Esame di Analisi matematica A - Informatica

Prova scritta del 17 luglio 2003

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione così definita:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log(n + a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si provi che:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

(b) $a_n \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\log n} = 1$.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione nella variabile $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 - 300x^2 - y = 0.$$

(i) Per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione?

(ii) Per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha più di una soluzione?

Esercizio 3 Determinare, se esiste, una soluzione u dell'equazione differenziale

$$u'' - 100u' = 100\pi \cos 100x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

che verifichi

$$\int_0^{\pi/50} u(x)dx = 0, \qquad \int_0^{\pi/100} u(x)dx = -\frac{\pi}{10000}.$$

Soluzione

Esercizio 1 (a) Per ogni n si ha $a_n \geq 0$: infatti ciò è vero per $n = 0$ e per $n = 1$, e se $a_n \geq 0$ per un fissato $n \geq 1$ allora $a_{n+1} = \log(n + a_n) \geq \log n \geq 0$. Dal fatto che gli a_n sono non negativi segue subito

$$a_{n+1} = \log(n + a_n) \geq \log n \to +\infty \quad \text{per } n \to \infty.$$

(b) Se $n = 1$ allora $a_1 = \log(a_0) = \log 1 = 0 < 1$. Se $a_n \leq n$ per un fissato $n \in \mathbb{N}^+$, allora

$$a_{n+1} = \log(n + a_n) \leq \log(n + n) = \log 2n \leq n + 1$$

in virtù della crescenza della funzione $x + 1 - \log 2x$ nell'intervallo $[1, \infty[$.

(c) Segue dalla catena di disuguaglianze

$$\frac{a_{n+1}}{\log(n+1)} = \frac{\log(n + a_n)}{\log(n+1)} \leq \frac{\log 2n}{\log(n+1)} = \frac{\log 2}{\log(n+1)} + \frac{\log n}{\log(n+1)}$$

e dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log 2}{\log(n+1)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1.$$

Esercizio 2 (i) La funzione $f(x) = x^3 - 300x^2$ è continua su $\mathbb{R}$ e verifica

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Per il teorema dei valori intermedi, essa assume tutti i valori $y \in \mathbb{R}$. Perciò l'equazione proposta ha almeno una soluzione qualunque sia $y \in \mathbb{R}$.

(ii) La funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$ con

$$f'(x) = 3x^2 - 600x.$$

La derivata è non positiva nell'intervallo $[0, 200]$ ed è positiva nelle due semirette $]-\infty, 0[$ e $]200, +\infty[$. Se ne deduce che f attraversa tre volte l'intervallo delle ordinate di estremi $f(0)$ e $f(200)$, ossia prende tre volte i valori $y \in]-4000000, 0[$ e due volte i valori $y = -4000000$ e $y = 0$. Dunque l'equazione ha più di una soluzione se e solo se $y \in [-4000000, 0]$.

Esercizio 3 L'equazione omogenea $u'' - 100u' = 0$ ha come equazione caratteristica $\lambda^2 - 100\lambda$, la quale ha le soluzioni reali $\lambda = 0$ e $\lambda = 100$. Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1 + c_2 e^{100x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$v(x) = A\cos 100x + B\sin 100x,$$

Si ha

$$\begin{aligned} 100\pi\cos 100x &= v''(x) - 100v'(x) = \\ &= 100^2(-A\cos 100x - B\sin 100x + A\sin 100x - B\cos 100x), \end{aligned}$$

da cui segue subito $A = B$ e $\pi = -200\,A$, ossia $A = B = -\frac{\pi}{200}$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea sono date da

$$u(x) = c_1 + c_2 e^{100x} - \frac{\pi}{200}(\cos 100x + \sin 100x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo le condizioni richieste $\int_0^{\pi/50} u(x)dx = 0$ e $\int_0^{\pi/100} u(x)dx = -\frac{\pi}{10000}$. Poiché

$$\int_0^{\pi/50} u(x)\,dx = \frac{c_1\pi}{50} + \frac{c_2}{100}(e^{2\pi} - 1),$$

$$\int_0^{\pi/100} u(x)\,dx = \frac{c_1\pi}{100} + \frac{c_2}{100}(e^{\pi} - 1) - \frac{2\pi}{20000}\,,$$

si ricava immediatamente che deve essere

$$\begin{cases} \frac{\pi c_1}{50} + \frac{c_2}{100}(e^{2\pi} - 1) = 0 \\ \frac{\pi c_1}{100} + \frac{c_2}{100}(e^{\pi} - 1) = 0. \end{cases}$$

Ne segue che $c_1 = c_2 = 0$ e pertanto il problema proposto ha l'unica soluzione

$$u(x) = -\frac{\pi}{200}(\cos 100x + \sin 100x).$$