Esame di Analisi matematica A - Informatica

Prova scritta del 16 settembre 2003

Esercizio 1 Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n+2} \right) x^n.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{-x} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{x \sin x}}.$$

Esercizio 3 Determinare, se esistono, gli asintoti della funzione

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione

Esercizio 1 Per il teorema di Lagrange si ha per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$\left|\sin\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n+2}\right| = |\cos\xi_n| \left|\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n+2}\right| = |\cos\xi_n| \frac{\pi}{2n(n+1)},$$

ove ξ_n è un opportuno punto compreso fra $\pi/(2n+2)$ e $\pi/(2n)$. Ne segue

$$\left|\sin\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n+2}\right| \leq \frac{\pi}{2n(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

quindi per ogni $x \in [-1, 1]$ la serie converge assolutamente per confronto con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$.
Osserviamo anche che la limitazione su ξ_n implica che $\lim_{n\to\infty} \cos\xi_n = 1$: in particolare esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\left|\sin\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n+2}\right| \geq \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2n(n+1)},$$

il che implica che se $|x| > 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo. Perciò la serie è divergente per $x > 1$ e indeterminata per $x < -1$.

Esercizio 2 Utilizziamo gli sviluppi di Taylor. Si ha per $x \to 0$

$$1 - e^{-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$1 - \cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\sin x = x + o(x^2);$$

inoltre, poiché

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \quad \text{per } t \to 0,$$

risulta anche, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos x} &= \sqrt{\frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + o(x)} = \frac{x}{\sqrt{2}}\,(1 + o(x)).\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x\sin x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^2/2 - x/\sqrt{2}\cdot(1+\mathrm{o}(x))+\mathrm{o}(x)}{x} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 3 La funzione g è dispari, quindi basterà analizzare il suo comportamento per $x \geq 0$.
Il denominatore di $g(x)$ si annulla in $x = 0$, cosicché la retta $x = 0$ è un asintoto verticale: più precisamente si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty.$$

Non ci sono altri asintoti verticali. Per $x \to +\infty$ si ha, utilizzando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} = +\infty,$$

e inoltre, ancora per il teorema di de l'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x\int_0^x e^{t^2}dt} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{xg(x)}+1} = 2.\end{aligned}$$

D'altronde vale anche

$$\lim_{x\to\infty} (g(x)-2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2} - 2x\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{t^2}dt} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{g(x)}\right) = 0.$$

Se ne conclude che la funzione g ha l'asintoto obliquo $y = 2x$ per $x \to \infty$; visto che è dispari, ha anche lo stesso asintoto obliquo $y = 2x$ per $x \to -\infty$.