condizione

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

che equivale a richiedere $\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0$: dunque f è iniettiva se $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Ma se $a = \pm\sqrt{3}$ la funzione f è ancora iniettiva, perché in tal caso $\Delta = 0$, $f'(x) \geq 0$ ma $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 2/\sqrt{3}$. In definitiva f è iniettiva per ogni $a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
La f avrà inversa derivabile quando $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ciò accade per ogni $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$; in tal caso si ha

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

e in particolare, essendo $f(0) = 0$, avremo

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

Tema n. 2 Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, per il teorema dei valori intermedi la funzione continua f è surgettiva per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Dire che f è iniettiva significa dire che f è strettamente monotona, anzi strettamente crescente. Questo è garantito dalla condizione

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

che equivale a richiedere $\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0$: dunque f è iniettiva se $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Ma se $a = \pm\sqrt{3}$ la funzione f è ancora iniettiva, perché in tal caso $\Delta = 0$, $f'(x) \geq 0$ ma $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 2/\sqrt{3}$. In definitiva f è iniettiva per ogni $a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

La f avrà inversa derivabile quando $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ciò accade per ogni $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$; in tal caso, si ha

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

e in particolare, essendo $f(0) = 0$, avremo

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

Tema n. 3 Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a = 0, \\ \pm\infty & \text{se } a > 0, \\ \mp\infty & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

per il teorema dei valori intermedi la funzione continua f è surgettiva per ogni $a \neq 0$.
Dire che f è iniettiva significa dire che f è strettamente monotona (crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$). Questo è garantito dalle condizioni

$$\begin{cases} a > 0 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} a < 0 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2x + 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

le quali equivalgono a richiedere $\Delta = 4 - 12a \leq 0$: dunque f è iniettiva se $a > 1/3$ e in tal caso è strettamente crescente. Ma se $a = 1/3$ la funzione f è ancora strettamente crescente, perché in tal caso $\Delta = 0$, $f'(x) \geq 0$ ma $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -1$. In definitiva f è iniettiva per ogni $a \in [1/3, \infty[$.
La f avrà inversa derivabile quando $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: ciò accade per ogni $a \in]1/3, \infty[$; in tal caso, si ha

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

e in particolare, essendo $f(0) = 0$, avremo

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

Tema n. 4 Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a=0, \\ \pm\infty & \text{se } a>0, \\ \mp\infty & \text{se } a<0, \end{cases}$$

per il teorema dei valori intermedi la funzione continua f è surgettiva per ogni $a \neq 0$.

Dire che f è iniettiva significa dire che f è strettamente monotona (crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$). Questo è garantito dalle condizioni

$$\begin{cases} a>0 \\ f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} a<0 \\ f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

le quali equivalgono a richiedere $\Delta = 4 + 12a \leq 0$: dunque f è iniettiva se $a < -1/3$ e in tal caso è strettamente decrescente. Ma se $a = -1/3$ la funzione f è ancora strettamente decrescente, perché in tal caso $\Delta = 0$, $f'(x) \leq 0$ ma $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -1$. In definitiva f è iniettiva per ogni $a \in]-\infty, -1/3]$.

La f avrà inversa derivabile quando $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: ciò accade per ogni $a \in]-\infty, -1/3[$; in tal caso, si ha

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

e in particolare, essendo $f(0) = 0$, avremo

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = -1.$$

Esercizio 4

Tema n. 1 Si ha per $t \to 0^+$

$$1 - \cos\sqrt{t} \;=\; \frac{t}{2} - \frac{t^2}{24} + t^{5/2}\omega_1(t),$$

$$
\begin{aligned}
e^{1-\cos\sqrt{t}} &= 1 + (1-\cos\sqrt{t}) + \\
&+ \frac{(1-\cos\sqrt{t})^2}{2} + (1-\cos\sqrt{t})^2\omega_2(1-\cos\sqrt{t}) = \\
&= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{24} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4} + t^2\omega_3(t) \\
&= 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + t^2\omega_3(t),
\end{aligned}
$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ infinitesimi per $t \to 0^+$; ne segue che il limite proposto vale $1/12$.

Tema n. 2 Si ha per $t \to 0^+$

$$
\begin{aligned}
\sin^2\sqrt{t} &= \left(\sqrt{t} + \frac{t\sqrt{t}}{6} + t^2\omega_1(t)\right)^2 = t - \frac{t^2}{3} + t^2\omega_2(t) \\
e^{\sin^2\sqrt{t}} &= 1 + (\sin\sqrt{t})^2 + \frac{(\sin\sqrt{t})^4}{2} + (\sin\sqrt{t})^4\omega_3(\sin\sqrt{t}) = \\
&= 1 + t - \frac{t^2}{3} + \frac{1}{2}\cdot t^2 + t^2\omega_3(t) \\
&= 1 + t + \frac{t^2}{6} + t^2\omega_3(t),
\end{aligned}
$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ infinitesimi per $t \to 0^+$; ne segue che il limite proposto vale $1/6$.

Tema n. 3 Si ha per $t \to 0^+$

$$
\begin{aligned}
\cos\sqrt{t} - 1 &= -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{24} + t^{5/2}\omega_1(t), \\
e^{\cos\sqrt{t}-1} &= 1 + (\cos\sqrt{t} - 1) + \\
&+ \frac{(\cos\sqrt{t}-1)^2}{2} + (\cos\sqrt{t}-1)^2\omega_2(\cos\sqrt{t}-1) = \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{24} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4} + t^2\omega_3(t) \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + t^2\omega_3(t),
\end{aligned}
$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ infinitesimi per $t \to 0^+$; ne segue che il limite proposto vale $1/6$.

Tema n. 4 Si ha per $t \to 0^+$

$$\begin{aligned}
\sin^2\sqrt{t} &= \left(\sqrt{t} + \frac{t\sqrt{t}}{6} + t^2\omega_1(t)\right)^2 = t - \frac{t^2}{3} + t^2\omega_2(t) \\
e^{-\sin^2\sqrt{t}} &= 1 - (\sin\sqrt{t})^2 + \frac{(\sin\sqrt{t})^4}{2} + (\sin\sqrt{t})^4\omega_3(\sin\sqrt{t}) = \\
&= 1 - t + \frac{t^2}{3} + \frac{1}{2}\cdot t^2 + t^2\omega_3(t) \\
&= 1 - t + \frac{5t^2}{6} + t^2\omega_3(t),
\end{aligned}$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ infinitesimi per $t \to 0^+$; ne segue che il limite proposto vale $5/6$.

Esercizio 5

Tema n. 1 La soluzione u_n verifica

$$\frac{d}{dx}\left(e^{n^3x}u_n(x)\right) = e^{n^3x}\sin x,$$

quindi, con facili calcoli,

$$e^{n^3x}u_n(x) = \int_0^x e^{n^3t}\sin t\; dt = \frac{1}{1+n^6}\left(e^{n^3x}\cos x + n^3e^{n^3x}\sin x - 1\right),$$

cioè

$$u_n(x) = \frac{\cos x + n^3\sin x - e^{-n^3x}}{1+n^6}.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è dunque assolutamente convergente per ogni $x \geq 0$, e positivamente divergente per ogni $x < 0$.

Tema n. 2 La soluzione u_n verifica

$$\frac{d}{dx}\left(e^{n^3x}u_n(x)\right) = e^{n^3x}\cos x,$$

quindi, con facili calcoli,

$$e^{n^3x}u_n(x) = \int_0^x e^{n^3t}\cos t\; dt = \frac{1}{1+n^6}\left(e^{n^3x}\sin x + n^3e^{n^3x}\cos x - n^3\right),$$

cioè
$$u_n(x) = \frac{\sin x + n^3 \cos x - n^3 e^{-n^3 x}}{1+n^6}\,.$$
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è dunque assolutamente convergente per ogni $x \geq 0$, e negativamente divergente per ogni $x < 0$.

Tema n. 3 La soluzione u_n verifica
$$\frac{d}{dx}\left(e^{n^2 x} u_n(x)\right) = -e^{n^2 x} \sin x,$$
quindi, con facili calcoli,
$$e^{n^2 x} u_n(x) = -\int_0^x e^{n^2 t} \sin t \; dt = \frac{1}{1+n^4}\left(-e^{n^2 x}\cos x - n^2 e^{n^2 x} \sin x + 1\right),$$
cioè
$$u_n(x) = \frac{-\cos x - n^2 \sin x + e^{-n^2 x}}{1+n^4}\,.$$
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è dunque assolutamente convergente per ogni $x \geq 0$, e positivamente divergente per ogni $x < 0$.

Tema n. 4 La soluzione u_n verifica
$$\frac{d}{dx}\left(e^{n^2 x} u_n(x)\right) = -e^{n^2 x} \cos x,$$
quindi, con facili calcoli,
$$e^{n^2 x} u_n(x) = -\int_0^x e^{n^2 t} \cos t \; dt = \frac{1}{1+n^4}\left(-e^{n^2 x}\sin x - n^2 e^{n^2 x} \cos x + n^2\right),$$
cioè
$$u_n(x) = \frac{-\sin x - n^2 \cos x + n^2 e^{-n^2 x}}{1+n^4}\,.$$
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è dunque assolutamente convergente per ogni $x \geq 0$, e positivamente divergente per ogni $x < 0$.