

# Introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali

Paolo Acquistapace

8 gennaio 2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Generalità</b>	<b>1</b>
1.1	Preliminari . . . . .	1
1.2	Linee caratteristiche . . . . .	2
1.3	Risoluzione delle equazioni del primo ordine . . . . .	7
1.4	Derivata normale e derivate tangenziali . . . . .	14
1.5	Il teorema di Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	18
1.6	Equazioni risolubili elementarmente . . . . .	31
1.7	Il metodo di separazione delle variabili . . . . .	36
1.8	Classificazione delle equazioni del secondo ordine . . . . .	44
<b>2</b>	<b>L'equazione di Laplace</b>	<b>48</b>
2.1	Motivazioni fisiche . . . . .	48
2.2	Il problema di Cauchy . . . . .	52
2.3	Principio del massimo . . . . .	53
2.4	Formule di rappresentazione . . . . .	56
2.5	La funzione di Green per la sfera . . . . .	62
2.6	Proprietà delle funzioni armoniche . . . . .	72
2.7	Successioni di funzioni armoniche . . . . .	77
2.8	Funzioni subarmoniche . . . . .	80
2.9	Il problema di Dirichlet . . . . .	85
<b>3</b>	<b>L'equazione del calore</b>	<b>88</b>
3.1	Motivazioni fisiche . . . . .	88
3.2	Principio del massimo . . . . .	93
3.3	La soluzione fondamentale . . . . .	102
3.4	Il problema di Cauchy non omogeneo . . . . .	112
3.5	Equazioni integrali di Volterra . . . . .	116
3.6	I problemi di Cauchy-Neumann e di Cauchy-Dirichlet . . . . .	122

<b>4</b>	<b>L'equazione di D'Alembert</b>	<b>138</b>
4.1	Motivazioni fisiche . . . . .	138
4.2	Il caso di una variabile spaziale . . . . .	145
4.3	Il metodo dell'energia . . . . .	154
4.4	Il problema di Cauchy in due e tre variabili spaziali . . . . .	157
4.5	Il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$ . . . . .	166
4.6	Il problema non omogeneo . . . . .	176
4.7	Il metodo di Riemann . . . . .	180
	<b>Bibliografia</b>	<b>194</b>

# Capitolo 1

## Generalità

### 1.1 Preliminari

Una *equazione alle derivate parziali* è un'equazione differenziale della forma

$$F(x, u(x), Du(x), \dots, D^m u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

ove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  è un intero positivo (detto *ordine* dell'equazione), e  $F$  è una funzione assegnata, che supporremo sempre regolare quanto basta per poter fare tutte le derivate che sono necessarie. L'incognita è la funzione  $u$ , che sarà a priori definita su un certo sottoinsieme aperto di  $\Omega$ ; con  $Du$  si denota l'insieme delle  $n$  derivate parziali  $D_i u$ , e in generale  $D^k u$  denota l'insieme di tutte le derivate  $D^\alpha u$  di  $u$  di ordine uguale a  $k$ ; ricordiamo che, dato un multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  si ha

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{ove } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

e che per  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  sono di uso comune le notazioni

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

L'equazione alle derivate parziali (1.1) è *totalmente non lineare*. Un'equazione è invece *quasi-lineare* se dipende linearmente dalle derivate di ordine massimo e non linearmente dalle altre, mentre è *semilineare* se ha parte principale lineare: la *parte principale* di una equazione è costituita dai termini

contenenti le derivate di ordine massimo. Infine, una equazione è *lineare* se dipende in modo lineare da  $u$  e dalle sue derivate. Per esempio, delle equazioni del secondo ordine

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), Du(x)) D_i D_j u(x) + b(x, u(x), Du(x)) &= 0, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + b(x, u(x), Du(x)) &= 0, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) &= f(x) \end{aligned}$$

la prima è quasi-lineare, la seconda è semilineare e la terza è lineare (*omogenea* se  $f \equiv 0$ , *non omogenea* altrimenti).

La prima questione che ci poniamo è la seguente: che tipo di condizioni ai limiti occorrono per determinare una (possibilmente unica) soluzione di una equazione alle derivate parziali? Come vedremo, la risposta a questa domanda non è univoca: per certe classi di equazioni sarà ben posto il problema di Cauchy, generalizzazione di quello relativo alle equazioni differenziali ordinarie, mentre per altre equazioni l'esistenza e unicità delle soluzioni sarà garantita da differenti tipi di problemi ai limiti.

## 1.2 Linee caratteristiche

Consideriamo un'equazione *quasi-lineare* del primo ordine in due variabili:

$$a(x, y, u(x, y)) u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y)) u_y(x, y) = c(x, y, u(x, y)), \quad (1.2)$$

ove  $a, b, c$  sono funzioni regolari assegnate, definite su un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ .

**Definizione 1.2.1** *Le linee caratteristiche dell'equazione (1.2) sono le curve  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  che sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali ordinarie*

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = c(x(t), y(t), z(t)), \end{cases} \quad t \in I,$$

ove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un opportuno intervallo tale che  $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega$  per ogni  $t \in I$ .

Ci sono infinite linee caratteristiche per la (1.2): anzi, per ogni  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  ne passa una e una sola, in virtù del teorema di esistenza e unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Per capire il nesso che intercorre fra linee caratteristiche e soluzioni della (1.2), è utile il seguente

**Lemma 1.2.2** *Sia  $u$  una soluzione della (1.2). Allora, fissato un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  tale che  $z_0 = u(x_0, y_0)$ , la linea caratteristica passante per tale punto giace interamente sul grafico di  $u$ .*

**Dimostrazione** La normale al grafico di  $u$  è

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2 + 1}}(u_x(x, y), u_y(x, y), -1),$$

e la (1.2) ci dice che  $\nu(x, y)$  è perpendicolare al vettore

$$(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y))).$$

Quindi in ogni punto le linee caratteristiche passanti per il grafico di  $u$  sono ad esso tangenti. Ciò suggerisce che se una linea caratteristica tocca il grafico di  $u$  in un punto, non potrà più staccarsene. Per verificare questa illazione, sia  $(x(t), y(t), z(t))$  la caratteristica che per  $t = 0$  tocca il grafico di  $u$  in  $(x_0, y_0, z_0)$ : essa risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = c(x(t), y(t), z(t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \end{cases} \quad t \in I. \quad (1.3)$$

Sia ora  $(\xi(t), \eta(t))$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \xi'(t) = a(\xi(t), \eta(t), u(\xi(t), \eta(t))) \\ \eta'(t) = b(\xi(t), \eta(t), u(\xi(t), \eta(t))) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, \end{cases} \quad t \in I, \quad (1.4)$$

e consideriamo la curva  $\Gamma$  di componenti  $(\xi(t), \eta(t), u(\xi(t), \eta(t)))$ , che è evidentemente contenuta nel grafico di  $u$ . Anche questa curva risolve il problema

(1.3): infatti, le condizioni iniziali sono ovviamente verificate; inoltre, dato che  $u$  risolve la (1.2), si ha

$$\frac{d}{dt}u(\xi, \eta) = u_x(\xi, \eta)a(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) + u_y(\xi, \eta)b(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) = c(\xi, \eta, u(\xi, \eta)),$$

e di conseguenza anche le prime due equazioni sono soddisfatte. Per unicità, deve perciò essere  $x(t) = \xi(t)$ ,  $y(t) = \eta(t)$  e  $z(t) = u(\xi(t), \eta(t)) = u(x(t), y(t))$  per ogni  $t \in I$ . Questo ci dice che la caratteristica giace interamente sul grafico di  $u$ .  $\square$

Dal lemma precedente segue che il grafico di ogni soluzione è l'unione di linee caratteristiche. Vale anche il viceversa, nel senso che l'unione di una famiglia a un parametro di linee caratteristiche forma il grafico di una soluzione della (1.2). Sia infatti  $\{\gamma_s\}_{s \in J}$  la famiglia di caratteristiche che per  $t = 0$  attraversa una fissata curva regolare  $\Gamma$  parametrizzata da  $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ ,  $s \in J$ ; supponiamo in più che valga la condizione di trasversalità

$$\det \begin{pmatrix} x'_0(s) & y'_0(s) \\ a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in J, \quad (1.5)$$

la quale esprime il fatto che la curva dei dati iniziali  $\Gamma$  non è mai parallela alle caratteristiche. Siano  $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  le componenti di  $\gamma_s(t)$ . A causa di (1.5), l'applicazione  $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$  è invertibile in un intorno di ciascun punto  $(s, 0)$ . Scriviamo l'inversa nella forma  $(x, y) \mapsto (s(x, y), t(x, y))$ : essa è definita in un intorno  $U$  di  $(x_0(s), y_0(s))$ , e si ha

$$\begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_s y_t - y_s x_t} \begin{pmatrix} y_t & -x_t \\ -y_s & x_s \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in U,$$

ove le quantità negli ultimi due membri sono calcolate in  $(s(x, y), t(x, y))$ . Proviamo che la funzione  $u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y))$ , il cui grafico è unione di tratti delle curve  $\gamma_s$ , è soluzione della (1.2). Si ha, utilizzando (1.3),

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= a(z_s s_x + z_t t_x) + b(z_s s_y + z_t t_y) = \\ &= \frac{1}{x_s b - y_s a} (a z_s b - a z_t y_s - b z_s a + b z_t x_s) = z_t = c(x, y, u). \end{aligned}$$

Inoltre

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u(x(s, 0), y(s, 0)) = z(s, 0) = u_0(s),$$

ossia il grafico di  $u$  contiene la curva iniziale  $\Gamma$ .

Da questa discussione si conclude che per trovare una soluzione dell'equazione (1.2) si deve prescrivere il valore  $u_0(s)$  su una data curva piana  $(x_0(s), y_0(s))$  che sia trasversale al vettore  $(a, b)$ , cioè sia tale che valga (1.5): questo è il *problema di Cauchy* associato all'equazione. Il metodo sopra esposto consente allora di determinare la soluzione riducendo lo studio dell'equazione alle derivate parziali a quello di infinite equazioni differenziali ordinarie lungo le caratteristiche.

Si osservi che se invece prescriviamo il dato iniziale su una linea caratteristica, in generale non troveremo soluzioni: infatti, imponendo che una soluzione  $u$  verifichi  $u(x(s), y(s)) = \varphi(s)$  lungo una curva che nel punto  $s$  è parallela ad una caratteristica, poiché i vettori

$$(x'(s), y'(s)) \quad \text{e} \quad (a(x(s), y(s), \varphi(s)), b(x(s), y(s), \varphi(s)))$$

sono paralleli, esisterà un numero  $k(s)$  tale che

$$x'(s) = k(s) a(x(s), y(s), \varphi(s)), \quad y'(s) = k(s) b(x(s), y(s), \varphi(s));$$

pertanto nel punto  $s$  dovrà aversi

$$\begin{aligned} c(x(s), y(s), \varphi(s)) &= \\ &= a(x(s), y(s))u_x(x(s), y(s)) + b(x(s), y(s), \varphi(s))u_y(x(s), y(s)) = \\ &= \frac{1}{k(s)} (x'(s)u_x(x(s), y(s)) + y'(s)u_y(x(s), y(s))) = \frac{1}{k(s)} \varphi'(s), \end{aligned}$$

il che in generale non sarà vero per una generica funzione  $\varphi$ .

**Esempio 1.2.3** Consideriamo l'equazione semilineare del primo ordine

$$u_x(x, y) + u_y(x, y) = u(x, y)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le linee caratteristiche sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = z(t)^2 \end{cases} \quad t \in I,$$

e quindi, come si verifica facilmente, sono le curve

$$x = t + h, \quad y = t + k, \quad z = -\frac{1}{t + m}, \quad t \in \mathbb{R},$$



ove  $h, k, m$  sono costanti arbitrarie. Fissiamo la curva iniziale  $\gamma$  definita da  $x_0(s) = -s, y_0(s) = s$  (che soddisfa ovviamente alla condizione di trasversalità (1.5)), prescriviamo su di essa un dato regolare  $u_0(s)$  e definiamo la curva  $\Gamma$  mediante le equazioni  $x_0(s) = -s, y_0(s) = s, z_0(s) = u_0(s)$ . Si noti che, essendo l'equazione semilineare, la trasversalità è *indipendente* dalla scelta del dato  $u_0$ . Le linee caratteristiche uscenti da punti di  $\Gamma$  hanno equazioni parametriche

$$x(s, t) = t - s, \quad y(s, t) = t + s, \quad z(s, t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{u_0(s)}} = \frac{u_0(s)}{1 - t u_0(s)};$$

la funzione  $z(t, s)$ , per  $s$  fissato, è definita sulla semiretta  $] -\infty, \frac{1}{u_0(s)}[$  quando  $u_0(s) > 0$ , sulla semiretta  $] \frac{1}{u_0(s)}, +\infty[$  quando  $u_0(s) < 0$ , e (ovviamente) su tutto  $\mathbb{R}$  quando  $u_0(s) = 0$ .

Invertendo le prime due relazioni, si trova

$$s = \frac{y - x}{2}, \quad t = \frac{y + x}{2} :$$

se ne deduce che la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_x(x, y) + u_y(x, y) = u(x, y)^2 \\ u|_{\Gamma(s)} = u_0(s) \end{cases}$$

è la funzione

$$u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y)) = \frac{u_0\left(\frac{y-x}{2}\right)}{1 - \frac{y+x}{2} u_0\left(\frac{y-x}{2}\right)}; \quad (1.6)$$

essa è definita sull'aperto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y+x}{2} u_0\left(\frac{y-x}{2}\right) < 1\}$ , il quale chiaramente contiene la curva iniziale.

Si può notare che la soluzione dipende non da una costante arbitraria, come succede per le equazioni ordinarie del primo ordine, ma da una *funzione* arbitraria (di classe  $C^1$ ).

**Osservazione 1.2.4** In modo analogo, per una equazione quasi-lineare del primo ordine in  $n$  variabili

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u(x)) D_i u(x) = c(x, u(x)), \quad x \in \Omega,$$

le linee caratteristiche sono le curve  $x(t)$  che risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_i(t) = a_i(x(t)), & i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt}z(t) = c(x(t), z(t)), \end{cases}$$

e occorrerà precisare il dato iniziale  $u_0(s)$  lungo una superficie  $(n - 1)$ -dimensionale  $S$ , parametrizzata da  $x = \varphi(s)$ ,  $s \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ , in modo che in ogni punto essa sia trasversale al vettore dei coefficienti  $a(\varphi(s), u_0(s))$  (ove  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ). Ciò si esprime scrivendo che

$$\langle a(\varphi(s), u_0(s)), \nu(s) \rangle_n \neq 0 \quad \forall s \in U,$$

ove  $\nu(s)$  è la normale a  $S$  nel punto  $\varphi(s)$ . Questa condizione si esprime dicendo che i dati  $(S, u_0)$  sono *non caratteristici*.

Osserviamo, per concludere, che vi è un'ampia teoria delle caratteristiche anche per le equazioni del primo ordine totalmente non lineari, nonché per *sistemi* di equazioni del primo ordine: per approfondimenti si rimanda a [3], [5].

### 1.3 Risoluzione delle equazioni del primo ordine

Per determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione quasi-lineare in due variabili

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (1.7)$$

vi è un metodo, dovuto a Lagrange, che fa uso delle linee caratteristiche dell'equazione, cioè delle soluzioni del sistema di equazioni ordinarie (1.3), ed è per questo noto come *metodo delle caratteristiche*. Se supponiamo ad esempio  $a(x, y, z) \neq 0$  in una fissata regione  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , tale sistema equivale a quest'altro:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, z)}{a(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{c(x, y, z)}{a(x, y, z)}, \end{cases} \quad (1.8)$$

ovvero, in forma vettoriale, ponendo  $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  e  $A = \begin{pmatrix} b/a \\ c/a \end{pmatrix}$ ,

$$\frac{dY}{dx} = A(x, Y), \quad x \in I,$$

ove  $I$  è un opportuno intervallo tale che  $(x, Y(x)) \in \Omega$  per ogni  $x \in I$ . Le soluzioni di questo sistema saranno della forma

$$Y = \Phi(x, C), \quad x \in I,$$

ovvero, in forma scalare,

$$\begin{cases} y = \varphi(x, h, k) \\ z = \psi(x, h, k), \end{cases} \quad x \in I, \quad (1.9)$$

ove  $h$  e  $k$  sono costanti arbitrarie. Supponiamo di poter risolvere questo sistema rispetto a  $(h, k)$ , cioè che risulti

$$\det \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(h, k)} \neq 0 \quad (1.10)$$

in tutti i punti  $(h, k)$  tali che si abbia  $(x, \varphi(x, h, k), \psi(x, h, k)) \in \Omega$ . Possiamo allora scrivere, almeno localmente,

$$\begin{cases} h = p(x, y, z) \\ k = q(x, y, z), \end{cases} \quad (1.11)$$

e le (1.11) esprimono implicitamente le soluzioni del sistema (1.8). Si osservi che allo stesso sistema saremmo arrivati supponendo  $b(x, y, z) \neq 0$  in  $\Omega$ ; si noti anche che la matrice

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

ha rango massimo, poichè il suo terzo minore è l'inverso del determinante (1.10). Si ha allora:

**Teorema 1.3.1** *Si consideri l'equazione quasi-lineare (1.7), ove  $a, b, c$  sono funzioni regolari sull'aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  tali che  $a^2 + b^2 > 0$  in  $\Omega$ . Allora tutte le soluzioni  $u(x, y)$  di tale equazione sono esprimibili implicitamente nella forma*

$$F(p(x, y, u(x, y)), q(x, y, u(x, y))) = 0 \quad (1.13)$$

ove  $F$  è un'arbitraria funzione di classe  $C^1$  con gradiente mai nullo, e  $p, q$  sono le funzioni che compaiono in (1.11), sulle quali si assume che la matrice (1.12) abbia rango massimo.

**Dimostrazione** La chiave di tutto il ragionamento sta nel seguente

**Lemma 1.3.2** *Siano  $f, g$  funzioni di classe  $C^1$  su un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Si ha*

$$\det \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (1.14)$$

*se e solo se per ogni  $(x_0, y_0) \in \Omega$  esistono un intorno  $U \subseteq \Omega$  di  $(x_0, y_0)$ , un intorno  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  di  $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$  ed una funzione  $F \in C^1(V)$  con gradiente mai nullo, tali che*

$$F(f(x, y), g(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U. \quad (1.15)$$

**Dimostrazione** ( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che valga la (1.15), ove  $F(s, t)$  è di classe  $C^1$  con gradiente mai nullo. Derivando tale identità si trova il sistema

$$\begin{cases} F_s(f, g)f_x + F_t(f, g)g_x = 0 \\ F_s(f, g)f_y + F_t(f, g)g_y = 0 \end{cases} \quad \text{in } U,$$

e poiché  $F_s^2 + F_t^2 > 0$ , deve valere la (1.14) in  $U$ . Ma  $U$  è un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ , arbitrariamente scelto in  $\Omega$ : ne segue che la (1.14) vale in  $\Omega$ .

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che valga (1.14) in  $\Omega$ . Sia  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Se in  $\Omega$  sono identicamente nulli tutti gli elementi della matrice, allora le funzioni  $f$  e  $g$  sono costanti in un intorno connesso  $U$  di  $(x_0, y_0)$ :

$$f(x, y) \equiv h, \quad g(x, y) \equiv k \quad \text{in } U,$$

e si ottiene la tesi con la funzione  $F(\xi, \eta) = \xi + \eta - h - k$ . Se invece la matrice ha rango 1, allora esiste una funzione  $c(x, y)$  tale che

$$\text{grad } g(x, y) = c(x, y) \cdot \text{grad } f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (1.16)$$

e possiamo supporre, ad esempio, che sia  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , cosicchè vi è un intorno rettangolare  $A \times B$  in cui  $f_x \neq 0$ . Posto  $\xi_0 = f(x_0, y_0)$ , la funzione  $G(x, y, \xi) = \xi - f(x, y)$  verifica

$$G(x_0, y_0, \xi_0) = 0, \quad G_x(x, y, \xi) = -f_x(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y, \xi) \in A \times B \times \mathbb{R};$$

quindi, per il teorema del Dini, esistono un parallelepipedo aperto  $I \times J \times K \subseteq A \times B \times \mathbb{R}$  centrato in  $(x_0, y_0, \xi_0)$  ed una funzione  $\gamma : J \times K \rightarrow I$  di classe

$C^1$ , tali che per ogni  $(y, \xi) \in J \times K$  vi è un unico  $x \in I$  per il quale valgono le tre condizioni, fra loro equivalenti,

$$G(x, y, \xi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = f(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \gamma(y, \xi),$$

e in particolare si ha

$$\xi - f(\gamma(y, \xi), y) \equiv 0 \text{ in } J \times K, \quad x - \gamma(y, f(x, y)) \equiv 0 \text{ in } U,$$

ove  $U$  è l'aperto non vuoto  $(I \times J) \cap f^{-1}(K)$ . Inoltre vale la relazione

$$-f_x(\gamma(y, \xi), y)\gamma_y(y, \xi) - f_y(\gamma(y, \xi), y) \equiv 0 \text{ in } J \times K.$$

Poniamo adesso

$$\Gamma(y, \xi) = g(\gamma(y, \xi), y) \quad \forall (y, \xi) \in J \times K :$$

allora si ha, utilizzando la (1.16),

$$\begin{aligned} \Gamma_y(y, \xi) &= g_x(\gamma(y, \xi), y)\gamma_y(y, \xi) + g_y(\gamma(y, \xi), y) = \\ &= c(\gamma(y, \xi), y) [f_x(\gamma(y, \xi), y)\gamma_y(y, \xi) + f_y(\gamma(y, \xi), y)] = 0 \text{ in } J \times K. \end{aligned}$$

Dunque la funzione  $\Gamma(y, \xi)$  dipende in realtà soltanto da  $\xi$ . Consideriamo allora la funzione

$$F(\xi, \eta) = \eta - \Gamma(\xi), \quad (\xi, \eta) \in K \times \mathbb{R} :$$

il suo gradiente non è mai nullo, e in  $U$  si ha, essendo  $x - \gamma(y, f(x, y)) \equiv 0$ ,

$$F(f(x, y), g(x, y)) = g(x, y) - \Gamma(f(x, y)) = g(x, y) - g(\gamma(x, f(x, y)), y) = 0.$$

Ciò prova la tesi del lemma.  $\square$

**Osservazione 1.3.3** Due funzioni  $f, g$  che verificano la (1.15) in un aperto  $\Omega$  si dicono *funzionalmente dipendenti* in  $\Omega$ . Si noti che questa nozione è più debole della lineare dipendenza: due funzioni  $f, g$  linearmente dipendenti sono anche funzionalmente dipendenti, perché se risulta  $c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y) \equiv 0$  è sufficiente scegliere  $F(a, b) = c_1 a + c_2 b$ , però il viceversa non è vero, come mostrano le funzioni  $\cos x$  e  $\sin x$ .

Torniamo alla dimostrazione del teorema 1.3.1. Proviamo anzitutto che se  $u$  è definita implicitamente dalla (1.13), allora  $u$  è soluzione della (1.7). Dal lemma 1.3.2 ricaviamo che si ha

$$\det \begin{pmatrix} p_x + p_z u_x & q_x + q_z u_x \\ p_y + p_z u_y & q_y + q_z u_y \end{pmatrix} = 0, \quad (1.17)$$

ossia, svolgendo i calcoli,

$$u_x [p_z q_y - p_y q_z] + u_y [p_x q_z - p_z q_x] + [p_x q_y - p_y q_x] = 0.$$

In altre parole, si ottiene la relazione

$$u_x \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)} + u_y \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(z, x)} = \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)}. \quad (1.18)$$

Adesso analizziamo le soluzioni implicite del sistema (1.8), ossia le (1.11). Si tratta di due superfici la cui intersezione è una curva caratteristica: ne segue che in ogni punto in cui vale (1.11) deve valere anche il sistema

$$\begin{cases} ap_x + bp_y + cp_z = 0 \\ aq_x + bq_y + cq_z = 0, \end{cases}$$

il quale esprime il fatto che le normali alle due superfici sono ortogonali ad  $(a, b, c)$ . Da qui si ricava, con noioso ma facile calcolo,

$$\begin{cases} a \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(z, x)} - b \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)} = 0 \\ a \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} - c \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)} = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Per ipotesi, uno dei tre minori della matrice  $\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y, z)}$  è non nullo: supponiamo ad esempio che sia

$$\det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)} \neq 0. \quad (1.20)$$

Allora, sostituendo le relazioni (1.19) nella (1.18), si ottiene

$$c \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)} = a \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = au_x \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)} + bu_y \det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)},$$

e da (1.20) si conclude, finalmente, che  $u(x, y)$  è soluzione dell'equazione (1.7).

Proviamo ora, viceversa, che se  $u(x, y)$  è soluzione di (1.7), allora esiste una funzione  $F$  tale che  $u$  si rappresenta nella forma (1.13). Moltiplichiamo l'equazione (1.7) per la quantità (non nulla, in virtù di (1.20))

$$\det \frac{\partial(p, q)}{\partial(y, z)};$$

utilizzando le (1.19), e supponendo ad esempio  $a \neq 0$ , si ricava la (1.18), la quale, come si è visto in precedenza, è equivalente alla condizione (1.14). Pertanto otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} p(x, y, u(x, y)) & \frac{de}{\partial y} p(x, y, u(x, y)) \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x, y, u(x, y)) & \frac{\partial}{\partial y} q(x, y, u(x, y)) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.21)$$

Dal lemma 1.3.2 segue allora che vale la (1.13).  $\square$

**Esempi 1.3.4 (1)** L'equazione semilineare dell'esempio 1.2.3 ha le due famiglie di caratteristiche  $y - x = h$  e  $\frac{1}{z} + x = k$ : e in effetti, come è giusto, la soluzione del problema lì considerato, ossia la funzione (1.6), soddisfa l'equazione implicita

$$\frac{1}{u(x, y)} + x = \frac{1}{u_0(\frac{y-x}{2})} - \frac{y-x}{2},$$

e dunque fa parte della famiglia  $F(y - x, \frac{1}{u} + x) = 0$ , scegliendo

$$F(s, t) = t - \frac{1}{u_0(s/2)} - \frac{s}{2}.$$

**(2)** Consideriamo l'equazione quasi-lineare

$$x u u_x + y u u_y = -(x^2 + y^2). \quad (1.22)$$

I tre coefficienti  $a(x, y, z) = xz$ ,  $b(x, y, z) = yz$  e  $c(x, y, z) = -(x^2 + y^2)$  sono funzioni di classe  $C^1$  su tutto  $\mathbb{R}^3$ . Il sistema (1.8) diventa, in qualunque regione in cui  $xz \neq 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{xz},$$

e le sue soluzioni sono, come si verifica per integrazione diretta,

$$y = \varphi(x, h, k) = hx, \quad z = \psi(x, h, k) = \pm \sqrt{k - (1 + h^2)x^2} \quad (h \in \mathbb{R}, k > 0),$$

ove il segno di  $z$  dipende dalla regione in cui ci si trova. Si noti però che tale segno cambia per  $x = \pm\sqrt{\frac{k}{1+h^2}}$ , e la funzione  $z(x)$  risultante è di classe  $C^1$  anche in tali punti, avendo una discontinuità solo per  $x = 0$ : quindi si può rimuovere la condizione  $z \neq 0$ . Risulta inoltre

$$\det \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(h, k)} = \det \begin{pmatrix} x & \mp \frac{hx^2}{\sqrt{k-(1+h^2)x^2}} \\ 0 & \pm \frac{1}{2\sqrt{k-(1+h^2)x^2}} \end{pmatrix} = \pm \frac{x}{2\sqrt{k-(1+h^2)x^2}};$$

tale determinante è non nullo per ogni  $h, k$  quando  $x \neq 0$ . Risolvendo il sistema sopra scritto rispetto a  $h, k$  si ottiene facilmente

$$h = \frac{y}{x} \equiv p(x, y, z), \quad k = z^2 + x^2 + y^2 \equiv q(x, y, z).$$

Si conclude che l'insieme delle soluzioni della (1.22) nella regione  $\{(x, y, z) : x \neq 0\}$  è dato da

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$$

con  $F$  funzione arbitraria di classe  $C^1$  tale che  $\nabla F \neq 0$ .

**(3)** In certi casi per risolvere il sistema delle caratteristiche è utile il *metodo dei moltiplicatori*. Si osserva anzitutto che se  $a, b, c, d, e, f$  sono numeri reali tali che  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ , allora per ogni  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  non tutti nulli risulta, come è immediato verificare,

$$\frac{\lambda a + \mu c + \nu e}{\lambda b + \mu d + \nu f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Vediamo come l'uso di questo trucco possa talvolta semplificare di molto il calcolo: consideriamo ad esempio l'equazione differenziale quasi-lineare

$$(x^2 - y^2 - z^2)u_x + 2xyu_y = 2xu,$$

le cui caratteristiche sono le soluzioni del sistema

$$\frac{x'}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{y'}{2xy} = \frac{z'}{2xz} = 1.$$

Si ha allora

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}, \quad \text{da cui} \quad \frac{y}{z} = h;$$



inoltre, scelti  $\lambda = x$ ,  $\mu = y$ ,  $\nu = z$  (i moltiplicatori), sommando le tre equazioni moltiplicate per tali quantità, troviamo

$$\frac{z'}{2xz} = \frac{xx' + yy' + zz'}{x(x^2 - y^2 - z^2) + y(2xy) + z(2xz)} = \frac{xx' + yy' + zz'}{x(x^2 + y^2 + z^2)},$$

da cui

$$\frac{z'}{z} = \frac{d}{dt} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

e, integrando,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = k.$$

Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è, in forma implicita,

$$F\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0.$$

## 1.4 Derivata normale e derivate tangenziali

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}$  una superficie regolare  $(n-1)$ -dimensionale con versore normale  $\nu(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}$ . Se  $u$  è una funzione regolare definita su  $\Omega$ , la sua *derivata normale* rispetto a  $S$  è

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \langle \nu(x), \nabla u(x) \rangle_n = \sum_{i=1}^n \nu_i(x) D_i u(x), \quad x \in S,$$

mentre tutte le derivate direzionali di  $u$  della forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x) = \sum_{i=1}^n \tau_i(x) D_i u(x), \quad \text{con } \langle \tau(x), \nu(x) \rangle_n = 0$$

si dicono *derivate tangenziali* di  $u$  rispetto a  $S$ .

Definiamo adesso le derivate normali e tangenziali di ordine superiore.

**Definizione 1.4.1** Sia  $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}$  una superficie regolare con versore normale  $\nu(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}$ . Se  $u$  è una funzione regolare definita su  $\Omega$ , ogni espressione della forma  $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$ , ove gli  $a_\alpha$  verificano la relazione  $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \nu(x)^\alpha = 0$ , si chiama *derivata tangenziale* di ordine  $k$  di  $u$  rispetto a  $S$ . L'espressione  $\sum_{|\alpha|=k} \nu(x)^\alpha D^\alpha u(x)$  si chiama *derivata normale* di ordine  $k$  di  $u$  rispetto a  $S$ , e si denota con  $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}(x)$ .

In particolare, per  $k = 2$  sono derivate tangenziali di  $u$  rispetto a  $S$  le quantità  $\sum_{i,j=1}^n q_{ij}(x)D_iD_ju(x)$  se vale la condizione  $\sum_{i,j=1}^n q_{ij}(x)\nu_i(x)\nu_j(x) = 0$ , mentre la derivata normale seconda  $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x)$  è data da  $\sum_{i,j=1}^n \nu_i(x)\nu_j(x)D_iD_ju(x)$ . Il lemma che segue mostra come decomporre una qualunque derivata di una assegnata funzione  $u$  nella somma di una derivata normale più una tangenziale.

**Lemma 1.4.2** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto, sia  $S \subset \Omega$  una superficie regolare  $(n-1)$ -dimensionale, e sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione regolare. Allora:*

(i) *per  $k = 1, \dots, n$  si ha*

$$D_k u(x) = \nu_k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \frac{\partial u}{\partial \tau_k}(x),$$

*ove  $\tau_k = e_k - \langle e_k, \nu \rangle_n \nu$  è un vettore tangente a  $S$ ;*

(ii) *per  $h, k = 1, \dots, n$  si ha*

$$D_k D_h u(x) = \nu_k(x) \nu_h(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x) + \sum_{i,j=1}^n q_{hkij}(x) D_i D_j u(x),$$

*ove l'ultimo addendo è un'opportuna derivata tangenziale di ordine 2 rispetto a  $S$ ;*

(iii) *il valore di ogni derivata tangenziale di  $u$  di ordine 2 rispetto a  $S$  dipende soltanto dai valori di  $u|_S$  e di  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S$  (oltre che, naturalmente, da  $S$  stessa).*

**Dimostrazione (i)** Basta osservare che

$$D_k u - \nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n (\delta_{ki} - \nu_k \nu_i) D_i u$$

(ove  $\delta_{ij} = 0$  per  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  per  $i = j$ ), e che il vettore  $\tau_k$  di componenti  $(\tau_k)_i = \delta_{ki} - \nu_k \nu_i$  è tangente a  $S$  in quanto  $\sum_{i=1}^n (\delta_{ki} - \nu_k \nu_i) \nu_i = \nu_k (1 - |\nu|^2) = 0$ .

(ii) Si ha, applicando (i) alla funzione  $D_h u$ ,

$$\begin{aligned}
D_k D_h u &= \nu_k \frac{\partial}{\partial \nu} D_h u + \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_h u = \sum_{i=1}^n \nu_k \nu_i D_h (D_i u) + \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_h u = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \nu_k \nu_i \delta_{hj} D_j D_i u + \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_h u = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \nu_k \nu_i [(\tau_h)_j + \nu_h \nu_j] D_j D_i u + \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_h u = \\
&= \sum_{i=1}^n \nu_k \nu_i \frac{\partial}{\partial \tau_h} D_i u + \nu_k \nu_h \sum_{i,j=1}^n \nu_i \nu_j D_i D_j u + \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_h u.
\end{aligned}$$

Da qui segue intanto

$$D_k D_h u - \nu_k \nu_h \sum_{i,j=1}^n \nu_i \nu_j D_i D_j u = \sum_{i=1}^n \nu_k \nu_i \frac{\partial}{\partial \tau_h} D_i u + \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_h u; \quad (1.23)$$

inoltre, proseguendo il calcolo, e applicando (i) a  $D_j u$ ,

$$\begin{aligned}
D_k D_h u - \nu_k \nu_h \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} &= \\
&= \sum_{i,j=1}^n \nu_k \nu_i (\tau_h)_j D_j D_i u + \sum_{j=1}^n (\tau_k)_j D_h D_j u = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \nu_k \nu_i (\tau_h)_j D_j D_i u + \sum_{j=1}^n (\tau_k)_j \left[ \nu_h \frac{\partial}{\partial \nu} D_j u + \frac{\partial}{\partial \tau_h} D_j u \right] = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( \nu_k \nu_i (\tau_h)_j + \nu_h \nu_i (\tau_k)_j + (\tau_k)_j (\tau_h)_i \right) D_i D_j u.
\end{aligned}$$

La tesi segue osservando che

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^n \left( \nu_k \nu_i (\tau_h)_j + \nu_h \nu_i (\tau_k)_j + (\tau_k)_j (\tau_h)_i \right) \nu_i \nu_j = \\
&= \nu_k |\nu|^2 \langle \tau_h, \nu \rangle_n + \nu_h |\nu|^2 \langle \tau_k, \nu \rangle_n + \langle \tau_k, \nu \rangle_n \langle \tau_h, \nu \rangle_n = 0.
\end{aligned}$$

(iii) In virtù di (i), i valori di  $D_i u$  su  $S$ , per  $i = 1, \dots, n$ , sono determinati dai valori di  $u|_S = \varphi_0$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \varphi_1$ :

$$D_i u|_S = \nu_i \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_i}.$$

Fissiamo adesso una qualunque derivata tangenziale  $\sum_{h,k=1}^n q_{hk} D_h D_k u$ : poiché  $\sum_{h,k=1}^n q_{hk} \nu_k \nu_h = 0$ , da (1.23) si avrà

$$\sum_{h,k=1}^n q_{hk} D_h D_k u = \sum_{h,k,j=1}^n q_{hk} \nu_h \nu_j \frac{\partial}{\partial \tau_k} D_j u + \sum_{h,k=1}^n q_{hk} \frac{\partial}{\partial \tau_h} D_k u,$$

e in definitiva tale derivata dipende soltanto, tramite le  $D_i u$  e  $D_h u$ , dai valori  $\varphi_0 = u|_S$  e  $\varphi_1 = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S$ .  $\square$

Utilizzando le derivate normali e tangenziali a una superficie, siamo in grado di vedere come sono fatte le caratteristiche nel caso di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Consideriamo l'equazione quasi-lineare

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du) D_i D_j u = b(x, u, Du), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (1.24)$$

ed il problema di Cauchy che si ottiene accoppiando tale equazione con le condizioni ai limiti

$$u|_S = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \varphi_1. \quad (1.25)$$

In analogia con il caso delle equazioni quasi-lineari del primo ordine, diremo che la terna  $(S, \varphi_0, \varphi_1)$  è *caratteristica* per l'equazione (1.24) se risulta

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), Du(x)) \nu_i(x) \nu_j(x) = 0 \quad \forall x \in S. \quad (1.26)$$

Si noti che in virtù di (1.25) e del lemma 1.4.2 i valori di  $u|_S$  e delle derivate  $D_k u|_S$  sono noti, poiché dipendono dai valori di  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ . Dunque, lo stesso accade per il valore su  $S$  dei coefficienti  $a_{ij}(x, u, Du)$  e del secondo membro  $b(x, u, Du)$  dell'equazione (1.24). D'altronde, la parte principale  $L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du) D_i D_j u$  della (1.24) vale, sempre in virtù del lemma 1.4.2,

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du) \nu_i \nu_j \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du) \sum_{r,s=1}^n q_{ijrs} D_r D_s u,$$

ove nel secondo addendo vi è una derivata tangenziale rispetto a  $S$ . Se ora supponiamo che la terna  $(S, \varphi_0, \varphi_1)$  sia caratteristica, troviamo che il primo addendo è nullo: pertanto anche il valore di  $L(u)$  dipende solo dai valori di  $\varphi_0$

e  $\varphi_1$ . Quindi, il valore in  $S$  della quantità  $L(u) - b(x, u, Du)$  è determinato, e in generale esso non sarà necessariamente nullo. Ciò significa che, quando  $(S, \varphi_0, \varphi_1)$  è caratteristica, di regola non esisteranno soluzioni dell'equazione (1.24) soddisfacenti alle condizioni ai limiti (1.25).

Quando al contrario i dati sono non caratteristici, il lemma 1.4.2 mostra che i valori delle derivate seconde  $D_i D_j u$  dipendono da  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  e dalla derivata normale seconda  $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$ ; ma quest'ultima si può ricavare dall'equazione differenziale, poiché risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} &= \frac{1}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i \nu_j} \left[ L(u) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{r,s=1}^n q_{ijrs} D_r D_s u \right] = \\ &= \frac{1}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i \nu_j} \left( - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{r,s=1}^n q_{ijrs} D_r D_s u + b(x, u, Du) \right), \end{aligned}$$

ove il termine  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{r,s=1}^n q_{ijrs} D_r D_s u$  è una derivata seconda tangenziale, dunque anch'esso dipendente solo da  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ . Questo rende plausibile l'idea che sia ben determinata una soluzione del problema di Cauchy (1.24)-(1.25): in effetti il teorema di Cauchy-Kovalevskaya, che dimostreremo nel paragrafo successivo, assicurerà l'esistenza e l'unicità della soluzione quando i dati  $(S, \varphi_0, \varphi_1)$  sono non caratteristici.

**Osservazione 1.4.3** Se l'equazione è semilineare, ossia della forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u = b(x, u, Du), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (1.27)$$

allora la condizione che la terna  $(S, \varphi_0, \varphi_1)$  sia caratteristica si riduce a

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \nu_i(x) \nu_j(x) = 0,$$

ed è dunque indipendente dai dati  $\varphi_0, \varphi_1$ . In questo caso si parla perciò di *superficie caratteristica* per il problema (1.27)-(1.25).

## 1.5 Il teorema di Cauchy-Kovalevskaya

Il principale enunciato di esistenza per equazioni alle derivate parziali di forma generale è senza dubbio il teorema di Cauchy-Kovalevskaya, che stabilisce

l'esistenza di una soluzione (locale) analitica quando i coefficienti dell'equazione e i dati ai limiti sono analitici e non caratteristici. Si tratta di un risultato importante, ma non sempre decisivo, nel senso che per molte equazioni alle derivate parziali il problema di Cauchy non è significativo; del resto non sempre i dati e i coefficienti di un'equazione sono analitici e in tal caso questo teorema non si applica. Inoltre, esso garantisce una soluzione unica nella classe delle funzioni analitiche, ma non è escluso a priori che vi possano essere altre soluzioni, non analitiche.

**Teorema 1.5.1 (di Cauchy-Kovalevskaya)** *Si consideri l'equazione alle derivate parziali quasi lineare del secondo ordine*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) D_i D_j u(x) + a(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.28)$$

con le condizioni ai limiti

$$u|_S = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = \varphi_1, \quad (1.29)$$

ove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}$  è una superficie regolare  $(n-1)$ -dimensionale con, in particolare,  $|\nabla \phi| \neq 0$  in  $S$ . Se  $\phi$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $a_{ij}$ ,  $a$  sono funzioni analitiche dei loro argomenti, e se i dati  $(S, \varphi_0, \varphi_1)$  sono non caratteristici, ossia

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \varphi_0(x), Du(x)) \nu_i(x) \nu_j(x) \neq 0 \quad \forall x \in S,$$

allora per ogni  $x_0 \in S$  esiste  $\rho > 0$  tale che il problema ha un'unica soluzione  $u$  analitica in  $B(x_0, \rho)$ .

Si noti che nei punti di  $S$  le derivate  $D_i u(x)$  dipendono soltanto dai dati  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  in virtù del lemma 1.4.2.

**Dimostrazione** Procederemo in varie tappe.

**1<sup>a</sup> tappa:** riduzione al caso in cui  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ .

Fissato  $x_0 \in S$ , poiché  $|\nabla \phi(x_0)| \neq 0$  possiamo supporre che sia  $D_n \phi(x_0) \neq 0$ . Consideriamo la trasformazione  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da

$$\psi(x) = y, \quad \text{ove} \quad \begin{cases} y_i = x_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ y_n = \phi(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Allora la matrice Jacobiana di  $\psi$  è

$$J_\psi(x) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & I_{n-1} & \vdots \\ D_1\phi(x) \cdots D_{n-1}\phi(x) & & D_n\phi(x) \end{pmatrix},$$

cosicché  $\det J_\psi(x_0) = D_n\phi(x_0) \neq 0$ . Per il teorema di invertibilità locale, esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $\psi|_U$  è invertibile; in particolare si ha  $\Sigma := \psi(S \cap U) = \{y \in V : y_n = 0\}$ , ove  $V$  è un intorno del punto  $y_0 = \psi(x_0) \in \Sigma$ . Naturalmente, il versore normale alla superficie  $\Sigma$  è  $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ .

Vediamo come si trasforma l'equazione. Sia  $v(y) = u(\psi^{-1}(y))$  la nuova incognita: dalla relazione  $u(x) = v(\psi(x)) = v(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_n))$  segue

$$\begin{aligned} D_i u(x) &= D_i v(\psi(x)) + D_n v(\psi(x)) D_i \phi(x), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ D_n u(x) &= D_n v(\psi(x)) D_n \phi(x), \end{aligned}$$

ed anche

$$\begin{aligned} D_j D_i u(x) &= D_j D_i v(\psi(x)) + D_n D_i v(\psi(x)) D_j \phi(x) + \\ &\quad + [D_j D_n v(\psi(x)) + D_n^2 v(\psi(x)) D_j \phi(x)] D_i \phi(x) + \\ &\quad + D_n v(\psi(x)) D_j D_i \phi(x), \quad i, j = 1, \dots, n-1, \\ D_n D_i u(x) &= D_n D_i v(\psi(x)) D_n \phi(x) + D_n^2 v(\psi(x)) D_n \phi(x) D_i \phi(x) + \\ &\quad + D_n v(\psi(x)) D_n D_i \phi(x), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ D_n^2 u(x) &= D_n^2 v(\psi(x)) [D_n \phi(x)]^2 + D_n v(\psi(x)) D_n^2 \phi(x). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Osserviamo che la dipendenza di queste derivate dalle derivate seconde di  $v$  è lineare. Se, per ogni derivata  $D_h D_k v$ , raggruppiamo in un singolo termine  $b_{hk}$  gli addendi  $a_{ij}$  relativi a derivate  $D_j D_i u$  che contengono  $D_h D_k v$ , otteniamo allora che la (1.28) si trasforma in un'equazione del tipo

$$\sum_{h,k=1}^n b_{hk}(y, v(y), \nabla v(y)) D_h D_k v(y) + b(y, v(y), \nabla v(y)) = 0, \quad y \in V, \tag{1.31}$$

ove nella funzione  $b$  sono inglobati tutti i termini che non contengono derivate seconde di  $v$ . Si vede dunque che la (1.31) ha la stessa forma della (1.28).

Vediamo come si trasformano le condizioni ai limiti. Chiaramente la prima,  $u|_S = \varphi_0$ , è equivalente a  $v|_\Sigma = \varphi_0 \circ \psi^{-1}$ . La seconda condizione,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \varphi_1$ , diventa:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \psi^{-1}(y) &= \sum_{i=1}^n D_i u(\psi^{-1}(y)) \nu_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [D_i v(y) + D_n v(y) D_i \phi(x)] \nu_i(x) + D_n v(y) D_n \phi(x) \nu_n(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} D_i v(y) \frac{D_i \phi(x)}{|D\phi(x)|} + D_n v(y) |D\phi(x)|, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} D_n v(y) &= \frac{1}{|D\phi(\psi^{-1}(y))|} \left[ \varphi_1(\psi^{-1}(y)) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} D_i(\varphi_0 \circ \psi^{-1})(y) \frac{D_i \phi(\psi^{-1}(y))}{|D\phi(\psi^{-1}(y))|} \right] \quad \forall y \in \Sigma. \end{aligned}$$

Quindi le nuove condizioni ai limiti sono del tipo

$$v|_\Sigma = \psi_0, \quad D_n v|_\Sigma = \psi_1, \quad (1.32)$$

con  $\psi_0$  e  $\psi_1$  funzioni analitiche al pari dei coefficienti  $b_{hk}$  e  $b$  della (1.31). Inoltre i nuovi dati sono ancora non caratteristici, ossia risulta in ogni punto di  $\Sigma$

$$\sum_{h,k=1}^n b_{hk}(e_n)_h (e_n)_k = b_{nn}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0, \psi_0, D_1 \psi_0, \dots, D_{n-1} \psi_0, \psi_1) \neq 0.$$

Infatti, poiché  $b_{nn}$  è la somma di tutti i coefficienti  $a_{ij}$  tali che l'espressione di  $D_i D_j u$  contiene la derivata  $D_n^2 v$ , dalle (1.30) è facile riconoscere che

$$\begin{aligned} b_{nn}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0, \psi_0, D_1 \psi_0, \dots, D_{n-1} \psi_0, \psi_1) &= \\ &= b_{nn}(y, v, \nabla v)|_\Sigma = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) D_i \phi D_j \phi \right) \Big|_S = \\ &= \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) \nu_i \nu_j |D\phi|^2 \right) \Big|_S \neq 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$



Abbiamo così ottenuto il nuovo problema (1.31)-(1.32), che è equivalente a quello originario.

**2<sup>a</sup> tappa:** trasformazione del problema (1.31)-(1.32) in un sistema quasi lineare del primo ordine.

Aggiungiamo all'incognita  $v$  altre  $n$  variabili dipendenti  $p_1, \dots, p_n$ , corrispondenti alle derivate prime di  $v$ . Corrispondentemente, aggiungiamo alla (1.31) nuove equazioni che legano le nuove incognite in modo coerente:

$$\begin{aligned} D_n v &= p_n, \\ D_n p_i &= D_i p_n, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Si tratta di  $n$  equazioni, alle quali si aggiunge la (1.31), che riscriviamo così:

$$\sum_{h,k=1}^n b_{hk}(y, v, p_1, \dots, p_n) D_h p_k + b(y, v, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad y \in V,$$

ovvero, isolando il termine che contiene  $D_n p_n$  e ricordando (1.33),

$$\begin{aligned} D_n p_n &= - \frac{1}{b_{nn}(y, v, p_1, \dots, p_n)} \left[ \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n b_{hk}(y, v, p_1, \dots, p_n) D_h p_k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} b_{nk}(y, v, p_1, \dots, p_n) D_n p_k + b(y, v, p_1, \dots, p_n) \right]. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Al sistema di equazioni (1.34)-(1.35) associamo le condizioni ai limiti che ricaviamo dalle (1.32):

$$v|_{\Sigma} = \psi_0, \quad p_i|_{\Sigma} = D_i \psi_0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad p_n|_{\Sigma} = \psi_1. \tag{1.36}$$

Occorre però verificare che il problema di Cauchy (1.34)-(1.35)-(1.36) è equivalente al problema di Cauchy (1.31)-(1.32). È chiaro, per costruzione, che se  $v$  è soluzione del problema (1.31)-(1.32), allora  $(v, D_1 v, \dots, D_n v)$  è soluzione del sistema (1.34)-(1.35)-(1.36). Per provare il viceversa, poniamo

$$\delta_i(y) = p_i(y) - D_i v(y), \quad i = 1, \dots, n,$$

e proviamo che le funzioni  $\delta_i$  sono tutte nulle. L'equazione  $D_n v = p_n$  dice intanto che  $\delta_n \equiv 0$ . Allora per  $i = 1, \dots, n-1$  si ha, grazie all'equazione  $D_n p_i = D_i p_n$ ,

$$D_n \delta_i = D_n p_i - D_n D_i v = D_i (p_n - D_n v) = D_i \delta_n = 0;$$

poiché per  $y_n = 0$  è  $\delta_i = D_i\psi_0 - D_i\psi_0 = 0$ , si deduce che  $\delta_i \equiv 0$ .

Dato che  $p_i = D_i v$  per  $i = 1, \dots, n$ , si ottiene che se  $(v, p_1, \dots, p_n)$  risolve il sistema (1.34)-(1.35)-(1.36), allora  $v$  è soluzione del problema (1.31)-(1.32). In definitiva, i due problemi di Cauchy sono equivalenti.

**3ª tappa:** riduzione a dati iniziali nulli.

Il sistema che dobbiamo risolvere ha acquisito la forma

$$\begin{cases} D_n q_i = \sum_{r=1}^N \sum_{h=1}^{n-1} B_{rh}^i(y, q_1, \dots, q_N) D_h q_r + B^i(y, q_1, \dots, q_N), \\ q_i|_{\Sigma} = \vartheta_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.37)$$

ove i coefficienti  $B_{rh}^i$ ,  $B^i$  e i dati  $\vartheta_i$  sono funzioni analitiche nell'aperto  $V$ . Scriviamo  $y = (y', y_n)$  per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$ , e introduciamo le nuove incognite

$$\begin{aligned} w_i(y) &= q_i(y) - \vartheta_i(y'), \quad i = 1, \dots, N, \\ w_{N+1}(y) &= y_n, \end{aligned}$$

ove la  $w_{N+1}$  serve a rappresentare i coefficienti  $B_{rh}^i$  e  $B^i$  come funzioni delle sole variabili  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ , oltre che delle incognite  $w_i$ .

Sostituendo le funzioni  $w_i$  in (1.37), otteniamo un nuovo sistema del tipo

$$\begin{cases} D_n w_i = \sum_{r=1}^{N+1} \sum_{h=1}^{n-1} A_{rh}^i(y', w_1, \dots, w_{N+1}) D_h w_r + \\ \quad + A^i(y', w_1, \dots, w_{N+1}), \quad i = 1, \dots, N+1, \\ w_i|_{\Sigma} = 0, \quad i = 1, \dots, N+1, \end{cases} \quad (1.38)$$

ove la  $(N+1)$ -sima equazione è semplicemente  $D_n w_{N+1} = 1$ . Osserviamo che dentro gli  $A^i$  sono conglobati i  $B^i$  e anche i termini della forma  $B_{rh}^i D_h \vartheta_r$ . È immediato riconoscere che i sistemi (1.37) e (1.38) sono equivalenti. Mostriamo che il sistema (1.38) ha un'unica soluzione analitica.

**4ª tappa:** costruzione di una "candidata" soluzione sotto forma di serie di potenze.

Per ipotesi i coefficienti  $A_{rh}^i$  e  $A^i$  sono analitici: quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} A_{rh}^i(y', z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{\alpha\beta}^{irh} \cdot (y')^\alpha z^\beta, \\ A^i(y', z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{\alpha\beta}^i \cdot (y')^\alpha z^\beta, \end{aligned}$$

e queste serie convergono assolutamente per  $|y'| + |z| < \delta$ , essendo  $\delta$  un opportuno numero positivo. Scriviamo anche le incognite  $w_i$  come somme di serie di potenze

$$w_i(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha^i y^\alpha, \quad i = 1, \dots, N+1, \quad (1.39)$$

delle quali occorre determinare i coefficienti  $c_\alpha^i$ . A questo scopo andiamo a sostituire questa serie nel sistema differenziale (1.38): poiché

$$D_k w_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: \alpha_k \geq 1} \alpha_k c_\alpha^i y^{\alpha - e_k} = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} (\gamma_k + 1) c_{\gamma + e_k}^i y^\gamma, \quad k = 1, \dots, n,$$

scrivendo

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha y^\alpha := \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha^1 y^\alpha, \dots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha^{N+1} y^\alpha \right),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} c_{\gamma + e_n}^i (\gamma_n + 1) y^\gamma = \\ &= \sum_{r=1}^{N+1} \sum_{h=1}^{n-1} \left[ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{\alpha\beta}^{irh} (y')^\alpha \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha y^\alpha \right)^\beta \right] \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} (\gamma_h + 1) c_{\gamma + e_h}^r y^\gamma + \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{\alpha\beta}^i (y')^\alpha \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha y^\alpha \right)^\beta. \end{aligned}$$

I due membri sono due serie di potenze nelle variabili  $y_1, \dots, y_n$ , che devono coincidere per  $|y| < \eta$ , per un opportuno  $\eta \leq \delta$ . Quindi i coefficienti devono essere uguali. Osserviamo che il coefficiente della generica potenza  $y^\gamma$  è, a sinistra,  $c_{\gamma + e_n}^i$ , mentre a destra è una certa espressione polinomiale nei coefficienti  $a_{\alpha\beta}^{irh}$ ,  $a_\alpha^i$  e  $c_\alpha^i$ ; si riconosce agevolmente che questo polinomio ha coefficienti *non negativi*, e che in esso compaiono solo coefficienti  $c_\alpha^i$  con  $n$ -sima componente  $\alpha_n \leq \gamma_n$ . Possiamo scrivere allora

$$c_{\gamma + e_n}^i = \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(a_{\alpha\beta}^{irh}, a_\alpha^i, c_\alpha^i), \quad (1.40)$$

con  $p_\gamma^i$  polinomio a coefficienti non negativi, i quali dipendono dalle quantità incognite  $c_\alpha^i$ , ma solo da quelle relative a multi-indici  $\alpha$  con  $\alpha_n \leq \gamma_n$ .



**Proposizione 1.5.2** *Nelle ipotesi sopra dette, supponiamo inoltre che*

$$|a_{\alpha\beta}^{irh}| \leq \bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \quad |a_{\alpha\beta}^i| \leq \bar{a}_{\alpha\beta}^i \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^{N+1}. \quad (1.44)$$

Allora

$$|c_\alpha^i| \leq |\sigma_\alpha^i| \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

**Dimostrazione** Sostituendo la serie (1.43) nel sistema (1.42) e procedendo come in precedenza, si ricava

$$\sigma_{\gamma+e_n}^i = \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(\bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \bar{a}_\alpha^i, \sigma_\alpha^i) \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^n,$$

ove  $p_\gamma^i$  è lo stesso polinomio che compare nella (1.40). Poiché tale polinomio ha coefficienti non negativi, e poiché  $\sigma_\alpha^i = 0$  quando  $\alpha_n = 0$  in virtù delle condizioni ai limiti, si deduce intanto, per induzione sull'indice  $\alpha_n$ , che  $\sigma_\alpha^i \geq 0$  per ogni multi-indice  $\alpha$ . Inoltre si ha

$$\begin{aligned} |c_{\gamma+e_n}^i| &= \frac{1}{\gamma_n + 1} |p_\gamma^i(a_{\alpha\beta}^{irh}, a_\alpha^i, c_\alpha^i)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(|a_{\alpha\beta}^{irh}|, |a_\alpha^i|, |c_\alpha^i|) \leq \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(\bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \bar{a}_\alpha^i, |c_\alpha^i|). \end{aligned}$$

Proveremo ora che  $|c_\alpha^i| \leq |\sigma_\alpha^i| = \sigma_\alpha^i$  per induzione su  $\alpha_n$ . Poiché  $|c_\alpha^i| = 0 = \sigma_\alpha^i$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  con  $\alpha_n = 0$ , è chiaro che la relazione desiderata è vera quando  $\alpha_n = 0$ . Supponiamo vera la disuguaglianza per tutti i multi-indici  $\alpha$  con  $\alpha_n = k - 1$ , e proviamola per quelli con  $\alpha_n = k$ . Sia dunque  $\delta \in \mathbb{N}^n$  con  $\delta_n = k$  e poniamo  $\gamma = \delta - e_n$ : allora

$$|c_\delta^i| = |c_{\gamma+e_n}^i| \leq \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(\bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \bar{a}_\alpha^i, |c_\alpha^i|),$$

ove, come sappiamo,  $p_\gamma^i$  dipende da coefficienti  $|c_\alpha^i|$  con  $\alpha_n \leq \gamma_n = \delta_n - 1 = k - 1$ . Quindi, per ipotesi induttiva, si ha  $|c_\alpha^i| \leq \sigma_\alpha^i$ ; ne segue

$$|c_\delta^i| \leq \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(\bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \bar{a}_\alpha^i, |c_\alpha^i|) \leq \frac{1}{\gamma_n + 1} p_\gamma^i(\bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \bar{a}_\alpha^i, \sigma_\alpha^i) = \sigma_{\gamma+e_n}^i = \sigma_\delta^i,$$

e dunque il passo induttivo è dimostrato. Ciò prova la tesi della proposizione 1.5.2.  $\square$

A questo punto non ci resta che costruire un sistema del tipo (1.42), i cui

coefficienti siano analitici e soddisfino le relazioni (1.44), ed una sua soluzione  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N+1})$  che sia analitica per  $|y| < \eta$ , per qualche  $\eta > 0$ ; dalla proposizione 1.5.2 dedurremo allora che la serie (1.39) converge per  $|y| < \eta$  e definisce una soluzione analitica  $w = (w_1, \dots, w_{N+1})$  del sistema (1.38), cosicché la dimostrazione del teorema di Cauchy-Kovalevskaya sarà conclusa. Scegliamo le funzioni  $\bar{A}_{rh}^i$  e  $\bar{A}^i$  come segue:

$$\bar{A}_{rh}^i(y', z) = \bar{A}^i(y', z) = \frac{C\delta}{\delta - \sum_{p=1}^{n-1} y_p - \sum_{j=1}^{N+1} z_j}, \quad (1.45)$$

ove  $C$  è una costante positiva. Come si vede, si tratta di un'unica funzione indipendente dagli indici  $i, r, h$  e analitica per  $|y'| + |z| < \delta$ . Il suo sviluppo in serie si calcola facilmente per mezzo del seguente

**Lemma 1.5.3** *Sia  $g(x) = \frac{r}{r - \sum_{p=1}^n x_p}$ ,  $|x| < \frac{r}{\sqrt{n}}$ . Allora*

$$g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha \quad \text{per } |x| < \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

**Dimostrazione** Essendo  $\sum_{p=1}^n |x_p| \leq |x| \sqrt{n}$ , risulta

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{r} \sum_{p=1}^n x_p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{r} \sum_{p=1}^n x_p \right)^k \quad \text{per } |x| < \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

D'altronde è noto, e si verifica agevolmente per induzione, che

$$\left( \sum_{p=1}^n x_p \right)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.46)$$

da cui

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha \quad \text{per } |x| < \frac{r}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

Da questo lemma segue subito che per  $|y'| + |z| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$  si ha

$$\bar{A}_{rh}^i(y', z) = \bar{A}^i(y', z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \beta \in \mathbb{N}^{N+1}} C \frac{(|\alpha| + |\beta|)!}{\delta^{|\alpha| + |\beta|} \alpha! \beta!} (y')^\alpha z^\beta,$$

e, come si vede, i coefficienti di questa serie di potenze sono non negativi. La costante  $C$  va scelta sufficientemente grande da garantire che sia

$$|a_{\alpha\beta}^{irh}| \leq \bar{a}_{\alpha\beta}^{irh}, \quad |a_{\alpha\beta}^i| \leq \bar{a}_{\alpha\beta}^i \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^{N+1}.$$

Ciò è sempre possibile: infatti, fissato  $r \in ]0, \delta[$ , basta scegliere

$$C = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \beta \in \mathbb{N}^{N+1}} (|a_{\alpha\beta}^{irh}| r^{|\alpha|+|\beta|} + |a_{\alpha\beta}^i| r^{|\alpha|+|\beta|}) < \infty$$

per ottenere

$$|a_{\alpha\beta}^{irh}| + |a_{\alpha\beta}^i| \leq \frac{C}{r^{|\alpha|+|\beta|}} \leq C \frac{(|\alpha| + |\beta|)!}{r^{|\alpha|+|\beta|} \alpha! \beta!} = \bar{a}_{\alpha\beta}^{irh} = \bar{a}_{\alpha\beta}^i.$$

Il sistema (1.42) con i coefficienti (1.45) diventa

$$\begin{cases} D_n \sigma_i = \frac{C\delta}{\delta - \sum_{p=1}^{n-1} y_p - \sum_{j=1}^{N+1} \sigma_j} \left( \sum_{r=1}^{N+1} \sum_{h=1}^{n-1} D_h \sigma_r + 1 \right), \\ \sigma_i|_{\Sigma} = 0, \quad i = 1, \dots, N+1. \end{cases} \quad (1.47)$$

Questo sistema, che è in effetti una sola equazione ripetuta  $N+1$  volte, ha una soluzione esplicita  $\sigma_i = \sigma$  (indipendente da  $i$ ), data da

$$\sigma(y) = \frac{1}{n(N+1)} \left[ \delta - \sum_{p=1}^{n-1} y_p - \sqrt{\left( \delta - \sum_{p=1}^{n-1} y_p \right)^2 - 2Cn(N+1)\delta y_n} \right],$$

definita, nonché analitica, per  $|y| < \eta \leq \delta$ , con  $\eta$  sufficientemente piccolo. Per verificare che essa è soluzione, conviene porre

$$x = \sum_{p=1}^{n-1} y_p, \quad y = y_n, \quad g = \sqrt{(\delta - x)^2 - 2Cn(N+1)\delta y}.$$

Allora possiamo scrivere

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{n(N+1)} (\delta - x - g),$$

e l'equazione che questa funzione deve risolvere è

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{C\delta}{\delta - x - (N+1)\sigma} \left[ (N+1)(n-1) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 1 \right].$$

Risulta in effetti

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\frac{1}{n(N+1)} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{C\delta}{g},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{1}{n(N+1)} - \frac{1}{n(N+1)} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{n(N+1)} \left[ -1 + \frac{\delta - x}{g} \right],$$

da cui, come si voleva,

$$\begin{aligned} & \frac{C\delta}{\delta - x - (N+1)\sigma} \left[ (N+1)(n-1) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 1 \right] = \\ & = \frac{C\delta}{(\delta - x)(1 - \frac{1}{n}) + \frac{g}{n}} \left[ \frac{1}{n} + \frac{\delta - x}{g} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{C\delta}{g} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \end{aligned}$$

È chiaro inoltre che  $\sigma|_{\Sigma} = 0$  e, in virtù di tutta la costruzione precedente, i coefficienti della serie di potenze di cui  $\sigma$  è somma verificano le relazioni  $|c_{\alpha}^i| \leq \sigma_{\alpha}$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Ciò completa la dimostrazione del teorema di Cauchy-Kovalevskaya.  $\square$

**Osservazione 1.5.4** Il teorema di Cauchy-Kovalevskaya vale più in generale per equazioni totalmente non lineari della forma

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^m u(x)) = 0 \\ u|_S = \varphi_0, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \varphi_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_S = \varphi_{m-1}, \end{cases}$$

con dati  $F, s, \varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$  analitici, sotto la condizione che essi non siano caratteristici, ossia

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}}(x, u, \dots, \nabla^m u) \nu^{\alpha} \neq 0 \quad \text{su } S.$$

La dimostrazione è del tutto simile, anche se formalmente più complicata.

**Esempio 1.5.5 (Kovalevskaya)** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.48)$$

Osserviamo che la retta iniziale,  $t = 0$ , è caratteristica. Assegnando solo il dato iniziale per la  $u$ , comunque, per  $t = 0$  sono note le derivate rispetto a  $x$ ,



mentre quelle rispetto a  $t$  si ricavano dall'equazione; quindi il problema dovrebbe avere una soluzione ben determinata (e in effetti è proprio così, come vedremo nel terzo capitolo). Affermiamo però il fatto seguente: nonostante che tutti i dati siano analitici, questo problema non ha alcuna soluzione analitica.

Ragioniamo per assurdo e sia  $u(x, t)$  una soluzione analitica di (1.48). Essa avrà uno sviluppo in serie di centro  $(0, 0)$  della forma

$$u(x, t) = \sum_{m,h=0}^{\infty} u_{m,h} t^m x^h;$$

dobbiamo ora calcolare i coefficienti  $u_{m,h}$ . Poiché per  $t = 0$  si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} u_{0,h} x^h = u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

si deduce intanto

$$u_{0,h} = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } h = 2k, \\ 0 & \text{se } h = 2k + 1. \end{cases}$$

Poi, dall'equazione differenziale si ricava

$$u_t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} m u_{m,h} t^{m-1} x^h = u_{xx} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{h=2}^{\infty} h(h-1) u_{m,h} t^m x^{h-2},$$

ovvero

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (p+1) u_{p+1,k} t^p x^k = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) u_{p,k+2} t^p x^k,$$

e dunque otteniamo le relazioni

$$\begin{cases} u_{p+1,h} = \frac{1}{p+1} (h+1)(h+2) u_{p,h+2} & \forall p, h \in \mathbb{N}, \\ u_{0,h} = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } h = 2k, \\ 0 & \text{se } h = 2k + 1. \end{cases} & \forall h \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.49)$$

Da qui segue subito  $u_{p,h} = 0$  se  $h$  è dispari. Se invece  $h$  è pari si ha

$$\begin{cases} u_{p+1,2k} = \frac{1}{p+1} (2k+1)(2k+2) u_{p,2k+2} & \forall p, k \in \mathbb{N}, \\ u_{0,k} = (-1)^k & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.50)$$

Induttivamente si deduce allora

$$\begin{aligned}
 u_{p,2k} &= \frac{1}{p}(2k+1)(2k+2)u_{p-1,2k+2} = \\
 &= \frac{1}{p(p-1)}(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)u_{p-2,2k+4} = \\
 &= \cdots = \frac{1}{p!}(2k+1)(2k+2) \cdots (2k+2p-1)(2k+2p)u_{0,2k+2p} = \\
 &= \frac{(-1)^{k+p}(2k+2p)!}{p!(2k)!} \quad \forall p, k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Ma la serie  $\sum_{p,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p}(2k+2p)!}{p!(2k)!} t^p x^{2k}$  non può convergere, salvo che nel punto  $(0,0)$ : infatti per ogni  $t > 0$  e  $x \in ]-1, 1[$  si ha

$$\sum_{p,k=0}^{\infty} \frac{(2k+2p)!}{p!(2k)!} t^p x^{2k} \geq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{p!} t^p \frac{1}{1-x^2} = +\infty,$$

come agevolmente si verifica utilizzando il criterio del rapporto. Si conclude pertanto che non esiste alcuna soluzione analitica del problema (1.48).

## 1.6 Equazioni risolubili elementarmente

Certe equazioni alle derivate parziali sono risolubili con metodi elementari: in questo paragrafo ne forniamo una breve rassegna per mezzo di alcuni esempi. Andremo alla ricerca sempre e soltanto di soluzioni *classiche*, ossia tali che tutte le derivate che compaiono nell'equazione siano continue.

**Esempio 1.6.1** La più semplice equazione alle derivate parziali è senza dubbio la seguente:

$$u_x(x, y) = 0,$$

che peraltro rientra fra quelle studiate nel paragrafo 1.3. Le sue soluzioni sono, evidentemente, tutte e sole le funzioni della forma  $u(x, y) = g(y)$ , con  $g$  funzione continua arbitraria.

**Esempio 1.6.2** Consideriamo l'equazione

$$au_x(x, y) + bu_y(x, y) = 0,$$

ove  $a, b$  sono costanti reali non entrambe nulle. Anche questa equazione fa parte di quelle analizzate nel paragrafo 1.3. Posto  $\tau = (a, b)$ , l'equazione ci dice che  $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ , quindi ogni soluzione  $u(x, y)$  deve essere costante lungo le rette che hanno la direzione di  $\tau$ , ossia quelle di equazione  $bx - ay = k$ , con  $k \in \mathbb{R}$  (che sono le linee caratteristiche associate all'equazione). Con il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = -bx + ay \\ \eta = ax + by, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-b\xi + a\eta}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{a\xi + b\eta}{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

scrivendo  $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{-b\xi + a\eta}{a^2 + b^2}, \frac{a\xi + b\eta}{a^2 + b^2}\right)$ , si trova che  $v$  verifica

$$v_\eta = \frac{u_x a + u_y b}{a^2 + b^2} = 0.$$

Dall'esempio 1.6.1 segue allora  $v(\xi, \eta) = g(\xi)$ , con  $g$  arbitraria funzione continua. Pertanto

$$u(x, y) = v(\xi, \eta) = g(\xi) = g(-bx + ay),$$

con  $g$  arbitraria funzione di classe  $C^1$ .

Allo stesso risultato si arriva con la teoria del paragrafo 1.3: si trova infatti che le soluzioni sono date implicitamente dalla relazione

$$F(-bx + ay, u(x, y)) = 0,$$

con  $F$  di classe  $C^1$  avente gradiente non nullo.

**Esempio 1.6.3** L'equazione del secondo ordine

$$u_{xy}(x, y) = 0$$

si risolve facilmente utilizzando l'esempio 1.6.1: si ha successivamente

$$u_x(x, y) = g(x), \quad g \text{ arbitraria funzione continua,}$$

$$u(x, y) = \int_c^x g(\xi) d\xi + h(y), \quad h \text{ arbitraria funzione di classe } C^1,$$

ove  $c$  è una costante qualunque. Si conclude che

$$u(x, y) = k(x) + h(y),$$

con  $h, k$  arbitrarie funzioni di classe  $C^1$ .

**Esempio 1.6.4** Fissata  $g \in C^1(\Omega)$ , ove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , consideriamo l'equazione

$$u_x(x, y)g_y(x, y) - u_y(x, y)g_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.51)$$

Sulla base del lemma 1.3.2, possiamo dire che le soluzioni sono tutte le funzioni definite in forma implicita da

$$F(u(x, y), g(x, y)) = 0,$$

con  $F$  funzione arbitraria di classe  $C^1$  con gradiente mai nullo.

**Esempio 1.6.5** Consideriamo l'equazione

$$u_{xx} - u_{yy} = 0;$$

quando  $x$  è la variabile tempo, questa è l'equazione uni-dimensionale delle onde, o di D'Alembert. Le caratteristiche di questa equazione sono, in accordo con la (1.26), le rette

$$x + y = c, \quad x - y = d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Con il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ y = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases}, \quad u(x, y) = v(x + y, x - y) = v(\xi, \eta),$$

l'equazione diventa, come è facile verificare

$$0 = u_{xx} - u_{yy} = 4v_{\xi\eta},$$

ossia  $v_{\xi\eta} = 0$ . Come sappiamo dall'esempio 1.6.3, questa equazione ha le soluzioni  $v(\xi, \eta) = a(\xi) + b(\eta)$ , con  $a, b$  arbitrarie funzioni di classe  $C^1$ ; dunque otteniamo che l'equazione originaria ha le soluzioni

$$u(x, y) = a(x + y) + b(x - y),$$

ove stavolta però  $a$  e  $b$  sono arbitrarie funzioni di classe  $C^2$ .

In modo analogo, l'equazione

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{yy} = 0, \quad (1.52)$$

ove  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ha per soluzioni le funzioni

$$u(x, y) = a(x + cy) + b(x - cy),$$

con  $a, b$  arbitrarie funzioni di classe  $C^2$ .

**Esempio 1.6.6** L'equazione di Laplace bidimensionale è la seguente:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Essa non ha caratteristiche. Formalmente, si ottiene dalla (1.52) scegliendo  $c = i$ : otteniamo come soluzioni tutte le funzioni della forma

$$u(x, y) = a(x + iy) + b(x - iy) \quad (1.53)$$

con  $a$  e  $b$  funzioni di classe  $C^2$ .

In effetti quello dell'esempio precedente è molto di più di un calcolo formale: vale infatti la seguente

**Proposizione 1.6.7** *Sia  $u \in C^2(\Omega)$ , ove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  è un aperto semplicemente connesso. Sono fatti equivalenti:*

- (i)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  in  $\Omega$ ,
- (ii) esiste una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa tale che  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y)$ ,
- (iii) esiste una funzione  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa tale che  $u(x, y) = \operatorname{Im} g(x, y)$ .

**Dimostrazione** Anzitutto, (ii) e (iii) sono equivalenti: basta porre  $g = if$ , ovvero  $f = -ig$ . Dunque basta provare che (i) è equivalente a (ii).

Se vale (ii), fissato  $(x, y) = x + iy = z \in \Omega$  esiste il limite

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} = f'(z) \in \mathbb{C}.$$

Poniamo  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ : scegliendo  $w = h \in \mathbb{R}$ , si ricava

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y);$$

scegliendo invece  $w = ik$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , si trova analogamente

$$if'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+iy+ik) - f(x+iy)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(z) = u_y(x, y) + iv_y(x, y).$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria deduciamo

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \Omega.$$

Queste sono le *equazioni di Cauchy-Riemann*. Da esse, derivando, ricaviamo subito

$$u_{xx} = v_{xy} = -u_{yy} \quad \text{in } \Omega,$$

ossia vale (i). Si noti che anche  $v$  verifica la stessa equazione.

Se, viceversa, vale (i), allora la forma differenziale lineare  $\omega = -u_y dx + u_x dy$  è chiusa in  $\Omega$ : poiché  $\Omega$  è semplicemente connesso, essa è esatta in  $\Omega$ . Sia  $v$  una primitiva di  $\omega$ : si ha allora

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x \quad \text{in } \Omega,$$

ossia  $u$  e  $v$  risolvono le equazioni di Cauchy-Riemann in  $\Omega$ . Posto, per ogni  $z = x + iy = (x, y) \in \Omega$ ,

$$f(z) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = u(x, y) + iv(x, y),$$

proviamo che  $f$  è olomorfa: se  $z = x + iy \in \Omega$  si ha, con  $w = h + ik$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= \\ &= \frac{u(x+h, y+k) - u(x, y)}{h+ik} + i \frac{v(x+h, y+k) - v(x, y)}{h+ik} = \\ &= \frac{1}{h+ik} \int_0^1 \frac{d}{dt} [u(x+th, y+tk) + iv(x+th, y+tk)] dt = \\ &= \frac{1}{h+ik} \int_0^1 [u_x h + u_y k + iv_x h + iv_y k] dt = \\ &= \frac{1}{h+ik} \int_0^1 [u_x h + u_y k - iu_y h + iu_x k] dt = \\ &= \frac{1}{h+ik} \int_0^1 (u_x - iu_y)[h+ik] dt = \\ &= \int_0^1 [u_x(x+th, y+tk) - iu_y(x+th, y+tk)] dt, \end{aligned}$$

e per  $w \rightarrow 0$ , con un passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo che  $f$  è olomorfa con  $f'(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$ : ciò prova (ii).  $\square$

Ad esempio, risolvono l'equazione di Laplace le funzioni

$$x^2 - y^2, \quad 2xy \quad (\text{scegliendo in (1.53) } a(s) = \pm b(s) = s^2/2),$$

$$\begin{aligned}
x^3 - 3xy^2, \quad 3x^2y - y^3 & \quad (\text{con } a(s) = \pm b(s) = s^3/2), \\
e^x \cos y, \quad e^x \sin y & \quad (\text{con } a(s) = \pm b(s) = e^s/2), \\
\log(x^2 + y^2) & \quad (\text{con } a(s) = b(s) = \log s).
\end{aligned}$$

## 1.7 Il metodo di separazione delle variabili

Talvolta è possibile risolvere un'equazione differenziale alle derivate parziali in due variabili  $x, y$  ricercando dapprima soluzioni della forma  $X(x)Y(y)$  (cioè a variabili separate), e poi cercando soluzioni più generali sotto forma di combinazioni lineari (finite o infinite) delle precedenti. Il metodo è rivolto alla ricerca di soluzioni che soddisfino, insieme all'equazione, determinate condizioni ai limiti. Esso è alquanto generale, ma si presta ad essere meglio descritto tramite qualche esempio.

Consideriamo ancora l'equazione di Laplace in due dimensioni,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . È naturale che una soluzione della forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  sia definita sul prodotto cartesiano di due intervalli di  $\mathbb{R}$ : supporremo quindi  $\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[$ . Inoltre, a meno di omotetie  $(x, y) \mapsto (\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-c}{d-c})$  ci si può ridurre al caso  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, L[$ , con  $L = \frac{d-c}{b-a}$ . Studieremo in definitiva l'equazione di Laplace bidimensionale in un rettangolo:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, L[. \quad (1.54)$$

Sostituendo in (1.54)  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , si ottiene

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

ovvero, dividendo per  $XY$  (che ovviamente si suppone non nullo),

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad \forall (x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, L[.$$

Dato che il primo membro dipende solo da  $x$  e il secondo soltanto da  $y$ , si deduce che entrambi i membri sono costanti: in altre parole, affinché una funzione a variabili separate  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  risolva l'equazione (1.54), è necessario e sufficiente che esista  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) & \text{in } ]0, 1[, \\ Y''(y) = \lambda Y(y) & \text{in } ]0, L[. \end{cases} \quad (1.55)$$

Le due equazioni che compaiono in (1.55) sono equazioni ordinarie del secondo ordine: le soluzioni sono

$$X(x) = \begin{cases} c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x & \text{se } \lambda > 0 \\ c_1 + c_2x & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 \cosh \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0, \end{cases} \quad (1.56)$$

$$Y(y) = \begin{cases} c_3 \cosh \sqrt{\lambda}y + c_4 \sinh \sqrt{\lambda}y & \text{se } \lambda > 0 \\ c_3 + c_4y & \text{se } \lambda = 0 \\ c_3 \cos \sqrt{-\lambda}y + c_4 \sin \sqrt{-\lambda}y & \text{se } \lambda < 0. \end{cases} \quad (1.57)$$

Dunque il loro prodotto  $u(x, y)$  dipenderà da quattro costanti arbitrarie: per selezionarne una, occorreranno perciò quattro condizioni ai limiti. Per l'equazione di Laplace, tipicamente, si prescrive il valore della soluzione sulla frontiera dell'aperto dove l'equazione stessa è soddisfatta: questo è il *problema di Dirichlet*. Nel nostro caso prescriveremo il valore di  $u$  sui quattro lati del rettangolo  $]0, 1[ \times ]0, L[$ :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, y) = f_2(y), & y \in [0, L], \\ u(x, L) = f_3(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, y) = f_4(y), & y \in [0, L], \end{cases} \quad (1.58)$$

ove  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  sono funzioni continue assegnate. Naturalmente, se vogliamo che la soluzione sia continua sul rettangolo chiuso, dovremo imporre condizioni di compatibilità fra i dati negli estremi:

$$f_1(1) = f_2(0), \quad f_2(L) = f_3(1), \quad f_3(0) = f_4(L), \quad f_4(0) = f_1(0). \quad (1.59)$$

Sfruttando la linearità del problema, possiamo costruire la soluzione come somma delle soluzioni di problemi in cui tre su quattro dei dati alla frontiera siano nulli: in altre parole, si studiano quattro problemi di Dirichlet in cui i dati sono

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \end{pmatrix}.$$



Consideriamo il primo problema: cerchiamo una funzione  $u_1(x, y)$  tale che

$$\begin{cases} (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} = 0 & \text{in } ]0, 1[ \times ]0, L[ \\ u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_1(x, L) = 0, & x \in [0, 1], \\ u_1(0, y) = 0, \quad u_1(1, y) = 0, & y \in [0, L], \end{cases} \quad (1.60)$$

Cominciamo a determinare la funzione  $X(x)$ : vogliamo che sia

$$X(1)Y(y) = u(1, y) = 0, \quad X(0)Y(y) = u(0, y) = 0,$$

e avendo supposto  $Y \neq 0$  deduciamo per la  $X$  le condizioni ai limiti

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Si vede subito che se la (1.56) deve fornire una soluzione non nulla che verifichi queste condizioni, il numero  $\lambda$  deve essere positivo. In tal caso, però, si ha

$$X(0) = 0 \implies c_1 = 0, \quad X(1) = 0 \implies c_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0,$$

e poiché non vogliamo che  $X$  sia nulla, ciò implica  $\lambda = k^2\pi^2$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ . Per questi valori di  $\lambda$  si hanno le soluzioni non banali

$$X_k(x) = \sin k\pi x, \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Avendo ormai stabilito che i possibili valori di  $\lambda$  sono i numeri  $k^2\pi^2$ , andiamo a determinare la funzione  $Y = Y_k$  corrispondente al valore  $\lambda_k = k^2\pi^2$ : essendo  $\lambda_k > 0$ , da (1.57) segue che  $Y_k$  sarà del tipo

$$Y_k(y) = c_3 \cosh k\pi y + c_4 \sinh k\pi y,$$

e la condizione  $u(x, L) = X(x)Y(L) = 0$  implica che sia  $Y(L) = 0$ . Imponendo questo vincolo, troviamo che deve aversi

$$0 = c_3 \cosh k\pi L + c_4 \sinh k\pi L;$$

si può allora prendere (e la scelta è unica a meno di una costante moltiplicativa)

$$c_3 = \sinh k\pi L, \quad c_4 = -\cosh k\pi L,$$

e dunque

$$Y_k(y) = c_k [\cosh k\pi y \sinh k\pi L - \sinh k\pi y \cosh k\pi L] = c_k \sinh k\pi(L - y)$$

ove  $c_k$  è una costante arbitraria. Abbiamo così costruito la funzione

$$u_{1k}(x, y) = X_k(x)Y_k(y) = c_k \sin k\pi x \sinh k\pi(L - y),$$

la quale verifica l'equazione e tre delle quattro condizioni ai limiti: in generale, infatti, non sarà vero che  $u_{1k}(x, 0) = f_1(x)$ .

Consideriamo però la sovrapposizione delle  $u_{1k}$ , cioè la serie

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x \sinh k\pi(L - y), \quad (1.61)$$

la quale sarà convergente per ogni punto  $(x, y)$  del rettangolo, purché i numeri  $c_k$  tendano a 0 abbastanza rapidamente. È chiaro che  $u_1$  verifica ancora le tre condizioni ai limiti con dato nullo. La quarta condizione è anch'essa verificata se e solo se risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x \sinh k\pi L = f_1(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Questo è possibile solo se il primo membro è la serie di Fourier di  $f_1$  relativa al sistema ortonormale  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos k\pi x, \sin k\pi x\}$  relativo all'intervallo  $[-1, 1]$ ; trattandosi di una serie di soli seni, ciò implica che la sua somma è una funzione dispari e dunque  $f_1$ , a priori definita su  $[0, 1]$ , va prolungata per disparità su  $[-1, 1]$ . Dunque in (1.61) deve aversi

$$c_k = \frac{b_k}{\sinh k\pi L}, \quad \text{ove } b_k = 2 \int_0^1 f_1(\xi) \sin k\pi\xi d\xi \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Poiché  $b_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ , è facile verificare che la serie (1.61), ossia

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x \frac{\sinh k\pi(L - y)}{\sinh k\pi L}, \quad b_k = 2 \int_0^1 f_1(\xi) \sin k\pi\xi d\xi, \quad (1.62)$$

converge in ogni punto interno al rettangolo, insieme con tutte le sue derivate. Inoltre nei punti  $(x, 0)$  essa ha per somma il prolungamento dispari di  $f_1$ , laddove questo è continuo: ciò accade quando  $x \in ]0, 1[$ , ma non negli estremi, a meno che non si abbia  $f_1(0) = f_1(1) = 0$ .

Così la soluzione  $u_1$  definita in (1.62) sarà di classe  $C^2$ , anzi  $C^\infty$ , all'interno del rettangolo, e prenderà i dati al bordo ovunque tranne che nei vertici  $(0, 0)$

e  $(0, 1)$  dove il suo valore sarà 0.

Procedendo in modo del tutto analogo si trovano le soluzioni degli altri tre problemi di Dirichlet:

$$u_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{\sinh \frac{k\pi}{L} x}{\sinh \frac{k\pi}{L}} \sin \frac{k\pi}{L} y, \quad d_k = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(\eta) \sin \frac{k\pi}{L} \eta d\eta, \quad (1.63)$$

$$u_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x \frac{\sinh k\pi y}{\sinh k\pi L}, \quad a_k = 2 \int_0^1 f_3(\xi) \sin k\pi \xi d\xi, \quad (1.64)$$

$$u_4(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{\sinh \frac{k\pi}{L} (1-x)}{\sinh \frac{k\pi}{L}} \sin \frac{k\pi}{L} y, \quad f_k = \frac{2}{L} \int_0^L f_4(\eta) \sin \frac{k\pi}{L} \eta d\eta. \quad (1.65)$$

Anche le funzioni  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  sono di classe  $C^\infty$  nell'interno del rettangolo, e si attaccano ai dati al bordo in tutti i punti tranne che nei vertici del rettangolo, malgrado la presenza delle condizioni di compatibilità (1.59). In definitiva, la somma  $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$  è di classe  $C^\infty$  nell'interno del rettangolo, ove risolve l'equazione di Laplace, ed è continua sull'intero rettangolo chiuso, prendendo i dati al bordo lungo i lati del rettangolo salvo che nei vertici, ove vale 0. Essa dunque coincide con i dati nei quattro vertici solo se si fa l'ipotesi che tutte le quantità presenti in (1.59) siano nulle.

Osserviamo però che un piccolo raffinamento del metodo permette di costruire una soluzione regolare del problema di Dirichlet (1.54)-(1.58) sotto la sola ipotesi di compatibilità (1.59). Consideriamo la funzione

$$z(x, y) = p + qx + ry + sxy, \quad (1.66)$$

la quale risolve l'equazione di Laplace su tutto  $\mathbb{R}^2$  per ogni scelta dei parametri  $p, q, r, s$ . Scegliamo tali parametri in modo che sia

$$z(0, 0) = d, \quad z(1, 0) = a, \quad z(0, L) = c, \quad z(1, L) = b, \quad (1.67)$$

dove  $a, b, c, d$  sono i valori presenti in (1.59):

$$\begin{aligned} a &= f_1(1) = f_2(0), & b &= f_2(L) = f_3(1), \\ c &= f_3(0) = f_4(L), & d &= f_4(0) = f_1(0). \end{aligned}$$

Si ricava subito

$$p = d, \quad q = a - d, \quad r = \frac{c - d}{L}, \quad s = \frac{b - a - c + d}{L}.$$

La funzione  $z$ , oltre all'equazione differenziale (1.54) e alle condizioni (1.67), verifica

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= p + qx, & z(x, L) &= p + qx + rL + sLx & \forall x \in [0, 1], \\ z(0, y) &= p + ry, & z(1, y) &= p + q + ry + sy & \forall y \in [0, L]. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Sia adesso  $v(x, y)$  la funzione che risolve il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul rettangolo  $]0, 1[ \times ]0, L[$  con dati  $f_1(x) - p - qx$ ,  $f_2(y) - p - q - ry - sy$ ,  $f_3(x) - p - qx - rL - sLx$ ,  $f_4(y) - p - ry$ , ottenuta col metodo di separazione delle variabili visto in precedenza: si noti che questi dati, nei quattro vertici, forniscono il valore 0. La funzione  $v$ , come si è visto, è la somma di quattro funzioni  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , ciascuna delle quali è nulla su tre dei quattro lati e, in particolare, è nulla sui quattro vertici. Si conclude che la funzione

$$u(x, y) = v(x, y) + z(x, y),$$

ove  $z$  è data da (1.66), risolve l'equazione di Laplace sul rettangolo  $[0, 1] \times [0, L]$ , prende sul bordo i dati originari  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , e sui vertici assume gli stessi valori di  $z$  forniti dalla (1.67), cioè i numeri che compaiono nella (1.59). Quindi  $u$  risolve l'equazione di Laplace nell'interno del rettangolo ed è continua sulla frontiera, ove coincide esattamente con i dati.

La separazione delle variabili si può applicare anche ad altri problemi, come mostrano gli esempi che seguono.

**Esempi 1.7.1 (1)** Consideriamo il *problema di Cauchy-Dirichlet* per l'equazione del calore uni-dimensionale:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{in } [0, \infty[ \\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } [0, L]. \end{cases}$$

Cercando una soluzione della forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$  si trova una equazione lineare del primo ordine per  $T(t)$  e del secondo ordine per  $X(x)$ , con dati  $X(0) = X(L) = 0$ . Procedendo nel modo consueto, si trova la soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt.$$

La serie converge con tutte le sue derivate in  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$ , grazie alla presenza dell'esponenziale. Per  $t = 0$  la  $u$  si attacca al dato  $f$  se il prolungamento dispari di  $f$  è di classe  $C^1$ .

(2) Consideriamo ora il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione della corda vibrante (equazione delle onde uni-dimensionale):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{in } [0, \infty[ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{in } [0, L]. \end{cases}$$

Con i soliti metodi, la soluzione  $u(x, t) = X(x)T(t)$  si trova della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \cos \frac{n\pi}{L} t + \frac{L}{n\pi} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right] \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

ove

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\tau) \sin \frac{n\pi}{L} \tau \, d\tau, \quad \beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(\tau) \sin \frac{n\pi}{L} \tau \, d\tau.$$

Questa serie converge in tutti i punti della semistriscia  $[0, L] \times [0, \infty[$ , purché risulti ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n|b_n| + |\beta_n|) < \infty,$$

il che è certamente vero se si suppone che i prolungamenti dispari di  $u_0$  e  $u_1$  siano rispettivamente di classe  $C^2$  e  $C^1$ .

(3) Si può usare il metodo di separazione della variabili anche in più di due dimensioni. Ad esempio, consideriamo l'equazione di Laplace in tre dimensioni,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

nel cubo  $[0, \pi]^3$ , con le condizioni ai limiti

$$\begin{cases} u = 0 & \text{per } x = 0, x = \pi, y = 0, y = \pi, z = \pi, \\ u(x, y, 0) = g(x, y). \end{cases}$$

Cercando una soluzione  $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , si arriva alla relazione

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0,$$

da cui

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z};$$

ciò implica

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = c_1 = -\frac{Z''}{Z},$$

e quindi

$$\frac{X''}{X} = c_1 - \frac{Y''}{Y} = c_2.$$

In definitiva

$$\frac{X''}{X} = c_2, \quad \frac{Y''}{Y} = c_1 - c_2, \quad \frac{Z''}{Z} = -c_1.$$

Le condizioni ai limiti forniscono

$$X(0) = X(\pi), \quad Y(0) = Y(\pi), \quad Z(\pi) = 0.$$

Risolvendo l'equazione per  $X$ , si trova  $c_2 = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , e  $X_n(x) = \sin nx$ . Risolvendo per la  $Y$  si ottiene poi  $c_1 - c_2 = -m^2$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$ , e  $y_m(y) = \sin my$ . Infine per la  $Z$  si ricava  $c_1 = -m^2 - n^2$  e  $Z_{mn}(z) = c_{mn} \sinh \sqrt{m^2 + n^2}(\pi - z)$ . In definitiva, sovrapponendo le soluzioni trovate, la soluzione  $u$  ha la forma

$$u(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sinh \sqrt{m^2 + n^2}(\pi - z) \sin nx \sin my.$$

Imponendo infine che  $u(x, y, 0)$  coincida con  $g(x, y)$  si deduce che

$$c_{mn} = \frac{g_{mn}}{\sinh \sqrt{m^2 + n^2}\pi}, \quad g_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi g(\xi, \eta) \sin n\xi \sin m\eta \, d\xi d\eta.$$

Si può verificare che se i  $g_{mn}$  sono limitati, il che è vero se si suppone  $\int_0^\pi \int_0^\pi |g(x, y)| \, dx dy < \infty$ , allora la serie che definisce  $u$  converge uniformemente con tutte le sue derivate in  $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [\varepsilon, \pi]$  per ogni  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ . Quindi,  $u$  è di classe  $C^\infty$  nel cubo aperto e risolve ivi l'equazione; inoltre  $u$  è nulla su tutte le facce del cubo eccetto  $z = 0$ . Se, in più, il prolungamento dispari di  $g(x, y)$  rispetto a  $x$  e a  $y$  è di classe  $C^1$ , allora la serie della  $u$  converge uniformemente su tutto il cubo e si attacca a tutti i dati al bordo.

Per concludere, osserviamo che molti altri problemi ai limiti sono trattabili col metodo di separazione delle variabili, come ad esempio quelli relativi alle equazioni di Sturm-Liouville: rimandiamo a [10] per approfondimenti. Naturalmente, il metodo non è onnipotente: per applicarlo, occorrono le tre condizioni che seguono.

1. L'operatore differenziale  $L[u]$  deve essere separabile, ossia tale che esista una funzione  $\Phi(x, y)$  che verifichi

$$\frac{L[X(x)Y(y)]}{\Phi(x, y)X(x)Y(y)} = a(x) + b(y);$$

si noti che  $L$  può comunque avere coefficienti non costanti.

2. Le condizioni ai limiti devono essere assegnate su un rettangolo.
3. Le condizioni su un lato  $x = c$  non devono contenere derivate rispetto a  $y$ , né coefficienti che dipendano da  $y$ ; analoghe condizioni devono valere per i lati  $y = c$ .

## 1.8 Classificazione delle equazioni del secondo ordine

Come sappiamo, un'equazione del secondo ordine lineare, omogenea, a coefficienti costanti ha la forma seguente:

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j u + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu = 0, \quad (1.69)$$

ove la matrice  $A = \{a_{ij}\}$  è reale e simmetrica. In particolare,  $A$  ha  $n$  autovalori reali (non necessariamente tutti distinti), ed è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale  $U$ :

$$U^{-1}AU = U^tAU = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Con il cambiamento di variabili  $\xi = Ux$ , posto  $U = \{q_{ij}\}$  e  $v(\xi) = v(Ux) = u(x)$ , è facile verificare che

$$D_i u(x) = \sum_{k=1}^n D_k v(Ux) q_{ki}, \quad D_j D_i u(x) = \sum_{h,k=1}^n D_h D_k v(Ux) q_{hj} q_{ki},$$

cosicch 

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j u + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu = \\
&= \sum_{h,k=1}^n \left[ \sum_{i,j=1}^n q_{ki} a_{ij} q_{hj} \right] D_h D_k v(\xi) + \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^n q_{ki} b_i \right] D_k v(\xi) + cv(\xi) = \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k D_k^2 v(\xi) + \sum_{k=1}^n B_k D_k v(\xi) + cv(\xi).
\end{aligned}$$

Inoltre, se tutti gli autovalori  $\lambda_k$  sono non nulli,   possibile rendere nulli i coefficienti  $B_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} b_i$  con l'ulteriore sostituzione

$$w(\xi) = v(\xi) e^{\sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2\lambda_k} \xi_k} :$$

si ottiene infatti per  $w$ , come   facile verificare, l'equazione nella sua forma canonica

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k D_k^2 w(\xi) + \lambda w(\xi) = 0, \quad (1.70)$$

ove

$$\lambda = c - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{B_k^2}{\lambda_k}.$$

Se vi sono  $m$  autovalori non nulli,  $0 < m < n$ , ad esempio  $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$ , con la sostituzione

$$w(\xi) = v(\xi) e^{\sum_{k=1}^m \frac{B_k}{2\lambda_k} \xi_k}$$

si trova analogamente la forma canonica

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k D_k^2 w(\xi) + \sum_{k=m+1}^n B_k D_k w(\xi) + \lambda w(\xi) = 0, \quad (1.71)$$

con

$$\lambda = c - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \frac{B_k^2}{\lambda_k}.$$

La classificazione delle equazioni si fa sulla base del segno degli autovalori, e naturalmente   invariante rispetto a trasformazioni ortogonali delle variabili indipendenti. Cominciamo con il caso  $n = 2$ , dove si chiarisce l'origine della terminologia.



**Definizione 1.8.1** Sia  $L$  l'operatore definito in (1.69). Diciamo che esso è ellittico se i due autovalori della matrice  $A$  hanno lo stesso segno; è iperbolico se i due autovalori hanno segno opposto; è parabolico se uno (e uno solo) dei due autovalori è nullo. L'equazione  $L[u] = 0$  è detta ellittica, iperbolica, parabolica se tale è l'operatore  $L$ .

L'origine dei tre nomi è legata alla forma delle curve di livello del polinomio caratteristico associato all'operatore  $L$ , che è

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$$

e, nel caso di  $n$  variabili,

$$P(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^n b_i\xi_i + c.$$

Quando  $n = 2$ , l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = t\}$ , se non vuoto, è una ellisse se gli autovalori sono non nulli e concordi, è un'iperbole se gli autovalori sono non nulli e discordi, è una parabola se uno dei due autovalori è nullo.

Quando  $n > 2$ , la casistica si complica. Per  $n = 3$  si hanno i seguenti casi:

- tre autovalori concordi: l'operatore è ellittico e le curve di livello del polinomio caratteristico sono ellissoidi;
- due autovalori concordi, uno discorde: l'operatore è iperbolico e le curve di livello sono iperboloidi a due falde;
- due autovalori concordi e uno nullo: l'operatore è parabolico e le curve di livello sono paraboloidi;
- due autovalori discordi e uno nullo: l'operatore è iperbolico "degenere" e le curve di livello sono iperboloidi a una falda;
- due autovalori nulli e uno non nullo: l'operatore è parabolico degenere e le curve di livello sono cilindri obliqui a sezione parabolica.

Nel caso generale, i casi sono ancora di più e non tutti sono studiati:

- $n$  autovalori concordi: l'operatore è ellittico;
- $n - 1$  autovalori concordi, uno discorde: l'operatore è iperbolico;

- $k$  autovalori positivi e  $n - k$  negativi, con  $2 \leq k \leq n - 2$ : l'operatore è ultra-iperbolico: questo è un caso non studiato, poiché non vi è nessun problema fisico che conduca ad operatori di questo tipo;
- $n - 1$  autovalori concordi, uno nullo: l'operatore è parabolico;
- $n - 2$  autovalori concordi, due nulli: l'operatore è ultra-parabolico: se ne trovano alcuni esempi in problemi di tipo biologico (dinamica delle popolazioni);
- $k$  autovalori nulli,  $n - k$  non tutti concordi: l'operatore è iperbolico degenero, ed è poco studiato per l'assenza di esempi applicativi.

Se l'operatore (1.69) è a coefficienti variabili (continui), la sua natura (ellitticità, iperbolicità, parabolicità) sarà un fatto puntuale o locale: ad esempio si dice che  $L$  è ellittico in  $\Omega$  se per ogni  $x \in \Omega$  la matrice  $\{A_{ij}(x)\}$  ha  $n$  autovalori concordi, ossia la forma quadratica associata alla sua parte principale,

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

è definita positiva per ogni  $x \in \Omega$ , ovvero definita negativa per ogni  $x \in \Omega$ . Ciò equivale alla condizione

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right| \geq \nu(x) |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega,$$

con  $\nu(x) > 0$  in  $\Omega$ .

Ovviamente, esistono anche operatori che cambiano tipo in un fissato aperto: ad esempio, l'operatore

$$L[u] = u_{xx} + xu_{yy} + u_y$$

è ellittico per  $x > 0$ , parabolico per  $x = 0$ , iperbolico per  $x < 0$ .

Gli operatori che studieremo in dettaglio nel seguito sono i seguenti:

- l'operatore di Laplace  $n$ -dimensionale  $\Delta u = \sum_{i=1}^n D_i^2 u$ ,
- l'operatore del calore  $(n + 1)$ -dimensionale  $u_t - \Delta u$ ,
- l'operatore di D'Alembert  $(n + 1)$ -dimensionale  $\square u = u_{tt} - \Delta u$ .

# Capitolo 2

## L'equazione di Laplace

### 2.1 Motivazioni fisiche

L'operatore di Laplace è senza dubbio il più importante e il più studiato fra tutti gli operatori differenziali alle derivate parziali, essendo il prototipo di quelli di tipo ellittico ed entrando nella definizione dei più semplici fra quelli parabolici e iperbolici. Le soluzioni dell'equazione di Laplace hanno anche un nome speciale:

**Definizione 2.1.1** *Le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , che risolvono l'equazione  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , si dicono armoniche in  $\Omega$ .*

Invece l'equazione *non omogenea*  $\Delta u = f$  prende il nome di *equazione di Poisson*.

L'operatore di Laplace interviene in numerosi fenomeni fisici: ci limitiamo ad illustrarne alcuni.

**Esempio 2.1.2** Nella teoria della gravitazione, la forza con cui una massa  $m$ , concentrata in un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , agisce su una massa unitaria concentrata in un altro punto  $x$  è data, secondo la legge di Newton, da

$$F(x) = m \frac{x_0 - x}{|x_0 - x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}.$$

Il campo di forze  $F(x)$  è conservativo, ossia esiste un potenziale gravitazionale  $U(x)$  tale che

$$F(x) = \nabla U(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\} :$$

precisamente, se vogliamo che all'infinito il potenziale sia nullo, si ha  $U(x) = \frac{m}{|x-x_0|}$ . È facile verificare che il potenziale  $U$  è una funzione armonica nell'aperto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ .

**Esempio 2.1.3** Una carica elettrica  $q$ , posta in un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , agisce su una carica unitaria situata in un altro punto  $x$  con una forza elettrostatica

$$F(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3},$$

che è repulsiva se le cariche sono dello stesso segno, attrattiva altrimenti. La costante  $\varepsilon_0$  è detta *costante dielettrica (nel vuoto)*. Questo campo di forze ha la stessa forma del campo gravitazionale: in particolare è conservativo e ammette il potenziale elettrostatico  $U(x) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x-x_0|}$ , il quale è una funzione armonica in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ .

**Esempio 2.1.4** Sia  $T$  un aperto semplicemente connesso in  $\mathbb{R}^3$ , delimitato da una superficie regolare  $\Sigma$ , in cui transita una corrente di fluido incompressibile (dunque di densità  $\rho(x, y, z)$  indipendente dal tempo), con velocità  $v(x, y, z)$  costante nel tempo. Supponiamo anche assenza di vortici: ciò significa che il campo vettoriale  $v$  è tale che l'integrale curvilineo  $\int_\gamma (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz)$  è nullo per ogni curva chiusa  $\gamma \subset T$ . Dal teorema di Stokes segue che l'integrale  $\int_S \langle \text{rot } v, n \rangle d\sigma$  è nullo per ogni superficie regolare  $S \subset T$ ; per l'arbitrarietà di  $S$  si ricava  $\text{rot } v = 0$  in  $T$ . Dunque la forma differenziale  $v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$  è chiusa e quindi, per l'ipotesi fatta su  $T$ , esatta. Pertanto esiste un potenziale di velocità  $\psi$ :

$$v(x, y, z) = \nabla\psi(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in T.$$

A causa dell'incompressibilità, la quantità di fluido che entra in una qualunque palla  $B \subseteq T$  è pari a quella che ne esce: dunque il flusso di  $v$  attraverso  $B$  è nullo, da cui, per il teorema della divergenza e per l'arbitrarietà di  $B$ , segue  $\text{div } v = 0$  in  $T$ ; quindi

$$\Delta\psi = \text{div } \nabla\psi = 0 \quad \text{in } T,$$

cioè il potenziale della velocità è una funzione armonica.

**Esempio 2.1.5** Sia  $u(x, y, z, t)$  la temperatura in un punto  $P = (x, y, z)$  dello spazio al tempo  $t$ . Se  $d\sigma$  è un elemento di superficie centrato in  $P$  e

con normale  $\nu$ , la quantità di calore  $Q$  che passa attraverso  $d\sigma$  nell'unità di tempo è, per la legge di Fourier,

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma,$$

ove  $k(x, y, z)$  è il coefficiente di diffusione termica. La legge di conservazione del calore in un corpo di volume  $V$  delimitato da una superficie regolare  $S$  è espressa dall'uguaglianza

$$\int_V c\rho[u(x, y, z, t)]_{t_1}^{t_2} dx dy dz = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V F(x, y, z, t) dx dy dz dt.$$

Il primo membro è la variazione della quantità di calore in  $V$  nel generico intervallo di tempo  $[t_1, t_2] \subset [0, \infty[$ , la quale è misurata dalla variazione di temperatura del corpo, moltiplicata per la sua densità  $\rho(x, y, z)$  e per la sua capacità termica  $c$ ; a secondo membro figurano il flusso di calore attraverso  $S$  nello stesso intervallo, più il contributo nello stesso tempo di sorgenti o pozzi di calore interni a  $V$ . Applicando il teorema della divergenza possiamo scrivere

$$\int_V c\rho[u(\cdot, t)]_{t_1}^{t_2} dx dy dz = \int_{t_1}^{t_2} \int_V (\operatorname{div}(k\nabla u) + F) dx dy dz dt.$$

Sostituendo al posto di  $V$  una palla di centro  $(x, y, z) \in V$  e raggio  $r$ , dividendo per il volume di  $B$  e passando al limite per  $r \rightarrow 0^+$  si ottiene

$$c\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{div}(k(x, y, z)\nabla u(x, y, z, t)) + F(x, y, z, t)) dt;$$

dividendo ancora per  $t_2 - t_1$  e passando al limite per  $t_2 \rightarrow t_1$  si deduce infine, scrivendo  $t$  in luogo di  $t_1$ , l'equazione della conduzione termica:

$$c\rho(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = \operatorname{div}(k(x, y, z)\nabla u(x, y, z, t)) + F(x, y, z, t)$$

in  $V \times [0, \infty[$ . Se poi supponiamo che il corpo sia omogeneo ( $\rho$  costante) e isotropo ( $k$  costante), e non contenga sorgenti né pozzi interni ( $F = 0$ ), allora l'equazione diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u \quad \text{in } V \times [0, \infty[, \quad (2.1)$$

ove  $\alpha = \frac{k}{c\rho}$  è il coefficiente di conduzione termica. Se, infine, il corpo è in equilibrio termico, allora  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  e la temperatura  $u$  è una funzione armonica in  $V$ .

La ragione per cui l'operatore di Laplace compare in relazione a fenomeni fisici di natura così diversa è legato al fatto che esso è, a meno di un fattore costante, l'unico operatore differenziale lineare omogeneo del secondo ordine che sia invariante rispetto alle rototraslazioni del sistema di coordinate. È dunque naturale che il Laplaciano intervenga in fenomeni in cui tale invarianza deve fisicamente sussistere.

Come sono fatte le funzioni armoniche? In una dimensione ( $n = 1$ ) l'equazione di Laplace diventa semplicemente  $u'' = 0$ , e quindi ha per soluzioni tutte e sole le funzioni affini  $u(x) = ax + b$ . Se  $n = 2$ , come sappiamo dalla proposizione 1.6.7, sono armoniche in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  tutte le funzioni che sono parte reale o immaginaria di funzioni olomorfe in  $\Omega$ .

In dimensione qualunque, un'importante famiglia di funzioni armoniche è quella delle armoniche *radiali*, ossia delle soluzioni dell'equazione di Laplace che dipendono da  $|x|$  (oppure da  $|x - \bar{x}|$ , essendo  $\bar{x}$  un punto fissato di  $\mathbb{R}^n$ ). Per determinarle, poniamo  $r = |x - \bar{x}|$ ; se  $u(x) = v(|x - \bar{x}|) = v(r)$  è armonica, risulta:

$$D_i u(x) = v'(r) \frac{x_i - \bar{x}_i}{r}, \quad D_i^2 u(x) = v''(r) \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{r^2} + \frac{v'(r)}{r} - v'(r) \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{r^3},$$

da cui

$$0 = \Delta u(x) = v''(r) + \frac{v'(r)}{r}(n-1).$$

Risolviamo questa equazione ordinaria: si ha

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = -\frac{n-1}{r} \implies \log v'(r) = -(n-1) \log r + c \implies v'(r) = \frac{K}{r^{n-1}},$$

e dunque

$$v(r) = \begin{cases} \frac{c}{r^{n-2}} + d & \text{se } n > 2 \\ c \log r + d & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Queste sono tutte e sole le funzioni armoniche che hanno simmetria sferica. In particolare il potenziale newtoniano e il potenziale elettrostatico sono funzioni armoniche in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{x}\}$ .

## 2.2 Il problema di Cauchy

Poiché l'equazione di Laplace non ha caratteristiche, se  $S$  è una superficie  $(n-1)$ -dimensionale analitica, e  $u_0, u_1$  sono dati analitici definiti su  $S$ , esiste unica la soluzione analitica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in un intorno di } S \\ u|_S = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = u_1. \end{cases}$$

Però in generale non vi è dipendenza continua dai dati, come mostra il seguente

**Esempio 2.2.1** Sia  $n = 2$  e poniamo  $S = \{(x, y) : y = 0\}$ . Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon} := u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 := u_1(x) \end{cases}$$

ha la soluzione

$$u(x, y) = \varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon} \cosh \frac{y}{\varepsilon},$$

che è l'unica analitica. Tuttavia, si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\|u_0\|_\infty + \|u_1\|_\infty) = 0$$

mentre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, y)\|_\infty \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |u(0, y)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cosh \frac{y}{\varepsilon} = +\infty \quad \forall y > 0,$$

cosicché non c'è dipendenza continua dai dati nella norma uniforme.

In effetti, l'equazione di Laplace descrive fenomeni stazionari, in cui non c'è una variabile privilegiata che funga da "tempo", cosa che accade invece, in maniera naturale, nei problemi di Cauchy. Saranno invece ben posti, sotto opportune condizioni, altri tipi di problemi ai limiti, quali il *problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

nel quale si prescrivono i valori che la funzione armonica deve assumere sulla frontiera di un aperto limitato  $\Omega$ , oppure il *problema di Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ove invece si prescrivono i valori della derivata di  $u$  rispetto alla direzione normale a  $\partial\Omega$ . Dimostreremo risultati di unicità, esistenza e dipendenza continua dai dati per il problema di Dirichlet e, parzialmente, anche per il problema di Neumann.

## 2.3 Principio del massimo

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$  a tratti, in modo che valgano le formule di Green: in particolare, se  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ , si ha

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma, \quad (2.2)$$

ove, al solito,  $\nu(x)$  è il versore normale esterno a  $\partial\Omega$  nel punto  $x \in \partial\Omega$ .

Un primo, facile risultato riguarda l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson:

**Proposizione 2.3.1** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$  a tratti; sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  soluzione del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

*Se  $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  è un'altra soluzione, allora  $v \equiv u$  in  $\overline{\Omega}$ .*

**Dimostrazione** Posto  $w = u - v$ , la funzione  $w$  è armonica in  $\Omega$  e nulla sulla frontiera. Integrando per parti ricaviamo

$$\int_{\Omega} |Dw|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} w d\sigma - \int_{\Omega} \Delta w w dx = 0,$$

da cui segue che  $w$  è costante in ogni componente connessa di  $\Omega$ : ma siccome  $w$  è nulla sulla frontiera,  $w$  è nulla in tutto  $\overline{\Omega}$ .  $\square$



**Osservazione 2.3.2** Con lo stesso metodo, e altrettanto facilmente, si prova che la soluzione del problema di Neumann per l'equazione di Poisson è unica a meno di costanti additive. Si noti però che tale soluzione può anche non esistere affatto: infatti, fissato un aperto limitato  $\Omega$  con frontiera di classe  $C^1$  a tratti, affinché il problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

abbia soluzione per due fissate funzioni  $f \in C(\overline{\Omega})$  e  $\psi \in C(\partial\Omega)$ , è necessario che  $f$  e  $\psi$  verifichino la condizione di compatibilità

$$\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \, d\sigma,$$

come si verifica subito applicando la formula di Green (2.2) alle funzioni  $u$  e  $v(x) \equiv -1$ .

**Proposizione 2.3.3 (principio del massimo debole)** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ ; sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  tale che  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ . Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Similmente, se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  è tale che  $\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$ , allora*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

**Dimostrazione** Sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , la funzione  $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$  è continua in  $\overline{\Omega}$ , quindi ha massimo in un punto  $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ . Vediamo dove sta questo punto. Se risulta  $\bar{x} \in \Omega$ , allora deve essere  $\nabla v(\bar{x}) = 0$  e  $D_i^2 v(\bar{x}) \leq 0$  per  $i = 1, \dots, n$ ; dunque  $\Delta v(\bar{x}) \leq 0$ . D'altronde

$$\Delta v(\bar{x}) = \Delta u(\bar{x}) + 2n\varepsilon > 0,$$

il che è assurdo. Quindi  $\bar{x} \in \partial\Omega$ , da cui, per ogni  $x \in \overline{\Omega}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$u(x) = v(x) - \varepsilon|x - x_0|^2 \leq v(\bar{x}) = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \cdot \text{diam}(\Omega)^2,$$

ossia, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Ciò prova la prima parte. La seconda segue applicando a  $-u$  la parte già dimostrata.  $\square$

**Osservazioni 2.3.4 (1)** Dal principio del massimo segue l'unicità per il problema di Dirichlet in una forma lievemente più forte: se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un aperto limitato, se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e se tali funzioni risolvono il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson con gli stessi dati  $f, \varphi$ , allora  $u \equiv v$  in  $\bar{\Omega}$ . Infatti la funzione  $w = u - v$  è armonica e nulla sulla frontiera, quindi è identicamente nulla per il principio del massimo:

$$\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0, \quad \min_{\bar{\Omega}} w = \min_{\partial\Omega} w = 0.$$

**(2)** La proposizione 2.3.3 si chiama principio del massimo "debole" perché non si esclude che la funzione  $u$  assuma il suo massimo anche in punti interni a  $\Omega$ , senza essere costante; vedremo tuttavia più avanti un enunciato più forte (corollario 2.6.6) che elimina questa eventualità. Si noti che il principio del massimo è falso quando  $\Omega$  è un aperto illimitato: ad esempio, la funzione

$$u(x) = \begin{cases} \log |x| & \text{se } n = 2 \\ 1 - |x|^{2-n} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

è armonica nell'aperto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$  ed è nulla sul bordo di  $\Omega$ , e tuttavia essa è strettamente positiva in  $\Omega$ .

**Proposizione 2.3.5 (maggiorazione a priori)** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , allora*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + \frac{\text{diam}(\Omega)^2}{2n} \sup_{\Omega} |\Delta u| \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

**Dimostrazione** Se  $\sup_{\Omega} |\Delta u| = +\infty$ , non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, fissato  $x_0 \in \partial\Omega$ , consideriamo le funzioni

$$v_{\pm}(x) = \max_{\partial\Omega} |u| + \frac{\text{diam}(\Omega)^2 - |x - x_0|^2}{2n} \sup_{\Omega} |\Delta u| \pm u(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

e notiamo che si ha

$$\Delta v_{\pm}(x) = -\sup_{\Omega} |\Delta u| \pm \Delta u(x) \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$v_{\pm}(x) \geq \max_{\partial\Omega} |u| \pm u(x) \geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Per il principio del massimo debole, deve essere  $v_{\pm}(x) \geq 0$  in  $\overline{\Omega}$ , cioè la tesi.  $\square$

Come immediata conseguenza della maggiorazione a priori si ottiene la dipendenza continua dai dati per il problema di Dirichlet su un aperto limitato  $\Omega$ : infatti se  $u$  risolve il problema (2.3), e se

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C(\partial\Omega)} \leq \varepsilon,$$

allora dalla proposizione 2.3.5 segue

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{\text{diam}(\Omega)^2}{2n} \right).$$

## 2.4 Formule di rappresentazione

Il nostro prossimo obiettivo è quello di trovare una formula di rappresentazione per la soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson in funzione dei dati, supponendo che la soluzione esista. Una volta ottenuta tale formula, cercheremo di dimostrare che essa in effetti risolve il problema. Ci occorre anzitutto una definizione.

**Definizione 2.4.1** *La soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace è la funzione*

$$K(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|\xi|} & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n |\xi|^{n-2}} & \text{se } n > 2, \end{cases}$$

ove  $\omega_n$  è la misura  $(n-1)$ -dimensionale della frontiera della palla unitaria di  $\mathbb{R}^n$ :

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = H^{n-1}(S^{n-1}).$$

Osserviamo che, ovviamente,  $K(-\xi) = K(\xi)$ , e che  $\xi \mapsto K(\xi)$  è armonica in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Fisicamente, la quantità  $K(\xi)$  (nel caso  $n = 3$ ) rappresenta il potenziale elettrostatico generato da una carica unitaria posta nell'origine. Dalla formula di Green (2.2) segue una prima, ancora incompleta, formula di rappresentazione:

**Teorema 2.4.2** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$  a tratti. Se  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , si ha per ogni fissato  $x \in \Omega$*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[ K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial K}{\partial \nu_y}(x-y) \right] d\sigma(y) - \int_{\Omega} K(x-y) \Delta u(y) dy.$$

Si noti che la formula ha senso: il primo integrale non presenta singolarità, in quanto  $x$  appartiene a  $\Omega$  mentre la variabile di integrazione  $y$  sta sulla frontiera; d'altra parte nel secondo integrale la funzione  $y \mapsto K(x-y)$ , avendo una singolarità logaritmica (per  $n = 2$ ) oppure del tipo  $|x-y|^{2-n}$  (per  $n > 2$ ), è certamente sommabile su  $\Omega$ .

**Dimostrazione** Sia  $x \in \Omega$  e sia  $\rho > 0$  tale che la palla  $B(x, \rho)$  di centro  $x$  e raggio  $\rho$  abbia chiusura contenuta in  $\Omega$ ; il parametro  $\rho$  è destinato a tendere a 0. Applichiamo la formula di Green (2.2) alle funzioni  $u$  e  $y \mapsto K(x-y)$  nell'aperto  $\Omega \setminus \overline{B(x, \rho)}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{B(x, \rho)}} K(x-y) \Delta u(y) dy &= \\ &= \left( \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B(x, \rho)} \right) \left[ K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} K(x-y) \right] d\sigma(y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Analizziamo i due integrali su  $\partial B(x, \rho)$ : si ha

$$\int_{\partial B(x, \rho)} K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\rho} \int_{\partial B(x, \rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n \rho^{n-2}} \int_{\partial B(x, \rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) & \text{se } n > 2, \end{cases}$$

cosicch 

$$\left| \int_{\partial B(x, \rho)} K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) \right| \leq \begin{cases} \rho \log \frac{1}{\rho} \sup_{\partial B(x, \rho)} |\nabla u| & \text{se } n = 2 \\ \frac{\rho}{n-2} \sup_{\partial B(x, \rho)} |\nabla u| & \text{se } n > 2, \end{cases}$$

e dunque

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \rho)} K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) = 0.$$

Osserviamo adesso che il gradiente della funzione  $K(x-y)$  è dato, sia per  $n = 2$  che per  $n > 2$ , da

$$\nabla_x K(x-y) = -\nabla_y K(x-y) = -\frac{x-y}{\omega_n |x-y|^n} \quad \forall y \neq x, \quad (2.6)$$

e che inoltre per ogni  $y \in \partial B(x, \rho)$  la normale esterna a  $\partial(\Omega \setminus \overline{B(x, \rho)})$  punta verso l'interno di  $B(x, \rho)$ , ed è quindi data da  $\nu(y) = \frac{x-y}{\rho}$ . È allora facile verificare che per ogni  $y \in \partial B(x, \rho)$  si ha, per  $n \geq 2$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} K(x-y) = \left\langle \nabla_y K(x-y), \frac{x-y}{\rho} \right\rangle = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} = \frac{1}{H^{n-1}(\partial B(x, \rho))}. \quad (2.7)$$

Se ne deduce, per continuità, che

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ - \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} K(x-y) d\sigma(y) \right] &= \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ - \frac{1}{H^{n-1}(\partial B(x, \rho))} \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) d\sigma(y) \right] = -u(x). \end{aligned}$$

Infine, osservando che, in virtù della sommabilità di  $y \mapsto K(x-y)$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \setminus \overline{B(x, \rho)}} K(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega} K(x-y) \Delta u(y) dy,$$

da (2.5) si ottiene la tesi per  $\rho \rightarrow 0^+$ .  $\square$

Sia ora  $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  una funzione armonica in  $\Omega$ : allora la formula di Green (2.2) ci dice che per ogni  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  si ha

$$0 = \int_{\partial \Omega} \left[ h \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial h}{\partial \nu} \right] d\sigma - \int_{\Omega} h \Delta u dy;$$

dunque, sommando questa relazione con quella fornita dal teorema 2.4.2 e definendo  $G(x, y) = K(x-y) + h(y)$ , si ricava per ogni  $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\partial \Omega} \left[ G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) \right] d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy.$$

Se si avesse anche  $G(x, y) = 0$  per ogni  $y \in \partial\Omega$ , potremmo scrivere

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy, \quad (2.8)$$

e questa sarebbe una vera e propria formula di rappresentazione per l'eventuale soluzione del problema di Dirichlet, poiché, noti i valori di  $u$  su  $\partial\Omega$  e di  $\Delta u$  in  $\Omega$ , sarebbe nota la  $u$  su tutto  $\Omega$ .

Siamo così ricondotti alla seguente

**Definizione 2.4.3** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione di Green (di prima specie) per il Laplaciano in  $\Omega$  è una funzione  $G(x, y)$  continua, definita per  $x, y \in \bar{\Omega}$ ,  $x \neq y$ , con le seguenti proprietà:*

- (i) *per ogni  $x \in \Omega$ , la funzione  $h_x(y) := G(x, y) - K(x - y)$  è armonica in  $\Omega$  (e non solamente in  $\Omega \setminus \{x\}$ );*
- (ii)  *$G(x, y) = 0$  per ogni  $y \in \partial\Omega$  e per ogni  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{y\}$ .*

**Osservazione 2.4.4** Non è affatto detto che una funzione di Green esista: tuttavia, se essa esiste, allora è unica, almeno quando l'aperto  $\Omega$  è limitato. In tal caso, infatti, se ve ne fossero due,  $G(x, y) = K(x - y) + h_x(y)$  e  $G_0(x, y) = K(x - y) + h_{0x}(y)$ , allora per ogni  $x \in \Omega$  la funzione  $G(x, y) - G_0(x, y) = h_x(y) - h_{0x}(y)$  sarebbe prolungabile con continuità ad una funzione armonica in  $\Omega$  e nulla sulla frontiera: quindi, per il principio del massimo,  $h_x - h_{0x}$  sarebbe nulla in  $\Omega$ , ossia  $G \equiv G_0$ .

La funzione di Green, se esiste, gode di varie proprietà; l'enunciato che segue ne segnala due, utili per il seguito:

**Proposizione 2.4.5** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  tale che esista la funzione di Green  $G$  per il Laplaciano. Allora:*

- (i)  *$G(x, y) = G(y, x)$  per ogni  $x, y \in \bar{\Omega}$ ,  $x \neq y$ ;*
- (ii)  *$G(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in \bar{\Omega}$ ,  $x \neq y$ .*

**Dimostrazione (i)** Siano  $x, y \in \Omega$  con  $x \neq y$ . Posto  $v(z) = G(x, z)$  e  $w(z) = G(y, z)$ , si ha  $\Delta v(z) = 0$  per ogni  $z \in \Omega \setminus \{x\}$ ,  $\Delta w(z) = 0$  per ogni

$z \in \Omega \setminus \{y\}$ , e  $v = w = 0$  su  $\partial\Omega$ . Applicando alle funzioni  $v, w$  la formula di Green nell'aperto  $\Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)} \cup B(y, \varepsilon)$ , si trova

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left[ \frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v \right] d\sigma = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left[ \frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w \right] d\sigma. \quad (2.9)$$

Poiché  $w$  è regolare intorno al punto  $x$ , mentre  $v$  si comporta (per  $n > 2$ ) come  $\varepsilon^{2-n}$  su  $\partial B(x, \varepsilon)$ , si ha

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v d\sigma \right| \leq c \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x, \varepsilon)} |v| = o(1) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+;$$

d'altronde, essendo  $v(z) = K(x - z) + h_x(z)$ , con  $h_x$  armonica e quindi regolare in  $\Omega$ , si ha anche, utilizzando (2.7),

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w d\sigma &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu_z} K(x - z) w(z) d\sigma(z) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial h_x}{\partial \nu} w d\sigma = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{H^{n-1}(\partial B(x, \varepsilon))} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} w d\sigma + 0 = w(x). \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si prova che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w d\sigma = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v d\sigma = v(y).$$

Quindi, al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la (2.9) si riduce a  $w(x) = v(y)$ , ossia  $G(y, x) = G(x, y)$ . Per continuità, la tesi vale per ogni  $x, y \in \overline{\Omega}$  con  $x \neq y$ .

(ii) Sia  $x \in \Omega$  e sia  $\delta > 0$  tale che  $\overline{B(x, \delta)} \subset \Omega$ . La funzione  $y \mapsto G(x, y)$  è armonica in  $\Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$  per ogni  $\varepsilon < \delta$  e verifica (per  $n > 2$ )

$$G(x, y) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad G(x, y) \geq \frac{1}{(n-2)\omega_n \varepsilon^{n-2}} - M \quad \text{su } \partial B(x, \varepsilon),$$

essendo  $M$  il massimo su  $\overline{B(x, \delta)}$  del modulo della funzione  $y \mapsto G(x, y) - K(x - y)$  la quale, per definizione di funzione di Green, è armonica in  $\Omega$  e dunque continua su  $\overline{B(x, \delta)}$ . Dunque  $G(x, y) \geq 0$  per ogni  $y \in \partial(\Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)})$ , se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo. Dal principio del massimo segue  $G(x, y) \geq 0$

per ogni  $y \in \overline{\Omega} \setminus B(x, \varepsilon)$ . Ne segue, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,  $G(x, y) \geq 0$  per ogni  $y \in \overline{\Omega} \setminus \{x\}$ . Per continuità, la tesi vale per ogni  $x, y \in \overline{\Omega}$  con  $x \neq y$ . Nel caso  $n = 2$  le argomentazioni sono esattamente le stesse.  $\square$

Se esiste la funzione di Green per  $\Omega$  possiamo concludere con il seguente

**Corollario 2.4.6** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  con frontiera di classe  $C^1$  a tratti. Se esiste la funzione di Green  $G(x, y)$  per il Laplaciano in  $\Omega$ , e se  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  è soluzione del problema di Dirichlet (2.3), allora vale la formula di rappresentazione*

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y) \varphi(y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in \Omega. \quad \square \quad (2.10)$$

Naturalmente il corollario 2.4.6 non è un teorema di esistenza. Però è un buon inizio: se sappiamo costruire la funzione di Green, la (2.10) è una candidata soluzione e si può cercare di provare che essa è soluzione per davvero; questo è ciò che faremo nel caso in cui  $\Omega$  è una palla, poiché in tal caso la funzione di Green si sa scrivere esplicitamente.

**Osservazione 2.4.7** In effetti è possibile costruire la funzione di Green per ogni aperto di  $\mathbb{R}^n$  quando  $n > 2$ , e per una vastissima classe di aperti quando  $n = 2$ ; si veda [4] per approfondimenti.

**Osservazione 2.4.8** In modo analogo si può rappresentare la soluzione del problema di Neumann per l'equazione di Poisson:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \psi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

Si cerca una *funzione di Green di seconda specie*  $N(x, y)$ , ossia una funzione tale che  $N(x, y) = K(x - y) + k_x(y)$ , con  $k_x$  funzione di classe  $C^2$  armonica in  $\Omega$ , e  $\frac{\partial N}{\partial\nu_y}(x, y) = -c$  per ogni  $y \in \partial\Omega$ , con  $c$  costante opportuna. Tale funzione, come è facile verificare, è unica a meno di una costante additiva. Si trova allora, in analogia con la (2.8),

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[ N(x, y) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) + c u(y) \right] d\sigma(y) - \int_{\Omega} N(x, y) \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega.$$



Applicando questa formula alla funzione  $u \equiv 1$ , che sicuramente risolve il problema di Neumann (2.11) con dati  $f$  e  $\psi$  nulli, si trova  $1 = cH^{n-1}(\partial\Omega)$ , da cui segue che l'unico valore possibile è  $c = [H^{n-1}(\partial\Omega)]^{-1}$ . Con questa scelta di  $c$  si deduce la formula di rappresentazione per le eventuali soluzioni del problema di Neumann (2.11):

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} N(x, y) \psi(y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} N(x, y) f(y) dy + \\ + \frac{1}{H^{n-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u(y) d\sigma(y) \quad \forall x \in \Omega.$$

Si noti che, come è giusto, questa formula individua la funzione  $u$  a meno di una costante additiva.

## 2.5 La funzione di Green per la sfera

La funzione di Green per un aperto  $\Omega$  si può interpretare fisicamente come il potenziale elettrostatico generato, all'interno di una superficie chiusa conduttrice  $\partial\Omega$  posta a potenziale zero (a terra), da una carica unitaria, situata in un punto  $x \in \Omega$ .

Per costruire la funzione  $G$  nel caso in cui  $\Omega$  è la palla  $S = B(0, R)$  adoperiamo il *metodo di riflessione*, che trae origine proprio dall'interpretazione elettrostatica sopra delineata. Se  $x \in S$  e  $x \neq 0$ , poniamo  $x^* = \frac{xR^2}{|x|^2}$ , cosicché  $|x| \cdot |x^*| = R^2$ ; cerchiamo una funzione di Green della forma

$$G(x, y) = K(x - y) - \alpha K(x^* - y),$$

ove  $\alpha$  è una costante da fissare. Notiamo che la funzione  $y \mapsto -\alpha K(x^* - y)$  è armonica su  $S$ , poiché  $x^*$  è al di fuori di  $S$ . Il numero  $\alpha$  rappresenta una carica incognita da collocare in  $x^*$ , in modo da ottenere un campo elettrostatico che, sommato a quello indotto dalla carica posta in  $x$  e descritto dalla soluzione fondamentale  $K(x - y)$ , generi un potenziale che sia nullo sulla superficie  $\partial S$ . Per determinare  $\alpha$ , osserviamo anzitutto che per ogni  $y \in \partial S$  vale la proprietà seguente: nel piano generato dai punti  $0, x, y$  i due triangoli di vertici  $0, x, y$  e  $0, y, x^*$  sono simili. Infatti essi hanno in comune l'angolo  $x0y$  e i lati a due a due proporzionali, in quanto

$$\frac{0y}{0x} = \frac{R}{|x|} = \frac{|x^*|}{R} = \frac{0x^*}{0y}.$$

Per la terza coppia di lati si ha dunque

$$\frac{R}{|x^* - y|} = \frac{0y}{x^*y} = \frac{0x}{xy} = \frac{|x|}{|x - y|},$$

ovvero

$$|x^* - y| = |x - y| \frac{R}{|x|} \quad \forall y \in \partial S. \quad (2.12)$$

Ciò premesso, nel caso  $n > 2$ , affinché  $G(x, \cdot)$  sia nulla su  $\partial S$  basta scegliere  $\alpha = (R/|x|)^{n-2}$ , perché in questo caso si ha, in virtù di (2.12),

$$\begin{aligned} G(x, y) &= K(x - y) - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} K(x^* - y) = \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left[ \frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}|x^* - y|^{n-2}} \right] = \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left[ \frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \right] = 0 \quad \forall y \in \partial S. \end{aligned}$$

Se  $n = 2$ , si verifica direttamente che la funzione di Green per la palla  $S = B(0, R)$  è data da

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{|x||x^* - y|}.$$

In definitiva, la funzione di Green per la sfera  $S = B(0, R)$  in qualunque dimensione  $n \geq 2$  è

$$G(x, y) = K(x - y) - K\left(\frac{|x|}{R}(x^* - y)\right), \quad \text{ove } x^* = \frac{xR^2}{|x|^2}. \quad (2.13)$$

Si osservi che dalla proposizione 2.4.5 segue che per  $x = 0$ , nel qual caso  $x^*$  non è definito, la  $G$  è data da

$$G(0, y) = G(y, 0) = K(y) - K\left(\frac{|y|}{R}y^*\right) = K(y) - K\left(R\frac{y}{|y|}\right).$$

Vediamo ora come si usa la funzione di Green per risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson sulla sfera.

**Teorema 2.5.1** Sia  $S$  la palla  $B(0, R)$  e siano  $f \in C^1(\bar{S})$  e  $\varphi \in C(\partial S)$ . Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } S \\ u = \varphi & \text{su } \partial S \end{cases}$$

ha come unica soluzione la funzione

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y) - \int_S G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in S, \quad (2.14)$$

ove  $G$  è la funzione di Green per la sfera  $B(0, R)$ , ossia la funzione (2.13).

**Dimostrazione** Dal corollario 2.4.6 sappiamo che la soluzione, se esiste, è data dalla (2.10), ossia

$$u(x) = - \int_{\partial S} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) \varphi(y) d\sigma(y) - \int_S G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in \Omega,$$

con  $G$  data da (2.13). Calcoliamo la derivata normale di questa funzione nei punti  $y \in \partial S$ . Nel caso  $n > 2$ , per  $x \in S$  fissato si ha, ricordando (2.6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) &= \langle \nabla_y G(x, y), \nu(y) \rangle = \\ &= \left\langle \nabla_y K(x - y) - \nabla_y K\left(\frac{|x|}{R}(x^* - y)\right), \frac{y}{R} \right\rangle = \\ &= \frac{\langle x - y, y \rangle}{R\omega_n |x - y|^n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{\langle x^* - y, y \rangle}{R\omega_n |x^* - y|^n} = \\ &= \frac{1}{R\omega_n |x - y|^n} \left[ \langle x - y, y \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \left\langle \frac{R^2 x}{|x|^2} - y, y \right\rangle \right] = \\ &= \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_n |x - y|^n}. \end{aligned}$$

Alla stessa formula si perviene nel caso  $n = 2$ . Si conclude allora che la candidata soluzione è proprio la funzione (2.14), che è formata da due addendi che denominiamo  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$ .

Proviamo che il primo addendo

$$u_1(x) := \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y)$$

verifica

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{in } S \\ u_1 = \varphi & \text{su } \partial S. \end{cases} \quad (2.15)$$

Poiché  $x \in S$ , mentre l'integrale è fatto su  $\partial S$ , si può derivare sotto il segno di integrale e si ricava che la funzione  $u_1$  è di classe  $C^\infty$ . Inoltre è facile, benché laborioso, verificare che per ogni  $y \in \partial S$  si ha

$$\Delta \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} = 0 \quad \forall x \in S.$$

Pertanto la funzione  $u_1$  è armonica in  $S$ .

Adesso notiamo che il corollario 2.4.6, applicato alla costante  $v(x) \equiv 1$  che certamente risolve il problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } S \\ v = 1 & \text{su } \partial S, \end{cases}$$

ci dà l'identità

$$1 = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial S} \frac{1}{|x - y|^n} d\sigma(y) \quad \forall x \in S.$$

Ciò premesso, sia  $\bar{x}$  un punto di  $\partial S$ . Possiamo scrivere

$$u_1(x) - \varphi(\bar{x}) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\varphi(y) - \varphi(\bar{x})}{|x - y|^n} d\sigma(y).$$

Per la continuità di  $\varphi$ , dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|\varphi(y) - \varphi(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall y \in I_\delta,$$

ove  $I_\delta = \{y \in \partial S : |y - \bar{x}| < \delta\}$ . Ne segue, per  $|x - \bar{x}| < \frac{\delta}{2}$ ,

$$\begin{aligned} |u_1(x) - \varphi(\bar{x})| &\leq \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \left[ \int_{I_\delta} \frac{\varepsilon}{|x - y|^n} d\sigma(y) + \int_{\partial S \setminus I_\delta} \frac{|\varphi(y) - \varphi(\bar{x})|}{|x - y|^n} d\sigma(y) \right] \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \left( \frac{2}{\delta} \right)^n \cdot 2\|\varphi\|_{C(\partial S)} \cdot \omega_n R^{n-1}; \end{aligned}$$

poiché per  $x \rightarrow \bar{x}$  si ha  $|x| \rightarrow R$ , otteniamo

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} |u_1(x) - \varphi(\bar{x})| \leq \varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si ottiene  $u_1 = \varphi$  su  $\partial S$ . Ciò prova (2.15). Dimostriamo adesso che il secondo addendo di (2.14), vale a dire

$$u_2(x) := - \int_S G(x, y) f(y) dy,$$

appartiene a  $C^2(S) \cap C(\bar{S})$  e verifica

$$\begin{cases} \Delta u_2 = f & \text{in } S \\ u_2 = 0 & \text{su } \partial S. \end{cases} \quad (2.16)$$

Mostriamo anzitutto che  $u_2$  appartiene a  $C(\bar{S})$  e che è nulla su  $\partial S$ . Per la simmetria della funzione di Green, se  $\bar{x} \in \partial S$  si ha  $G(\bar{x}, y) = 0$ , da cui  $u_2(\bar{x}) = 0$ . Inoltre, per  $x \in S$ ,  $x \rightarrow \bar{x}$ , possiamo scrivere

$$u_2(x) = - \int_S [G(x, y) - G(\bar{x}, y)] f(y) dy.$$

L'integrando è infinitesimo per  $x \rightarrow \bar{x}$ , ma non è dominato da alcuna funzione sommabile indipendente dal parametro  $x$ : infatti esso è singolare proprio per  $y = x$ . Ricorriamo allora al seguente corollario del teorema di Lebesgue:

**Lemma 2.5.2** *Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni integrabili sullo spazio misurato  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ . Supponiamo che:*

- (i)  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  q.o. in  $X$  per  $k \rightarrow \infty$ ;
- (ii)  $|f_k(x)| \leq g_k(x)$  q.o. in  $X$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (iii)  $g_k(x) \rightarrow g(x)$  q.o. in  $X$  per  $k \rightarrow \infty$ ;
- (iv)  $g_k$  e  $g$  siano sommabili su  $X$  e  $\int_X g_k d\mu \rightarrow \int_X g d\mu$  per  $k \rightarrow \infty$ .

Allora

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Dimostrazione** Basta applicare il lemma di Fatou alle due successioni di funzioni non negative  $\{g_k + f_k\}$  e  $\{g_k - f_k\}$ , e sfruttare la sommabilità di  $g$ .

□

Applichiamo il lemma 2.5.2 nel modo seguente: per ogni successione  $\{x_k\} \subset S$  convergente a  $\bar{x}$ , si ha

$$|[G(x_k, y) - G(x_0, y)]f(y)| \leq C[|x_k - y|^{2-n} + |\bar{x} - y|^{2-n}] =: g_k(y),$$

e inoltre risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(y) = 2C|\bar{x} - y|^{2-n} \quad \text{per quasi ogni } y \in S,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S g_k(y) dy = 2C \int_S |\bar{x} - y|^{2-n} dy;$$

quindi il lemma 2.5.2 ci dice che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S [G(x_k, y) - G(\bar{x}, y)]f(y) dy = 0,$$

e dall'arbitrarietà della successione  $\{x_k\}$  si ricava

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} u_2(x) = - \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \int_S [G(x, y) - G(\bar{x}, y)]f(y) dy = 0 \quad \forall \bar{x} \in \partial S,$$

cosicché  $u_2$  è continua in  $\bar{S}$ .

Proviamo ora l'armonicità di  $u_2$  in  $S$ . Sia  $x_0 \in S$  e sia  $r > 0$  tale che  $\overline{B(x_0, r)} \subset S$ . Decomponiamo la funzione  $u_2$  come segue:

$$u_2(x) = - \int_{B(x_0, r)} f(y)G(y, x) dy - \int_{S \setminus B(x_0, r)} f(y)G(y, x) dy =: v_1^r(x) + v_2^r(x),$$

ove abbiamo usato la simmetria della funzione di Green (proposizione 2.4.5). Poiché, per  $y \notin B(x_0, r)$ ,  $x \mapsto G(y, x)$  è armonica in  $S \setminus \{y\}$  e quindi in  $B(x_0, r)$ , si può derivare sotto il segno di integrale ottenendo

$$\Delta v_2^r(x) = - \int_{S \setminus B(x_0, r)} f(y)\Delta G(y, x) dy = 0 \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

ed in particolare

$$\Delta v_2^r(x_0) = 0. \tag{2.17}$$

Per quanto riguarda  $v_1^r(x)$ , scrivendo esplicitamente la funzione di Green secondo la (2.13), ma a variabili scambiate, otteniamo

$$\begin{aligned} v_1^r(x) &= - \int_{B(x_0, r)} f(y) G(y, x) dy = \\ &= - \int_{B(x_0, r)} f(y) K(y - x) dy - \int_{B(x_0, r)} f(y) K\left(\frac{|y|}{R}(y^* - x)\right) dy =: \\ &=: v_{10}^r(x) + v_{11}^r(x). \end{aligned}$$

Dato che la funzione  $x \mapsto K\left(\frac{|y|}{R}(y^* - x)\right)$  è singolare nel punto  $y^*$  che è fuori dalla palla  $S$  per ogni  $y \in B(x_0, r)$ , possiamo derivare  $v_{11}^r(x)$  sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\Delta v_{11}^r(x) = - \int_{B(x_0, r)} f(y) \Delta K\left(\frac{|y|}{R}(y^* - x)\right) dy = 0 \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

ed in particolare

$$\Delta v_{11}^r(x_0) = 0. \quad (2.18)$$

Resta da calcolare il Laplaciano di  $v_{10}^r(x)$ . Dobbiamo anzitutto determinare le derivate parziali  $D_i v_{10}^r$  per  $i = 1, \dots, n$ . A questo scopo proviamo il seguente

**Lemma 2.5.3** *Per ogni  $g \in C(\overline{B(x_0, r)})$  risulta*

$$D_i \int_{B(x_0, r)} g(y) K(x - y) dy = \int_{B(x_0, r)} g(y) D_{x_i} K(x - y) dy \quad \forall x \in B(x_0, r).$$

**Dimostrazione** Fissato  $x \in B(x_0, r)$ , scriviamo il rapporto incrementale nella  $i$ -sima direzione:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_{B(x_0, r)} g(y) [K(x + he^i - y) - K(x - y)] dy = \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n h} \int_{B(x_0, r)} g(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{1}{|x + hte^i - y|^{n-2}} dt dy = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{B(x_0, r)} g(y) \int_0^1 \frac{x_i + ht - y_i}{|x + the^i - y|^n} dt dy. \end{aligned}$$

Scambiando l'ordine di integrazione, il che è lecito perché l'integrando, per  $h$  fissato, è certamente sommabile in  $[0, 1] \times B(x_0, r)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{B(x_0, r)} g(y) [K(x + he^i - y) - K(x - y)] dy = \\ & = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} g(y) \frac{x_i + ht - y_i}{|x + the^i - y|^n} dy dt. \end{aligned}$$

Dobbiamo passare al limite per  $h \rightarrow 0$  sotto il segno di integrale. Fissiamo  $\delta > 0$  tale che  $B(x, 2\delta) \subseteq B(x_0, r)$ , e scegliamo  $h$  tale che  $|h| < \delta$ : allora per ogni  $t \in [0, 1]$  si ha  $B(x + the^i, \delta) \subset B(x_0, r)$ . Vogliamo provare che per la funzione

$$G_h(t, y) = -\frac{1}{\omega_n} g(y) \frac{x_i + ht - y_i}{|x + the^i - y|^n} \quad (2.19)$$

valgono i fatti seguenti, dai quali segue subito la tesi del lemma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} G_h(t, y) = -\frac{1}{\omega_n} g(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \quad \text{q.o. in } [0, 1] \times B(x_0, r), \quad (2.20)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} G_h(t, y) dy dt = - \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} \frac{1}{\omega_n} g(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} dy dt. \quad (2.21)$$

La relazione (2.20) è ovvia; la (2.21) invece non è affatto banale. Per dimostrarla, ancora una volta non possiamo fare uso del teorema di convergenza dominata di Lebesgue, poiché l'integrando  $G_h(t, y)$  ha una singolarità nel punto  $x + the^i$ , che si muove durante il passaggio al limite. Applicheremo allora il lemma 2.5.2 ad un'arbitraria successione infinitesima  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Per le corrispondenti funzioni  $G_{h_k}(t, y)$  definite in (2.19) si ha allora, per quasi ogni  $(t, y) \in [0, 1] \times B(x_0, r)$ :

$$|G_{h_k}(t, y)| \leq \frac{1}{\omega_n} \|g\|_{C(\overline{B(x_0, r)})} \frac{1}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} =: \varphi_k(t, y) \quad (2.22)$$

$$\varphi_k(t, y) \rightarrow \frac{1}{\omega_n} \|g\|_{C(\overline{B(x_0, r)})} \frac{1}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} =: \varphi(t, y); \quad (2.23)$$



inoltre, utilizzando le coordinate polari,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{B(x_0, r)} \varphi_k(t, y) dy dt &= \frac{\|g\|_{C(\overline{B(x_0, r)})}}{\omega_n} \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} \frac{dy dt}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} = \\
&= \frac{\|g\|_{C(\overline{B(x_0, r)})}}{\omega_n} \left[ \int_0^1 \int_{B(x_0, r) \setminus B(x + th_k e^i, \delta)} \frac{dy dt}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \int_{B(x + th_k e^i, \delta)} \frac{dy dt}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} \right] = \\
&= \frac{\|g\|_{C(\overline{B(x_0, r)})}}{\omega_n} \left[ \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} (1 - \chi_{B(x + th_k e^i, \delta)}(y)) \frac{dy dt}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_n \int_0^1 \int_0^\delta \frac{1}{\rho^{n-1}} \rho^{n-1} d\rho dt \right].
\end{aligned}$$

Nel primo integrale si ha  $|x + th_k e^i - y|^{1-n} \leq \delta^{1-n}$  e quindi, per convergenza dominata,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_{B(x_0, r) \setminus B(x + th_k e^i, \delta)} \frac{dy dt}{|x + th_k e^i - y|^{n-1}} = \int_0^1 \int_{B(x_0, r) \setminus B(x, \delta)} \frac{dy dt}{|x - y|^{n-1}}.$$

Il secondo integrale diventa

$$\omega_n \int_0^1 \int_0^\delta \frac{1}{\rho^{n-1}} \rho^{n-1} d\rho dt = \int_0^1 \int_{B(x, \delta)} \frac{dy dt}{|x - y|^{n-1}}.$$

Dunque, sommando,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} \varphi_k(t, y) dy dt = \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} \varphi(t, y) dy dt. \quad (2.24)$$

Da (2.22), (2.23 e (2.24), grazie al lemma 2.5.2 segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} G_{h_k}(t, y) dy dt = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^1 \int_{B(x_0, r)} g(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} dy dt,$$

e per l'arbitrarietà della successione  $\{h_k\}$  si ricava la (2.21). Ciò, come già osservato, prova il lemma 2.5.3.  $\square$

Torniamo alle derivate parziali prime di  $v_{10}^r(x)$ . Si ha anzitutto, usando il

lemma 2.5.3 e integrando per parti (ed è qui che iniziamo ad usare l'ipotesi  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ),

$$\begin{aligned} D_i v_{10}^r(x) &= - \int_{B(x_0, r)} f(y) D_{x_i} K(y-x) dy = \int_{B(x_0, r)} f(y) D_{y_i} K(y-x) dy = \\ &= \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) K(y-x) \nu_i(y) d\sigma(y) - \int_{B(x_0, r)} D_i f(y) K(y-x) dy. \end{aligned}$$

Applicando ancora il lemma 2.5.3, similmente si ottiene, per  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} D_i^2 v_{10}^r(x) &= \\ &= \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) D_{x_i} K(y-x) \nu_i(y) d\sigma(y) - \int_{B(x_0, r)} D_i f(y) D_{x_i} K(y-x) dy = \\ &= - \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) D_{y_i} K(y-x) \nu_i(y) d\sigma(y) + \int_{B(x_0, r)} D_i f(y) D_{y_i} K(y-x) dy, \end{aligned}$$

e di conseguenza troviamo, per ogni  $x \in B(x_0, r)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta v_{10}^r(x) &= \\ &= - \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} K(y-x) d\sigma(y) + \int_{B(x_0, r)} \langle \nabla f(y), \nabla_y K(y-x) \rangle dy; \end{aligned}$$

in particolare, da (2.7) segue

$$\begin{aligned} \Delta v_{10}^r(x_0) &= \\ &= - \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu} K(y-x_0) d\sigma(y) + \int_{B(x_0, r)} \langle \nabla f(y), \nabla_y K(y-x_0) \rangle dy = \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) d\sigma(y) + \frac{1}{\omega_n} \int_{B(x_0, r)} \left\langle \nabla f(y), \frac{y-x_0}{|y-x_0|^n} \right\rangle dy. \end{aligned}$$

Dunque, da (2.17) e (2.18) segue che

$$\Delta u_2(x_0) = \Delta(v_{10}^r + v_{11}^r + v_2^r)(x_0) = \Delta v_{10}^r(x_0),$$

e poiché il primo membro non dipende da  $r$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \Delta u_2(x_0) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \Delta v_{10}^r(x_0) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) d\sigma(y) + \frac{1}{\omega_n} \int_{B(x_0, r)} \left\langle \nabla f(y), \frac{y-x_0}{|y-x_0|^n} \right\rangle dy \right] = \\ &= f(x_0) + 0 = f(x_0). \end{aligned}$$

Poiché  $x_0$  è un punto arbitrario di  $S$ , la (2.16) è provata. Ciò conclude la dimostrazione del teorema 2.5.1.  $\square$

Terminiamo il paragrafo con un corollario assai utile per il seguito.

**Corollario 2.5.4** *Se  $u$  è una funzione armonica in una palla  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$  e continua sulla chiusura  $\overline{B(x, r)}$ , allora*

$$u(z) = \frac{r^2 - |z - x|^2}{r\omega_n} \int_{\partial B(x, r)} \frac{u(\eta)}{|\eta - z|^n} d\sigma(\eta) \quad \forall z \in B(x, r).$$

**Dimostrazione** La funzione

$$v(\xi) = u(x + \xi), \quad \xi \in B(0, r),$$

è armonica nella palla  $B(0, r)$ . Per il teorema 2.5.1, si ha la formula di rappresentazione

$$v(\xi) = \frac{r^2 - |\xi|^2}{r\omega_n} \int_{\partial B(0, r)} \frac{v(y)}{|\xi - y|^n} d\sigma(y) \quad \forall \xi \in B(0, r);$$

ne segue, posto  $z = x + \xi$ ,

$$\begin{aligned} u(z) &= u(x + \xi) = \frac{r^2 - |z - x|^2}{r\omega_n} \int_{\partial B(0, r)} \frac{u(x + y)}{|z - x - y|^n} d\sigma(y) = \\ &= \frac{r^2 - |z - x|^2}{r\omega_n} \int_{\partial B(x, r)} \frac{u(\eta)}{|z - \eta|^n} d\sigma(\eta) \quad \forall z \in B(x, r). \quad \square \end{aligned}$$

## 2.6 Proprietà delle funzioni armoniche

Una delle più importanti proprietà di cui godono le funzioni armoniche è la cosiddetta proprietà della media: il valore di una funzione  $u$ , armonica in  $\Omega$ , in un punto  $x$  è la media dei valori che assume sulla frontiera di una qualunque palla  $B(x, r)$  contenuta in  $\Omega$ . In questo paragrafo proveremo tale proprietà e ne analizzeremo alcune notevoli conseguenze.

**Definizione 2.6.1** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Diciamo che una funzione  $u \in C(\overline{\Omega})$  ha la proprietà della media in  $\Omega$  se per ogni palla  $B(x, r) \subseteq \Omega$  risulta*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y). \quad (2.25)$$

Stabiliamo anzitutto una formulazione equivalente della proprietà della media.

**Proposizione 2.6.2** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $u \in C(\overline{\Omega})$  verifica*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \quad \forall B(x,r) \subseteq \Omega$$

se e solo se

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy \quad \forall B(x,r) \subseteq \Omega. \quad (2.26)$$

**Dimostrazione** Supponiamo che valga (2.25) e sia  $B(x,r) \subseteq \Omega$ . Per ogni  $\rho \in ]0, r[$  si ha, per ipotesi,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) d\sigma(y).$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per  $\rho^{n-1}$  e integriamo fra 0 e  $r$ : si ottiene

$$u(x) \frac{r^n}{n} = u(x) \int_0^r \rho^{n-1} d\rho = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) d\sigma(y) d\rho = \frac{1}{\omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

e quindi la (2.26).

Supponiamo viceversa che valga (2.26) e sia  $B(x,r) \subseteq \Omega$ . Moltiplichiamo entrambi i membri per  $\frac{r^n}{n}$  e deriviamo rispetto a  $r$ : il risultato è

$$r^{n-1} u(x) = \frac{d}{dr} \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) d\sigma(y) d\rho = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y),$$

cioè la (2.25).  $\square$

**Proposizione 2.6.3** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in C(\overline{\Omega})$ . Se  $u$  è armonica in  $\Omega$ , allora  $u$  ha la proprietà della media in  $\Omega$ .*

**Dimostrazione** Sia  $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ . Per il corollario 2.5.4, la funzione  $u(x)$  è data dalla formula di rappresentazione

$$u(z) = \frac{r^2 - |z - x_0|^2}{r\omega_n} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{u(\xi)}{|z - \xi|^n} d\sigma(\xi) \quad \forall z \in B(x_0, r).$$

Scelto  $z = x_0$ , si ricava la tesi:

$$u(x_0) = \frac{r}{\omega_n r^n} \int_{\partial B(x_0, r)} u(\xi) d\sigma(\xi). \quad \square$$

Vale anche il viceversa della proposizione precedente, ma occorre prima dimostrare un risultato intermedio che ha interesse di per sé.

**Proposizione 2.6.4** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato e connesso di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in C(\overline{\Omega})$  una funzione che verifica la proprietà della media in  $\Omega$ . Se  $u$  assume massimo o minimo in un punto interno a  $\Omega$ , allora  $u$  è costante in  $\overline{\Omega}$ .*

**Dimostrazione** Sia  $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ , e supponiamo che esista  $\bar{x} \in \Omega$  tale che  $u(\bar{x}) = M$ . Poniamo

$$A = \{x \in \Omega : u(x) = M\};$$

allora  $A$  è un sottoinsieme non vuoto e chiuso in  $\Omega$ , in virtù della continuità di  $u$ . Dimostriamo che  $A$  è anche aperto in  $\Omega$ : essendo  $\Omega$  connesso, ciò proverà che  $A = \Omega$  e quindi la tesi.

Sia  $x \in A$  e sia  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq \Omega$ : vogliamo mostrare che  $u \equiv M$  su  $B(x, r)$ . In effetti se esistesse  $\xi \in B(x, r)$  tale che  $u(\xi) < M$ , troveremmo anche una palla  $B(\xi, \rho) \subseteq B(x, r)$  per cui  $u(y) < M$  per ogni  $y \in B(\xi, \rho)$ . Ma allora, utilizzando la proprietà della media nella versione di (2.26),

$$\begin{aligned} M = u(x) &= \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x, r)} u(y) dy = \\ &= \frac{n}{\omega_n r^n} \left[ \int_{B(x, r) \setminus B(\xi, \rho)} u(y) dy + \int_{B(\xi, \rho)} u(y) dy \right] < M, \end{aligned}$$

il che è assurdo. Pertanto  $B(x, r) \subseteq A$  e  $A$  è aperto in  $\Omega$ .

In modo analogo si ragiona quando  $u$  assume il minimo in un punto interno.  $\square$

**Teorema 2.6.5** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in C(\overline{\Omega})$ . Allora  $u$  è armonica in  $\Omega$  se e solo se  $u$  ha la proprietà della media in  $\Omega$ .*

**Dimostrazione** ( $\implies$ ) Questa implicazione è stata provata nella proposizione 2.6.3.

( $\impliedby$ ) Sia  $S = B(x_0, r) \subseteq \Omega$ . Indichiamo con  $v$  la soluzione, fornita dal teorema 2.5.1, del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } S \\ v = u & \text{su } \partial S. \end{cases}$$

Allora  $v \in C(\overline{S})$  ed inoltre  $v$ , essendo armonica in  $S$ , ha la proprietà della media in  $S$ . Quindi la differenza  $w = u - v$  ha la proprietà della media in  $S$  e si annulla su  $\partial S$ . Siano  $x_1$  e  $x_2$  punti di massimo e di minimo per  $w$  su  $\overline{S}$ : se almeno uno dei due punti è interno a  $S$ , la proposizione 2.6.4 implica che  $w$  è costante in  $\overline{S}$ , e dunque è nulla in  $\overline{S}$ ; se invece entrambi sono su  $\partial S$ , allora  $w$  ha sia minimo che massimo nulli. Ne segue che  $u \equiv v$  e pertanto  $u$  è armonica in  $S$ . Dato che  $S$  è un'arbitraria palla contenuta in  $\Omega$ , si conclude che  $u$  è armonica in  $\Omega$ .  $\square$

**Corollario 2.6.6 (principio del massimo forte)** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato e connesso di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in C(\overline{\Omega})$  una funzione armonica in  $\Omega$ . Se il massimo, oppure il minimo, di  $u$  in  $\Omega$  è assunto in un punto interno, allora  $u$  è costante in  $\overline{\Omega}$ .*

**Dimostrazione** Poiché  $u$  è armonica in  $\Omega$ ,  $u$  verifica la proprietà della media in  $\Omega$ ; la tesi segue allora applicando la proposizione 2.6.4.  $\square$

Dal fatto che le funzioni armoniche verificano la proprietà della media discende l'importante conseguenza che tali funzioni sono analitiche (reali): questo non ci sorprende, poiché in dimensione  $n = 2$  ci era già noto. Per provare questo fatto, dobbiamo preliminarmente procurarci opportune stime sulle derivate di funzioni armoniche.

**Proposizione 2.6.7** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in C(\overline{\Omega})$  una funzione armonica in  $\Omega$ . Allora*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{n^{|\alpha|} e^{|\alpha|-1} |\alpha|!}{[d(x, \partial\Omega)]^{|\alpha|}} \max_{\overline{\Omega}} |u| \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.27)$$

**Dimostrazione** Sia  $x \in \Omega$  e siano  $\rho = d(x, \partial\Omega)$  e  $M = \max_{\overline{\Omega}} |u|$ . Dal corollario 2.5.4 otteniamo la formula di rappresentazione

$$u(z) = \frac{\rho^2 - |z - x|^2}{\rho \omega_n} \int_{\partial B(x, \rho)} \frac{u(\xi)}{|\xi - z|^n} d\sigma(\xi) \quad \forall z \in B(x, \rho),$$

da cui segue che  $u$  è di classe  $C^\infty$ . Derivando l'equazione  $\Delta u = 0$  si deduce che tutte le derivate  $D^\alpha u$  sono armoniche in  $B(x, \rho)$ ; quindi esse verificano la proprietà della media in  $B(x, \rho)$ .

Ciò premesso, proviamo la (2.27) per induzione su  $N = |\alpha|$ . Se  $|\alpha| = 1$ ,

allora  $\alpha = e^i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , e dal teorema della divergenza si ha

$$\begin{aligned} |D_i u(x)| &= \left| \frac{n}{\omega_n \rho^n} \int_{B(x, \rho)} D_i u(y) dy \right| = \left| \frac{n}{\omega_n \rho^n} \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) \nu_i(y) d\sigma(y) \right| \leq \\ &\leq \frac{n}{\omega_n \rho^n} M \omega_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho} M, \end{aligned}$$

e ciò prova la tesi per  $|\alpha| = 1$ .

Se la tesi è vera quando  $|\alpha| = N$ , proviamola per i multi-indici  $\beta$  di lunghezza  $|\beta| = N + 1$ . Poniamo  $\beta = \alpha + e^i$ , con  $|\alpha| = N$  e  $1 \leq i \leq n$ : allora scrivendo la proprietà della media per  $D^\beta u$  nella palla  $B(x, \frac{\rho}{N+1})$  si ottiene, utilizzando l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} |D^\beta u(x)| &= \left| \frac{n}{\omega_n (\frac{\rho}{N+1})^n} \int_{B(x, \frac{\rho}{N+1})} D^\beta u(y) dy \right| = \\ &= \left| \frac{n}{\omega_n (\frac{\rho}{N+1})^n} \int_{\partial B(x, \frac{\rho}{N+1})} D^\alpha u(y) \nu_i(y) d\sigma(y) \right| \leq \\ &\leq \frac{n}{\omega_n (\frac{\rho}{N+1})^n} \int_{\partial B(x, \frac{\rho}{N+1})} \frac{n^N e^{N-1} N!}{[d(y, \partial\Omega)]^N} M d\sigma(y). \end{aligned}$$

Dato che

$$d(y, \partial\Omega) \geq d(x, \partial\Omega) - |x - y| = \rho - \frac{\rho}{N+1} = \frac{\rho N}{N+1} \quad \forall y \in \partial B(x, \frac{\rho}{N+1}),$$

si deduce

$$\begin{aligned} |D^\beta u(x)| &\leq \frac{n}{\omega_n (\frac{\rho}{N+1})^n} \frac{n^N e^{N-1} N!}{(\frac{\rho N}{N+1})^N} M \omega_n (\frac{\rho}{N+1})^{n-1} = \\ &= \frac{n^{N+1} e^N (N+1)!}{\rho^{N+1}} M \frac{(N+1)^N}{e N^N} < \frac{n^{N+1} e^N (N+1)!}{\rho^{N+1}} M, \end{aligned}$$

che è la tesi quando  $|\beta| = N + 1$ . La (2.27) è provata.  $\square$

**Teorema 2.6.8** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $u$  è una funzione armonica in  $\Omega$ , allora  $u$  è analitica in  $\Omega$ .*

**Dimostrazione** Sia  $x \in \Omega$  e sia  $S = B(x, R)$  tale che  $\bar{S} \subset \Omega$ . Come sappiamo,  $u$  è di classe  $C^\infty$  in  $\Omega$ . Possiamo scrivere i punti  $y \in S$  nella forma equivalente

$$y = x + ha, \quad \text{ove } h \in ]0, R[, \quad a \in \mathbb{R}^n \text{ con } |a| = 1.$$

Scrivendo la formula di Taylor per  $u$  nel punto  $x$ , si trova per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$

$$u(y) = u(x + ha) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} h^{|\alpha|} a^\alpha + R_m(y),$$

ove il resto  $R_m(y)$  può scriversi nella forma

$$R_m(y) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(x + \vartheta_m ha)}{\alpha!} h^{|\alpha|} a^\alpha$$

per un opportuno  $\vartheta_m \in ]0, 1[$ . Se scegliamo  $h \in ]0, \frac{R}{2}[$ , allora  $d(y, \partial\Omega) \geq \frac{R}{2}$ , cosicché dalla proposizione 2.6.7 otteniamo

$$\begin{aligned} |R_m(y)| &\leq \sum_{|\alpha|=m} \frac{h^m n^m e^{m-1} m!}{\alpha! \left(\frac{R}{2}\right)^m} \max_{\bar{S}} |u| = \\ &= h^m \left[ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \right] \frac{2^m n^m e^{m-1}}{R^m} \max_{\bar{S}} |u|. \end{aligned}$$

D'altra parte, per la formula (1.46),

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} = n^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^+,$$

da cui finalmente

$$|R_m(y)| \leq \left( \frac{2n^2 e h}{R} \right)^m \max_{\bar{S}} |u| \leq 2^{-m} \max_{\bar{S}} |u| \quad \forall h \in ]0, \frac{R}{4n^2 e}[.$$

Ciò prova che la serie di Taylor di  $u$  ha per somma  $u(y)$  per ogni  $y \in B(x, \frac{R}{4n^2 e})$ . La tesi è provata.  $\square$

## 2.7 Successioni di funzioni armoniche

Il limite di funzioni armoniche, sotto opportune ipotesi, è a sua volta una funzione armonica. Dedichiamo il presente paragrafo alla precisazione e all'analisi di questo enunciato.

Un primo risultato è il seguente:



**Teorema 2.7.1** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\{u_k\} \subset C(\overline{\Omega})$  una successione di funzioni armoniche in  $\Omega$ . Se  $u_k \rightarrow u$  uniformemente in  $\overline{\Omega}$  per  $k \rightarrow \infty$ , allora  $u$  è armonica in  $\Omega$ .

**Dimostrazione** Per il teorema 2.6.5, le  $u_k$  verificano la proprietà della media in  $\Omega$ . La funzione  $u$ , limite uniforme delle  $u_k$ , è continua in  $\overline{\Omega}$  e verifica anch'essa la proprietà della media in  $\Omega$ . Ne segue la tesi applicando ancora il teorema 2.6.5.  $\square$

Ci occorre adesso una stima puntuale per funzioni armoniche non negative, dalla quale trarremo notevoli conseguenze.

**Proposizione 2.7.2** Sia  $S = B(x_0, r)$  e sia  $u \in C(\overline{S})$  una funzione armonica in  $S$  e non negativa in  $\overline{S}$ . Allora

$$\frac{1 - \frac{|x-x_0|}{r}}{\left(1 + \frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{|x-x_0|}{r}}{\left(1 - \frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n-1}} u(x_0) \quad \forall x \in S. \quad (2.28)$$

**Dimostrazione** Per il corollario 2.5.4 si ha la formula

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{r\omega_n} \int_{\partial S} \frac{u(y)}{|y - x|^n} d\sigma(y) \quad \forall x \in S. \quad (2.29)$$

D'altra parte si ha

$$\frac{1}{(r + |x - x_0|)^n} \leq \frac{1}{|x - y|^n} \leq \frac{1}{(r - |x - x_0|)^n} \quad \forall y \in \partial S, \quad \forall x \in S,$$

da cui

$$\frac{r - |x - x_0|}{(r + |x - x_0|)^{n-1}} \leq \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} \leq \frac{r + |x - x_0|}{(r - |x - x_0|)^{n-1}} \quad \forall y \in \partial S, \quad \forall x \in S$$

Moltiplichiamo per  $\frac{u(y)}{r\omega_n}$  e integriamo su  $\partial S$ : tenendo conto di (2.29), si ottiene

$$\frac{r - |x - x_0|}{(r + |x - x_0|)^{n-1}} \frac{1}{r\omega_n} \int_{\partial S} u(y) d\sigma \leq u(x) \leq \frac{r + |x - x_0|}{(r - |x - x_0|)^{n-1}} \frac{1}{r\omega_n} \int_{\partial S} u(y) d\sigma$$

ossia, ricordando che  $u$  verifica la proprietà della media in  $S$ ,

$$r^{n-2} \frac{r - |x - x_0|}{(r + |x - x_0|)^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x - x_0|}{(r - |x - x_0|)^{n-1}} u(x_0) \quad \forall x \in S,$$

da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 2.7.3 (teorema di Liouville)** *Sia  $u$  una funzione armonica in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $u$  è limitata inferiormente, oppure limitata superiormente, allora  $u$  è costante.*

**Dimostrazione** Sia  $u(x) \geq K$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ : applicando la proposizione 2.7.2 a  $u(\cdot) - K$ , che è armonica e non negativa in ogni palla  $B(0, r)$ , si ottiene per ogni  $x \in B(0, r)$  e per ogni  $r > 0$ ,

$$\frac{1 - \frac{|x|}{r}}{\left(1 + \frac{|x|}{r}\right)^{n-1}} (u(0) - K) \leq (u(x) - K) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{r}}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{n-1}} (u(0) - K);$$

dunque, per  $r \rightarrow \infty$ , si ricava  $u(x) \equiv u(0)$ .

Se  $u(x) \leq M$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , si applica lo stesso ragionamento a  $M - u(\cdot)$ .  
□

La proposizione 2.7.2 si generalizza nel modo seguente:

**Teorema 2.7.4 (disuguaglianza di Harnack)** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $K \subset \Omega$  compatto e connesso. Allora esiste una costante  $A \in ]0, 1[$  tale che per ogni funzione  $u$  armonica in  $\Omega$  e non negativa in  $\bar{\Omega}$  si ha*

$$Au(x) \leq u(x') \leq \frac{1}{A} u(x) \quad \forall x, x' \in K.$$

**Dimostrazione** Siano  $x$  e  $x'$  punti distinti di  $K$  e sia  $R = d(K, \partial\Omega)$ . Per compattezza, possiamo ricoprire  $K$  con un numero finito  $N$  di palle  $B(x_i, R/4)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , centrate in punti di  $K$ . Possiamo porre  $x_0 = x$ ,  $x_{N+1} = x'$ , e considerare le  $N+2$  palle  $\{B(x_i, R)\}_{0 \leq i \leq N+1}$ . Un facile argomento di connessione mostra che esiste una sottofamiglia  $\{B(x_{i_j}, R)\}_{1 \leq j \leq k}$ , con  $2 \leq k \leq N$ , tale che

$$x_{i_1} = x, \quad x_{i_k} = x', \quad r_j := |x_{i_j} - x_{i_{j+1}}| < \frac{R}{2} \quad \text{per } j = 1, \dots, k-1.$$

Poiché  $u$  è armonica e non negativa in  $B(x_{i_1}, R)$ , dalla proposizione 2.7.2 segue

$$\frac{1 - \frac{r_1}{R}}{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^{n-1}} u(x_{i_1}) \leq u(x_{i_2}) \leq \frac{1 + \frac{r_1}{R}}{\left(1 - \frac{r_1}{R}\right)^{n-1}} u(x_{i_1}),$$

ed essendo  $r_1 < R/2$  deduciamo

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} u(x_{i_1}) \leq u(x_{i_2}) \leq 3 \cdot 2^{n-2} u(x_{i_1}). \quad (2.30)$$

Similmente si ha

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} u(x_{i_2}) \leq u(x_{i_3}) \leq 3 \cdot 2^{n-2} u(x_{i_2}),$$

il che, insieme a (2.30), implica

$$\left(\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\right)^2 u(x_{i_1}) \leq u(x_{i_3}) \leq (3 \cdot 2^{n-2})^2 u(x_{i_1}).$$

Iterando questa procedura, dopo  $k - 1$  passi si ricava

$$\left(\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\right)^{k-1} u(x_{i_1}) \leq u(x_{i_k}) \leq (3 \cdot 2^{n-2})^{k-1} u(x_{i_1}),$$

e a maggior ragione

$$\left(\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\right)^{N-1} u(x) \leq u(x') \leq (3 \cdot 2^{n-2})^{N-1} u(x),$$

che è la tesi con  $A = (3 \cdot 2^{n-2})^{-(N-1)}$ .  $\square$

Dalla disuguaglianza di Harnack discende immediatamente il seguente risultato:

**Corollario 2.7.5** *Sia  $\Omega$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\{u_k\}$  una successione crescente di funzioni armoniche in  $\Omega$ . Se  $\{u_k\}$  converge in un punto  $x_0 \in \Omega$ , allora essa converge uniformemente su ogni compatto contenuto in  $\Omega$ .  $\square$*

## 2.8 Funzioni subarmoniche

In vista del teorema di esistenza e unicità per il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Laplace con dato al bordo continuo, risultato che sarà dimostrato nel prossimo paragrafo in ipotesi molto blande sull'aperto  $\Omega$ , introduciamo e analizziamo una classe di funzioni molto importante e utile: quella delle funzioni subarmoniche.

**Definizione 2.8.1** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $u \in C(\overline{\Omega})$  si dice subarmonica in  $\Omega$  se per ogni aperto limitato  $\Omega' \subseteq \Omega$  e per ogni funzione  $v \in C(\overline{\Omega'})$ , armonica in  $\Omega'$ , risulta*

$$\max_{\overline{\Omega'}}(u - v) = \max_{\partial\Omega'}(u - v).$$

Una funzione  $u \in C(\overline{\Omega})$  si dice *superarmonica* in  $\Omega$  se per ogni aperto limitato  $\Omega' \subseteq \Omega$  e per ogni funzione  $v \in C(\overline{\Omega}')$ , armonica in  $\Omega'$ , risulta

$$\min_{\overline{\Omega}'}(u - v) = \min_{\partial\Omega'}(u - v).$$

In definitiva una funzione  $u$ , continua in  $\overline{\Omega}$ , è subarmonica in  $\Omega$  se e solo se accade che ogni funzione armonica  $v$ , la quale stia al di sopra di  $u$  sulla frontiera di un arbitrario sotto-aperto  $\Omega'$ , deve stare al di sopra di  $u$  su tutto  $\Omega'$ .

Si verifica facilmente che una funzione  $u$  è subarmonica se e solo se  $-u$  è superarmonica. È chiaro inoltre che ogni funzione armonica è sia subarmonica che superarmonica. È immediato riconoscere, poi, che per  $n = 1$  sono subarmoniche in  $]a, b[$  tutte e sole le funzioni convesse in  $]a, b[$ . Si osservi anche che se  $\Omega$  è limitato, la condizione di subarmonicità vale anche per  $\Omega$ . Vediamo alcune proprietà delle funzioni subarmoniche.

**Proposizione 2.8.2** *Se  $u_1, \dots, u_m$  sono funzioni subarmoniche in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , allora la funzione*

$$u(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \quad x \in \overline{\Omega},$$

*è subarmonica in  $\Omega$ .*

**Dimostrazione** Sia  $\Omega'$  un qualunque aperto limitato contenuto in  $\Omega$ . Se  $v$  è una funzione continua in  $\overline{\Omega}'$  e armonica in  $\Omega'$ , la funzione  $u - v$  è continua su  $\overline{\Omega}'$  e quindi ha massimo in un punto  $x_0 \in \overline{\Omega}'$ . Inoltre, per definizione di  $u$ , esiste un indice  $i \in \{1, \dots, m\}$  tale che  $u(x_0) = u_i(x_0)$ . Poiché  $u_i$  è subarmonica in  $\Omega$ , si ha

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}'}(u - v) &= u(x_0) - v(x_0) = u_i(x_0) - v(x_0) \leq \\ &\leq \max_{\overline{\Omega}'}(u_i - v) = \max_{\partial\Omega'}(u_i - v) \leq \max_{\partial\Omega'}(u - v), \end{aligned}$$

da cui

$$\max_{\overline{\Omega}'}(u - v) = \max_{\partial\Omega'}(u - v).$$

Ciò prova che  $u$  è subarmonica in  $\Omega$ .  $\square$

Introduciamo adesso una particolare trasformazione funzionale definita sullo spazio  $C(\overline{\Omega})$ , ove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , la quale, come vedremo tra poco,

preserva la subarmonicità. Sia  $u \in C(\overline{\Omega})$ : se  $S$  è una palla contenuta in  $\Omega$ , denotiamo con  $u_S$  la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_S = 0 & \text{in } S \\ u_S = u & \text{su } \partial S, \end{cases} \quad (2.31)$$

che esiste unica in virtù del teorema 2.5.1. Sia poi  $M_S[u]$  la funzione definita da

$$M_S[u] = \begin{cases} u & \text{in } \overline{\Omega} \setminus S \\ u_S & \text{in } S. \end{cases} \quad (2.32)$$

Chiaramente  $M_S[u]$  è continua su  $\overline{\Omega}$ . Inoltre:

**Proposizione 2.8.3** *Se  $u$  è una funzione subarmonica in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , allora per ogni palla  $S \subseteq \Omega$  la funzione  $M_S[u]$  è subarmonica in  $\Omega$ .*

**Dimostrazione** Anzitutto, se  $S$  è una palla contenuta in  $\Omega$ , per la subarmonicità di  $u$  e per definizione di  $M_S[u]$ , si ha

$$\max_{\overline{S}}(u - M_S[u]) = \max_{\partial S}(u - M_S[u]) = 0,$$

ossia  $u \leq M_S[u]$  in  $\overline{S}$ , e quindi

$$u \leq M_S[u] \quad \text{in } \overline{\Omega}. \quad (2.33)$$

Sia adesso  $\Omega'$  un qualunque aperto limitato contenuto in  $\Omega$ . Se  $v$  è una funzione continua in  $\overline{\Omega'}$  e armonica in  $\Omega'$ , la funzione  $M_S[u] - v$  ha massimo in un punto  $x_0 \in \overline{\Omega'}$ . Se questo punto appartiene a  $\partial\Omega'$ , allora si ha banalmente

$$\max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) = M_S[u](x_0) - v(x_0) = \max_{\partial\Omega'}(M_S[u] - v),$$

che è ciò che si vuole. Se invece  $x_0 \in \Omega'$ , allora esso starà in  $S$ , oppure starà fuori di  $S$ . Se  $x_0 \in \Omega' \setminus S$ , allora, per la subarmonicità di  $u$  e per (2.33),

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) &= M_S[u](x_0) - v(x_0) = u(x_0) - v(x_0) \leq \\ &\leq \max_{\overline{\Omega'}}(u - v) = \max_{\partial\Omega'}(u - v) \leq \max_{\partial\Omega'}(M_S[u] - v), \end{aligned}$$

il che, nuovamente, è ciò che si vuole. Se, infine,  $x_0 \in \Omega' \cap S$ , si ha, essendo  $M_S[u] - v$  armonica in  $\Omega' \cap S$ ,

$$\max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) = M_S[u](x_0) - v(x_0) = \max_{\overline{\Omega' \cap S}}(M_S[u] - v) = \max_{\partial(\Omega' \cap S)}(M_S[u] - v);$$

ne segue, per il principio del massimo forte (corollario 2.6.6), che  $M_S[u] - v$  è costante nella chiusura della componente connessa di  $\Omega' \cap S$  che contiene  $x_0$ . Dunque esiste  $x_1 \in \partial(\Omega' \cap S)$  tale che

$$\max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) = \max_{\partial(\Omega' \cap S)}(M_S[u] - v) = M_S[u](x_1) - v(x_1).$$

Se  $x_1 \in \partial\Omega'$ , concludiamo che

$$\max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) = M_S[u](x_1) - v(x_1) = \max_{\partial\Omega'}(M_S[u] - v),$$

mentre se  $x_1 \in \partial S$  otteniamo, per la subarmonicità di  $u$  e la (2.33),

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) &= M_S[u](x_1) - v(x_1) = u(x_1) - v(x_1) \leq \\ &\leq \max_{\overline{\Omega'}}(u - v) = \max_{\partial\Omega'}(u - v) \leq \max_{\partial\Omega'}(M_S[u] - v). \end{aligned}$$

In definitiva, risulta

$$\max_{\overline{\Omega'}}(M_S[u] - v) = \max_{\partial\Omega'}(M_S[u] - v)$$

e ciò prova che  $M_S[u]$  è subarmonica in  $\Omega$ .  $\square$

La parentela fra funzioni subarmoniche ed armoniche è completamente chiarita dal risultato che segue.

**Proposizione 2.8.4** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u$  una funzione continua in  $\overline{\Omega}$ . Valgono i seguenti fatti:*

(i)  $u$  è subarmonica in  $\Omega$  se e solo se  $u$  verifica

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \quad \forall B(x,r) \subset \Omega; \quad (2.34)$$

(ii) se  $u \in C^2(\Omega)$ , allora  $u$  è subarmonica in  $\Omega$  se e solo se  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ .

**Dimostrazione (i)** Supponiamo che  $u$  verifichi la (2.34): allora, per ogni aperto limitato  $\Omega' \subset \Omega$  e per ogni funzione  $v \in C(\overline{\Omega'})$  armonica in  $\Omega'$ , la funzione  $u - v$  verifica ancora la (2.34) in ogni palla contenuta in  $\Omega'$ . Quindi, ripetendo esattamente la dimostrazione della proposizione 2.6.4, si ottiene che per ogni componente connessa  $U_i$  di  $\Omega'$  risulta

$$\max_{\overline{U_i}}(u - v) = \max_{\partial U_i}(u - v).$$

Ne segue che se  $x_0$  è punto di massimo per  $u - v$  in  $\overline{\Omega'} \subseteq \bigcup_i \overline{U_i}$ , allora esiste  $i$  tale che  $x_0 \in \overline{U_i}$ , da cui

$$\max_{\overline{\Omega'}}(u - v) = \max_{\overline{U_i}}(u - v) = \max_{\partial U_i}(u - v).$$

D'altronde, è facile verificare che  $\partial\Omega' = \bigcup_i \partial U_i$ , e quindi dalla relazione precedente deduciamo

$$\max_{\overline{\Omega'}}(u - v) = \max_{\partial U_i}(u - v) \leq \max_{\partial\Omega'}(u - v).$$

Ne segue che  $u$  è subarmonica in  $\Omega$ .

Viceversa, se  $u$  è subarmonica in  $\Omega$ , allora per ogni palla  $S = B(x, r)$  contenuta in  $\Omega$  si ha, per la (2.33) e per definizione di  $M_S[u]$  (si veda (2.32) e (2.31)),

$$\begin{aligned} u(x) \leq M_S[u](x) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} M_S[u](y) d\sigma(y) = \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

cosicché  $u$  verifica (2.34).

(ii) Sia  $u \in C^2(\Omega)$  subarmonica in  $\Omega$ . Supponiamo, per assurdo, che esista  $x_0 \in \Omega$  tale che  $\Delta u(x_0) < 0$ . Per continuità esiste una palla  $S = B(x_0, r)$ , con  $\overline{S} \subset \Omega$ , tale che  $\Delta u(x) < 0$  per ogni  $x \in S$ . Consideriamo la funzione  $M_S[u]$ : la differenza  $u - M_S[u]$  è nulla su  $\partial S$  e, per la (2.33), non positiva in  $S$ ; dunque il minimo di  $u - M_S[u]$  in  $\overline{S}$  è raggiunto in un punto  $\bar{x}$  interno a  $S$ . Ne segue che in tale punto deve essere  $\Delta u(\bar{x}) = \Delta(u - M_S[u])(\bar{x}) \geq 0$ , contro l'ipotesi  $\Delta u < 0$  in  $S$ .

Viceversa, sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  tale che  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ . Fissiamo un aperto limitato  $\Omega' \subseteq \Omega$  e una funzione  $v \in C(\overline{\Omega'})$  armonica in  $\Omega'$ . Allora  $\Delta(u - v) \geq 0$  in  $\Omega'$ ; per il principio del massimo debole (proposizione 2.3.3), si ha

$$\max_{\overline{\Omega'}}(u - v) = \max_{\partial\Omega'}(u - v),$$

ossia  $u$  è subarmonica in  $\Omega$ .  $\square$

**Osservazione 2.8.5** Dalla proposizione 2.8.4 segue in particolare che la somma, nonché il prodotto per scalari positivi, di funzioni subarmoniche è una funzione subarmonica.

## 2.9 Il problema di Dirichlet

Riprendiamo in esame il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un aperto limitato  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ . Già sappiamo che per questo problema vi è unicità e dipendenza continua dai dati, ma l'esistenza è per adesso garantita solo nel caso in cui  $\Omega$  è una palla (teorema 2.5.1). Prenderemo in esame ora aperti (limitati) molto generali.

**Teorema 2.9.1** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ , tale che per ogni  $y \in \partial\Omega$  esista una palla  $B$  tale che  $\overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{y\}$ . Allora per ogni  $g \in C(\partial\Omega)$  esiste un'unica funzione  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  che risolve il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.35)$$

Di questo teorema esistono numerose dimostrazioni molto diverse fra loro. Noi seguiremo quella, elementare anche se non banale, dovuta a Perron.

**Dimostrazione** Consideriamo le famiglie di funzioni

$$\begin{aligned} A &= \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ è subarmonica in } \Omega, v \leq g \text{ su } \partial\Omega\} \\ B &= \{w \in C(\overline{\Omega}) : w \text{ è superarmonica in } \Omega, w \geq g \text{ su } \partial\Omega\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Le due classi sono non vuote poiché

$$\min_{\partial\Omega} g \in A, \quad \max_{\partial\Omega} g \in B.$$

Inoltre risulta

$$v \leq w \quad \forall v \in A, \forall w \in B; \quad (2.37)$$

infatti, per ogni  $v \in A$  e  $w \in B$  la funzione  $v - w$  è subarmonica in virtù dell'osservazione 2.8.5, ed è non positiva su  $\partial\Omega$ , da cui, per definizione di subarmonicità e per il fatto che  $\Omega$  è limitato, essa è non positiva in  $\overline{\Omega}$ .

Osserviamo che la soluzione  $u$  del problema (2.35), se esiste, appartiene ad  $A \cap B$ , e quindi verifica  $v \leq u \leq w$  per ogni  $v \in A$  e per ogni  $w \in B$ . Questo ci suggerisce di definire la candidata soluzione nel modo seguente:

$$u(x) = \sup_{v \in A} v(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (2.38)$$

Proviamo dunque che questa funzione risolve (2.35). Sia  $x_0$  un arbitrario punto di  $\Omega$ . Per definizione di  $u(x_0)$  esiste una successione  $\{u_k\} \subset A$  tale che  $u_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ . Posto

$$v_k(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}, \quad x \in \overline{\Omega},$$



è chiaro che  $\{v_k\}$  è una successione crescente di elementi di  $A$  (proposizione 2.8.2), tale che  $v_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ .

Sia ora  $S$  una palla contenuta in  $\Omega$  contenente  $x_0$ , e poniamo  $w_k = M_S[v_k]$  (si veda (2.32) e (2.31)). Allora  $\{w_k\} \subset A$ ; infatti le  $w_k$  sono subarmoniche in  $\Omega$  (proposizione 2.8.3) e, coincidendo con  $v_k$  in  $\overline{\Omega} \setminus S$ , non superano  $g$  su  $\partial\Omega$ . Inoltre la successione  $\{w_k\}$  è crescente, in virtù della crescenza di  $\{v_k\}$  e del principio del massimo, e si ha  $w_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ , poiché in  $S$  si ha  $v_k \leq w_k \leq u$  per (2.33) e (2.38). In virtù del corollario 2.7.5 e del teorema 2.7.1, concludiamo che le  $w_k$  convergono uniformemente in  $\overline{S}$  a una funzione  $w$  armonica in  $S$ , tale che  $w(x_0) = u(x_0)$ .

Adesso fissiamo un generico punto  $\xi \in S$ : esiste un'altra successione  $\{\bar{u}_k\} \subset A$  (dipendente da  $\xi$ ), tale che  $\bar{u}_k(\xi) \rightarrow u(\xi)$ . Definiamo

$$z_k(x) = \max\{v_k(x), \bar{u}_1(x), \dots, \bar{u}_k(x)\}, \quad x \in \overline{\Omega}$$

e sia  $y_k = M_S[z_k]$  (anche queste funzioni dipendono da  $\xi$ ). Allora, come prima, risulta  $\{z_k\} \subset A$  e  $\{y_k\} \subset A$ ,  $\{y_k\}$  è crescente e, per il principio del massimo,  $w_k \leq y_k$  in  $\overline{\Omega}$ ; inoltre  $y_k(\xi) \rightarrow u(\xi)$  (perché  $\bar{u}_k \leq z_k \leq y_k \leq u$  in  $S$ ). Quindi, analogamente, le  $y_k$  convergono uniformemente in  $\overline{S}$  a una funzione  $y$  armonica in  $S$  (dipendente da  $\xi$ ), tale che  $y(\xi) = u(\xi)$ . Risulta pertanto

$$y \geq w \quad \text{in } S, \quad y(x_0) = w(x_0) = u(x_0).$$

Dunque la funzione  $y - w$ , armonica e non negativa su  $S$ , ha minimo uguale a 0 nel punto  $x_0$  interno a  $S$ : per il principio del massimo forte (corollario 2.6.6),  $y - w$  è nulla in  $S$  e, in particolare,  $w(\xi) = y(\xi) = u(\xi)$ .

Abbiamo così eliminato la dipendenza da  $\xi$  e provato che nel generico punto  $\xi \in S$  si ha  $u(\xi) = w(\xi)$ , ove  $w$  è una fissata funzione armonica: ossia  $u$  è armonica in  $S$ . Poiché  $S$  è una palla contenente un arbitrario punto  $x_0 \in \Omega$ , possiamo dedurre finalmente che  $u$  è armonica in  $\Omega$ .

Dimostriamo adesso che per ogni  $y \in \partial\Omega$  risulta

$$\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow y} u(x) = g(y); \tag{2.39}$$

ciò concluderà la dimostrazione.

Ci occorre il seguente

**Lemma 2.9.2** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ , tale che per ogni  $y \in \partial\Omega$  esista una palla  $B$  tale che  $\overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{y\}$ . Allora per ogni  $y \in \partial\Omega$  esiste una funzione barriera, vale a dire una funzione  $x \mapsto \alpha_y(x)$ , definita e continua in  $\overline{\Omega}$ , tale che*

- (i)  $\alpha_y$  è superarmonica in  $\Omega$ ,
- (ii)  $\alpha_y$  è non negativa in  $\bar{\Omega}$ ,
- (iii)  $\alpha_y(x) = 0$  se e solo se  $x = y$ .

**Dimostrazione** Fissato  $y \in \partial\Omega$ , sia  $B(\xi, r)$  una palla tale che  $\overline{B(\xi, r)} \cap \bar{\Omega} = \{y\}$ . Una funzione barriera è allora, come è immediato verificare,

$$\alpha_y(x) = \begin{cases} r^{2-n} - |x - \xi|^{2-n} & \text{se } n > 2 \\ \log \frac{|x - \xi|}{r} & \text{se } n = 2. \quad \square \end{cases}$$

Proviamo la (2.39). Sia  $y \in \partial\Omega$  e sia  $\varepsilon > 0$ : per la continuità di  $g$ , esiste un intorno aperto  $I$  di  $y$  tale che

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \cap \partial\Omega.$$

Dunque, posto

$$K = \frac{\text{osc}(g, \partial\Omega)}{\min\{\alpha_y(x) : x \in \partial\Omega \setminus I\}},$$

si ha

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon + K\alpha_y(x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

ove  $\alpha_y$  è la funzione barriera fornita dal lemma 2.9.2. Inoltre, essendo

$$g(y) - \varepsilon - K\alpha_y(\cdot) \in A, \quad g(y) + \varepsilon + K\alpha_y(\cdot) \in B,$$

si ha

$$g(y) - \varepsilon - K\alpha_y(x) \leq u(x) \leq g(y) + \varepsilon + K\alpha_y(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

ovvero

$$|u(x) - g(y)| \leq \varepsilon + K\alpha_y(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Se ne deduce che

$$\limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow y} |u(x) - g(y)| \leq \varepsilon,$$

e poiché  $\varepsilon$  è arbitrario, la (2.39) è provata.  $\square$

**Osservazione 2.9.3** Si noti che nella dimostrazione precedente abbiamo usato le condizioni (ii) e (iii) della definizione di funzione barriera solamente per  $x \in \partial\Omega$ .

# Capitolo 3

## L'equazione del calore

### 3.1 Motivazioni fisiche

L'equazione del calore

$$u_t(x, t) - k\Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (3.1)$$

ove  $k$  è una costante positiva e  $f$  è una funzione continua assegnata, è la più importante e la più semplice fra le equazioni di tipo parabolico. Essendo presente la variabile  $t$ , naturalmente identificata con il tempo, questa equazione descrive quei fenomeni di tipo evolutivo nei quali interviene una *diffusione*, ossia quando si ha il trasferimento di una data quantità di sostanza, o di energia, dalle zone di alta concentrazione a quelle di bassa concentrazione. La funzione  $f$  ha il significato di una sorgente di gas, o di calore, interna alla regione che si considera. Come vedremo, molte delle proprietà matematiche dell'equazione del calore sono simili a quelle dell'equazione di Laplace.

Abbiamo già visto nell'esempio 2.1.5 che l'equazione (3.1) descrive la propagazione del calore nello spazio, essendo  $u(x, t)$  la temperatura nel punto  $x$  all'istante  $t$ . Vediamo ora un altro esempio di diffusione.

**Esempio 3.1.1** Consideriamo un mezzo  $\Omega$  vuoto, oppure riempito di una sostanza porosa. Se immettiamo in  $\Omega$  una certa quantità di gas, come si è già detto, esso si diffonderà dalle zone di alta concentrazione a quelle di rarefazione. Indichiamo con  $u(x, t)$  la concentrazione di gas nel punto  $x$  all'istante  $t$ . La legge (sperimentale) di Fick ci dice che la massa  $dF_\nu$  di gas che attraversa nell'unità di tempo una superficie  $d\sigma$  centrata in  $x$  con versore

normale  $\nu$  è proporzionale al gradiente della concentrazione:

$$dF_\nu = -D \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma, \quad (3.2)$$

ove  $D$  è il *coefficiente di diffusione* e compare il segno “-” poiché la diffusione deve andare nelle direzioni di concentrazione decrescente. Il coefficiente  $D$  potrebbe dipendere dal punto  $x$  se il mezzo non è omogeneo, dalla temperatura del mezzo, dalla concentrazione stessa, ma noi supporremo per semplicità che  $D$  sia una costante positiva. Dunque possiamo rappresentare la quantità di gas che si allontana da  $x$  mediante il vettore

$$F = -D\nabla u. \quad (3.3)$$

Sia allora  $B$  una palla centrata in  $x$  di raggio  $r$ , contenuta in  $\Omega$ , e sia  $[t_0, \tau]$  un intervallo di tempo. La variazione di concentrazione in  $B$  in tale periodo di tempo è

$$\int_B c(x)[u(x, \tau) - u(x, t_0)]dx,$$

ove  $c(x)$  è il *coefficiente di porosità*, che supponiamo costante; se siamo nel vuoto possiamo prendere  $c(x) \equiv 1$ . Risulta

$$\int_B [u(x, \tau) - u(x, t_0)]dx = \int_{t_0}^\tau \int_{\partial B} (-\langle F, \nu \rangle) d\sigma dt,$$

poiché la concentrazione decresce se il vettore della diffusione  $F$  punta verso l'esterno. Se ne deduce, tenuto conto di (3.2) e integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^\tau \int_B \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt &= \int_B [u(x, \tau) - u(x, t_0)]dx = \\ &= \int_{t_0}^\tau \int_{\partial B} D \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) d\sigma dt = \int_{t_0}^\tau \int_B D \Delta u(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Infine, per l'arbitrarietà di  $B$  e di  $[t_0, \tau]$ , si deduce

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u \quad \text{in } \Omega \times [0, \infty[.$$

Vi è anche un importante modello probabilistico che conduce all'equazione del calore.

**Esempio 3.1.2** Consideriamo una particella, sottoposta a forze molto complesse, ad esempio sia soggetta agli urti dovuti alla presenza di particelle pesanti che collidono con essa e fra loro: essa si muoverà di un moto caotico, cambiando molto spesso direzione. Ciò ci induce a schematizzare il moto della particella in modo probabilistico. Sia dunque  $\mathbb{Z}_\varepsilon^n$  il reticolo  $n$ -dimensionale di passo  $\varepsilon > 0$ . Supponiamo che la particella si muova istante per istante compiendo un salto di ampiezza  $\varepsilon$  in una delle  $n$  direzioni degli assi coordinati, in uno dei due versi possibili: se essa si trova nel punto  $h\varepsilon$ , con  $h \in \mathbb{Z}^n$ , all'istante successivo si troverà in un punto della forma  $(h \pm e_j)\varepsilon$ , con  $1 \leq j \leq n$ . Naturalmente, la particella avrà uguale probabilità, pari a  $\frac{1}{2n}$ , di andare in uno qualunque di tali punti.

Supponiamo di non conoscere l'esatta posizione iniziale della particella, ma di conoscerne la distribuzione di probabilità  $P_0$ : dunque all'istante iniziale la particella si trova in  $x$  con probabilità  $P_0(x)$ . Nota  $P_0$ , cercheremo di trovare una formula per la probabilità  $P_t(x)$ , a qualunque istante  $t$ . Se ipotizziamo che la particella salti ogni  $\eta$  secondi ( $\eta > 0$ ), vale la relazione

$$P_{t+\eta}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n [P_t(x + \varepsilon e_j) + P_t(x - \varepsilon e_j)],$$

la quale esprime il fatto che la probabilità di trovare la particella nel punto  $x$  all'istante  $t + \eta$  è uguale alla somma delle probabilità che la particella si trovi al tempo  $t$  in uno dei punti adiacenti a  $x$ .

Quindi, usando nel quinto passaggio il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} P_{t+\eta}(x) - P_t(x) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n [P_t(x + \varepsilon e_j) - P_t(x) + P_t(x - \varepsilon e_j) - P_t(x)] = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \int_0^\varepsilon [D_j P_t(x + \sigma e_j) - D_j P_t(x - \sigma e_j)] d\sigma = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \int_0^\varepsilon [(D_j P_t(x + \sigma e_j) - D_j P_t(x)) - (D_j P_t(x - \sigma e_j) - D_j P_t(x))] d\sigma = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \int_0^\varepsilon \int_0^\sigma [D_j^2 P_t(x + s e_j) + D_j^2 P_t(x - s e_j)] ds d\sigma = \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - s) [\Delta P_t(x + s e_j) + \Delta P_t(x - s e_j)] ds. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
P_{t+\eta}(x) - P_t(x) &= \frac{\varepsilon}{2n} \int_0^\varepsilon [\Delta P_t(x + se_j) + \Delta P_t(x - se_j)] ds - \\
&\quad - \frac{1}{2n} \int_0^\varepsilon s [\Delta P_t(x + se_j) - \Delta P_t(x) + \Delta P_t(x - se_j) - \Delta P_t(x)] ds - \\
&\quad - \frac{1}{n} \int_0^\varepsilon s ds \Delta P_t(x).
\end{aligned}$$

Se adesso dividiamo l'equazione relativa a  $P_{t+\eta}(x) - P_t(x)$  per  $\varepsilon^2$ , nel secondo membro il primo termine tende a  $\frac{\Delta P_t(x)}{n}$ , mentre il secondo termine tende a 0; il terzo tende invece a  $-\frac{\Delta P_t(x)}{2n}$ . Dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n [P_t(x + \varepsilon e_j) + P_t(x - \varepsilon e_j)] = \frac{\Delta P_t(x)}{2n}.$$

Il primo membro di tale equazione ha limite se diviso per  $\eta$ :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{P_{t+\eta}(x) - P_t(x)}{\eta} = \frac{\partial}{\partial t} P_t(x).$$

Pertanto, se fissiamo  $\nu > 0$  e scegliamo  $\eta = \frac{\varepsilon^2}{2n\nu}$ , si ricava

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_t(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_{t+\frac{\varepsilon^2}{2n\nu}}(x) - P_t(x)}{\frac{\varepsilon^2}{2n\nu}} = \\
&= 2n\nu \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n [P_t(x + \varepsilon e_j) + P_t(x - \varepsilon e_j)] = \nu \Delta P_t(x).
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che la distribuzione di probabilità relativa alla posizione all'istante  $t$  di una particella soggetta a urti casuali soddisfa l'equazione del calore. Si noti che tale relazione è stata ricavata supponendo che in un tempo macroscopico  $t$  la particella compia uno spostamento dalla posizione iniziale di lunghezza dell'ordine di  $\sqrt{t}$ : questa è la principale caratteristica del processo che abbiamo descritto, che è chiamato *passeggiata aleatoria*

Quali condizioni ai limiti sono significative per l'equazione (3.1)? Poiché in  $\mathbb{R}^{n+1}$  la superficie  $n$ -dimensionale  $t = 0$  è caratteristica, non possiamo assegnare condizioni iniziali su  $u$  e su  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , perché quest'ultima quantità è

determinata dall'equazione. Fisicamente, tornando all'interpretazione della (3.1) come modello della propagazione del calore in un corpo  $\Omega$ , ha senso assegnare la temperatura del corpo all'istante iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

e prescrivere poi, per esempio,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \psi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0,$$

il che corrisponde a supporre che il corpo scambi calore con l'esterno in modo prefissato (in particolare, se  $\psi = 0$  vi è isolamento termico), oppure

$$u(x, t) = \psi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0,$$

il che significa che la temperatura sul bordo di  $\Omega$  è mantenuta a un determinato livello. Ma altre condizioni ai limiti sono possibili: se il corpo è immerso in un fluido, con il quale vi è scambio di calore per convezione, allora per la legge di Newton la quantità di calore che passa dal corpo al fluido è proporzionale (localmente) alla differenza delle temperature. In altre parole, se  $\tau(x, t)$  è la temperatura del fluido a contatto con il corpo (dunque  $x \in \partial\Omega$ ), si ha

$$-h(x)\langle \nabla u(x, t), \nu(x) \rangle = \lambda(x)[u(x, t) - \tau(x, t)],$$

ove  $h(x)$  è la conducibilità termica nel punto  $x \in \partial\Omega$  e  $\lambda(x)$  è un fattore di proporzionalità. Supponendo per semplicità  $\lambda$  e  $h$  funzioni costanti, si ottiene

$$\lambda u + h \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \tau =: \psi \quad \text{su } \partial\Omega \times [0, \infty[.$$

Abbiamo dunque tre tipi di problemi ai limiti per l'equazione del calore: il *problema di Cauchy-Dirichlet*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times ]0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \Omega, \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = \psi & \forall t > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

il *problema di Cauchy-Neumann*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times ]0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \Omega, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \nu}(\cdot, t) \right|_{\partial\Omega} = \psi & \forall t > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

e il problema di Cauchy con condizioni di Robin

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times ]0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \Omega, \\ \left( \alpha u(\cdot, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}(\cdot, t) \right) \Big|_{\partial \Omega} = \psi & \forall t > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Osserviamo infine che l'insieme dei tempi può essere un qualunque intervallo  $[t_0, T]$ , o una semiretta  $[t_0, \infty[$ , o anche tutto  $\mathbb{R}$ . Noi assumeremo sempre  $t_0 = 0$  e inoltre, con una diversa scala dei tempi, non è restrittivo supporre che in (3.1) il coefficiente di diffusione  $k$  sia uguale a 1.

## 3.2 Principio del massimo

Consideriamo dunque l'equazione del calore omogenea

$$u_t - \Delta u = 0. \quad (3.7)$$

Sarà naturale considerare il seguente spazio funzionale:

**Definizione 3.2.1** *Se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , lo spazio  $C^{2,1}(A)$  è costituito dalle funzioni  $u \in C(A)$  tali che  $D_i u$ ,  $D_i D_j u$ ,  $u_t$  appartengono a  $C(A)$  per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .*

Per le soluzioni dell'equazione del calore in un aperto  $A$  vale, sotto ipotesi molto blande, un principio di massimo simile a quello relativo alle funzioni armoniche (proposizione 2.3.3).

**Proposizione 3.2.2 (principio del massimo)** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Poniamo per  $T \in \mathbb{R}$ :*

$$A_T = \{(x, t) \in A : t < T\},$$

$$S_T = \{(x, t) \in \partial A : t < T\},$$

$$\Gamma_T = \{(x, t) \in A : t = T\}.$$

*Supponiamo che esista  $T \in \mathbb{R}$  tale che l'aperto  $A_T$  sia non vuoto e limitato, e sia  $u \in C(\bar{A}) \cap C^{2,1}(A)$ . Se risulta  $u_t - \Delta u \leq 0$  in  $A$ , allora*

$$\max_{\bar{A}_T} u = \max_{\bar{S}_T} u;$$



se invece risulta  $u_t - \Delta u \geq 0$  in  $A$ , allora

$$\min_{A_T} u = \min_{S_T} u.$$

**Dimostrazione** Supponiamo che  $u_t - \Delta u \leq 0$ . Sia  $(\bar{x}, \bar{t})$  un arbitrario punto di  $A_T$  e scegliamo  $\tau \in ]\bar{t}, T[$ . Per  $\varepsilon > 0$ , la funzione

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$$

è continua in  $\overline{A_\tau}$  e soddisfa

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \varepsilon \leq -\varepsilon \quad \text{in } A.$$

Sia  $(x_0, t_0)$  un punto di massimo per  $v$  in  $\overline{A_\tau}$ : tale punto può stare in  $A$ , e dunque in  $A_\tau \cup \Gamma_\tau$ , oppure in  $\partial A$ , dunque in  $\overline{S_\tau}$ . Nel primo caso avremmo

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0, \quad D_i^2 u(x_0, t_0) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

da cui  $-\varepsilon \geq v_t - \Delta v \geq 0$ , assurdo. Dunque si ha  $(x_0, t_0) \in \overline{S_\tau} \subset \overline{S_T}$ . Pertanto

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = v(\bar{x}, \bar{t}) + \varepsilon \bar{t} \leq \max_{\overline{S_T}} v + \varepsilon T \leq \max_{\overline{S_T}} u + 2\varepsilon K,$$

ove  $K$  è un'opportuna costante (si ricordi che  $A_T$  è limitato). Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene  $u(\bar{x}, \bar{t}) \leq \max_{\overline{S_T}} u$ . Dato che il punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  era arbitrario, si ha la tesi grazie alla continuità di  $u$  su  $\overline{A_T}$ .

Se  $u_t - \Delta u \geq 0$ , si fa un ragionamento del tutto analogo.  $\square$

Il principio del massimo ora dimostrato è in forma debole, perché non esclude che la funzione  $u$  assuma massimo anche in punti di  $\overline{A_T} \setminus \overline{S_T}$ ; tuttavia esso è più che sufficiente per i nostri scopi, e d'altronde la versione "forte" è di dimostrazione intricata e alquanto lunga, seppure non difficile.

**Osservazioni 3.2.3 (1)** Se l'aperto  $A_T$  non è limitato, il principio del massimo in generale non vale. Ad esempio, se  $n = 1$  le funzioni

$$u_k(x, t) = ce^{-k^2 t} \sin kx$$

sono tutte soluzioni in  $A = ]0, \pi[ \times \mathbb{R}$  del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } A \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ma sono illimitate in  $A$ . Si noti che in questo caso  $A_T = ]0, \pi[ \times ] - \infty, T[$  e che per questo problema non c'è unicità della soluzione.

(2) Dal principio del massimo segue che il problema di Dirichlet per l'equazione del calore non è ben posto: scelti ad esempio  $n = 1$  e  $A = ]0, 1[ \times ]0, T[$ , il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } A \\ u = \varphi & \text{su } \partial A \end{cases}$$

non può avere alcuna soluzione se si prende una  $\varphi \in C(\partial A)$  che abbia  $(\frac{1}{2}, T)$  come unico punto di massimo assoluto.

Una prima conseguenza del principio del massimo, di immediata dimostrazione, è l'unicità e la dipendenza continua dai dati per il problema di Cauchy-Dirichlet:

**Corollario 3.2.4** *Sia  $A = \Omega \times ]0, T[$ , ove  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f \in C(\bar{A})$ ,  $\varphi \in C(\bar{\Omega})$  e  $\psi \in C(\partial\Omega \times [0, T])$ , allora il problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } A, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \bar{\Omega}, \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = \psi & \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.8)$$

ha al più una soluzione  $u \in C(\bar{A}) \cap C^{2,1}(A)$ . Se inoltre  $f \equiv 0$ , risulta

$$\|u\|_{C(\bar{A})} = \max\{\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})}, \|\psi\|_{C(\partial\Omega \times [0, T])}\}. \quad \square \quad (3.9)$$

Il risultato espresso dal corollario precedente può essere migliorato. Si ha:

**Teorema 3.2.5** *Sia  $A = \Omega \times ]0, T[$ , ove  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  con  $\partial\Omega$  di classe  $C^1$  a tratti. Se  $f \in C(\bar{A})$ ,  $\varphi \in C(\bar{\Omega})$  e  $\psi \in C(\partial\Omega \times [0, T])$ , allora il problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } A \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \Omega, \\ \left( \alpha u(\cdot, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}(\cdot, t) \right) \Big|_{\partial\Omega} = \psi & \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.10)$$

ove  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti non negative e non entrambe nulle, ha al più una soluzione nella classe delle funzioni  $u \in C(\bar{A}) \cap C^{2,1}(A)$  per le quali  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in$

$C(\overline{A})$ . Inoltre, se  $\psi = 0$ , oppure se i numeri  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambi positivi, risulta per ogni  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx &\leq e^t \int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx + \\ &+ \int_0^t e^{t-s} \left[ \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx + K \int_{\partial\Omega} |\psi(x, s)|^2 d\sigma \right] ds, \end{aligned}$$

ove  $K$  è un'opportuna costante.

Come si vede, qui si ha dipendenza continua dai dati rispetto alla norma  $L^2$  nello spazio, anziché nella norma uniforme. Vedremo fra poco che per il problema di Cauchy-Dirichlet vale anche la dipendenza continua rispetto alla norma uniforme, generalizzando la (3.9) al caso di secondo membro non nullo.

**Dimostrazione** Utilizziamo il *metodo dell'energia*, che avrà molte applicazioni anche nel seguito. Sia  $u$  una soluzione del problema. Moltiplichiamo l'equazione per  $u(x, t)$  e integriamo su  $\Omega$  per  $t \in [0, T]$  fissato: utilizzando la formula di Green (si noti che la derivata normale di  $u$  è continua in  $\overline{A}$ ) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx &= \int_{\Omega} u_t u dx = \int_{\Omega} (f + \Delta u) u dx = \\ &= \int_{\Omega} f u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\sigma - \int_{\Omega} |Du|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , possiamo scrivere ad esempio  $u = \frac{1}{\alpha}(\psi - \beta \frac{\partial u}{\partial \nu})$  su  $\partial\Omega$ : quindi

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \frac{\beta}{\alpha} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi d\sigma.$$

Sostituendo in (3.11) si ricava, utilizzando la relazione  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ , valida per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx &\leq - \int_{\partial\Omega} \frac{\beta}{\alpha} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi d\sigma + \int_{\Omega} f u dx \leq \\ &\leq \left( -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \right) \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma + \frac{1}{2\alpha\varepsilon} \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Scelto  $\varepsilon = 2\beta$ , otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx - \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq \left[ C \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 d\sigma + \int_{\Omega} |f|^2 dx \right]. \quad (3.12)$$

Questa stessa relazione si ottiene anche quando  $\psi = 0$ , osservando che in tal caso su  $\partial\Omega$  si ha

$$u \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\beta}{\alpha} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \leq 0 \quad \text{se } \alpha > 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\alpha}{\beta} |u|^2 \leq 0 \quad \text{se } \beta > 0;$$

ciò implica

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \leq 0,$$

cosicché la (3.12) segue direttamente dalla (3.11).

La (3.12) è una disequazione differenziale ordinaria del primo ordine nell'incognita  $v(t) = \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx$ ; con facile calcolo si vede che essa equivale alla relazione

$$v(t) \leq e^t v(0) + \int_0^t e^{t-s} \left[ C \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 d\sigma + \int_{\Omega} |f|^2 dx \right] ds,$$

che è precisamente la tesi.  $\square$

Come si è visto nell'osservazione 3.2.3, il principio del massimo non vale in generale per aperti illimitati di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Tuttavia, se si assume un'ipotesi sul comportamento all'infinito della funzione  $u$ , tale principio si può estendere in varie versioni: ci limitiamo a fornire l'enunciato più semplice relativo al caso  $A = \mathbb{R}^n \times ]0, T[$ .

**Teorema 3.2.6 (di Phragmén-Lindelöf)** *Sia  $T > 0$  e sia  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)$  una funzione verificante le seguenti proprietà:*

- (i)  $u_t - \Delta u \geq 0$  in  $\mathbb{R}^n \times ]0, T[$ ,
- (ii)  $u(x, 0) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- (iii) esistono  $R > 0$ ,  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$  tali che

$$u(x, t) \geq -K e^{\alpha|x|^2} \quad \text{per } |x| \geq R, \quad t \in [0, T].$$

Allora  $u \geq 0$  in  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

**Dimostrazione** Supponiamo dapprima che valga, in luogo di (iii), l'ipotesi più forte

(iii')  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) \geq 0$  uniformemente rispetto a  $t \in [0, T]$ .

Sia  $\varepsilon > 0$ . Esiste allora  $R_\varepsilon > 0$  tale che  $u(x, t) \geq -\varepsilon$  per  $|x| \geq R_\varepsilon$  e  $t \in [0, T]$ . La funzione  $v = u + \varepsilon$  verifica

$$\begin{cases} v_t - \Delta v \geq 0 & \text{in } C_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, T[ : |x| < R_\varepsilon\} \\ v(x, 0) \geq 0 & \text{per } |x| \leq R_\varepsilon \\ v(x, t) \geq 0 & \text{per } |x| = R_\varepsilon, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Per il principio del massimo (proposizione 3.2.2) si ha  $v \geq 0$  in  $\overline{C_\varepsilon}$ . Dunque  $u = v - \varepsilon \geq -\varepsilon$  per  $|x| \leq R_\varepsilon$  e  $t \in [0, T]$ ; pertanto si ha  $u \geq -\varepsilon$  in  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Poiché  $\varepsilon$  è arbitrario, concludiamo che  $u \geq 0$  in  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Torniamo all'ipotesi più generale (iii). Fissato  $\beta > \alpha$ , consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x, t) = \frac{e^{\frac{\beta|x|^2}{1-4\beta t}}}{(1-4\beta t)^{n/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \left[0, \frac{1}{8\beta}\right].$$

Con un calcolo laborioso ma non difficile si verifica che

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \left]0, \frac{1}{8\beta}\right[ ,$$

e inoltre, ovviamente,

$$v(x, t) \geq e^{\beta|x|^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \left[0, \frac{1}{8\beta}\right].$$

Quindi, per  $\varepsilon > 0$  la funzione  $w = u + \varepsilon v$  verifica

$$\begin{cases} w_t - \Delta w \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \left]0, \frac{1}{8\beta} \wedge T\right[ , \\ w(x, 0) = u(x, 0) + \varepsilon e^{\beta|x|^2} \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \liminf_{|x| \rightarrow \infty} w(x, t) \geq 0 & \text{uniformemente rispetto a } t \in \left[0, \frac{1}{8\beta}\right], \end{cases}$$

ove l'ultima proprietà segue osservando che, essendo  $\beta > \alpha$ , si ha per  $|x|$  sufficientemente grande

$$w(x, t) \geq -K e^{\alpha|x|^2} + \varepsilon e^{\beta|x|^2} > 0.$$

In definitiva  $w$  soddisfa le condizioni (i), (ii) e (iii'); dunque, per quanto già dimostrato, si ha  $w \geq 0$  in  $\mathbb{R}^n \times [0, \frac{1}{8\beta} \wedge T]$ , ossia

$$u(x, t) \geq -\varepsilon v(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \left[0, \frac{1}{8\beta} \wedge T\right].$$

Ne segue, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,

$$u \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \left[0, \frac{1}{8\beta} \wedge T\right].$$

Se  $\frac{1}{8\beta} \geq T$ , abbiamo concluso; altrimenti, l'intera argomentazione si può ripetere per le funzioni

$$u_1(x, t) = u(x, t + \frac{1}{8\beta}), \quad u_2(x, t) = u(x, t + \frac{2}{8\beta}), \quad u_3(x, t) = u(x, t + \frac{3}{8\beta}), \quad \text{ecc.},$$

e si ottiene la non negatività di  $u$  nelle strisce  $\mathbb{R}^n \times [\frac{1}{8\beta}, \frac{2}{8\beta}]$ ,  $\mathbb{R}^n \times [\frac{2}{8\beta}, \frac{3}{8\beta}]$ ,  $\mathbb{R}^n \times [\frac{3}{8\beta}, \frac{4}{8\beta}]$ , eccetera, fino a ricoprire  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$  dopo un numero finito di passi.  $\square$

**Corollario 3.2.7 (maggiorazione a priori)** *Sia  $T > 0$  e sia  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)$  una funzione tale che esistano  $R > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $K > 0$  per cui*

$$|u(x, t)| \leq K e^{\alpha|x|^2} \quad \text{per } |x| \geq R, \quad t \in [0, T].$$

Allora

$$|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, 0)| + T \cdot \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} |u_t - \Delta u| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, T].$$

**Dimostrazione** Se il secondo membro della disuguaglianza è infinito, non c'è nulla da dimostrare: supponiamo quindi che i due estremi superiori siano finiti. Consideriamo le funzioni

$$w_{\pm}(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, 0)| + t \cdot \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} |u_t - \Delta u| \pm u(x, t).$$

Allora si ha, denotando entrambe le funzioni con  $w$ ,

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} |u_t - \Delta u| \pm (u_t - \Delta u) \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ w(x, 0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, 0)| \pm u(x, 0) \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ w(x, t) \geq -|u(x, t)| \geq -K e^{\alpha|x|^2} & \text{per } |x| \geq R, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Dal teorema di Phragmén-Lindelöf segue che  $w \geq 0$ , ossia  $w_{\pm} \geq 0$ , in  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ , cioè la tesi.  $\square$

**Osservazioni 3.2.8 (1)** La maggiorazione a priori è ottimale: infatti se  $u(x, t) = 1 + t$ , si ha  $u_t - \Delta u = 1$ ,  $u(x, 0) = 1$  e il corollario precedente fornisce la stima  $1 + t \leq 1 + T$  in  $[0, T]$ , che è la più precisa possibile.

**(2)** Dal corollario precedente si ricava l'unicità e dipendenza continua dai dati in norma uniforme per la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, T[ \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \exists \alpha > 0 : |u(x, t)| = O(e^{\alpha|x|^2}) & \text{uniformemente in } [0, T] \text{ per } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

**(3)** In modo del tutto analogo, utilizzando il principio del massimo (proposizione 3.2.2), si dimostra la maggiorazione a priori per un aperto limitato  $\Omega$  e per una funzione  $u \in C(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times ]0, T[)$ :

$$|u(x, t)| \leq \max \left\{ \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x, 0)|, \max_{\partial\Omega \times [0, T]} |u| \right\} + T \cdot \sup_{\Omega \times ]0, T[} |u_t - \Delta u|$$

per ogni  $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$ ; da questa stima si deduce l'unicità e la dipendenza continua dai dati per il problema di Cauchy-Dirichlet (3.8), generalizzando il corollario 3.2.4.

Finora abbiamo visto teoremi di unicità e di dipendenza continua dai dati, supponendo, nel caso  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , che le soluzioni avessero un comportamento all'infinito non peggiore di  $e^{\alpha|x|^2}$ . Ma in realtà esistono soluzioni dell'equazione del calore in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$  che tendono all'infinito ancora più rapidamente.

**Esempio 3.2.9 (Tikhonov)** Consideriamo la funzione olomorfa

$$g(z) = e^{-1/z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

e definiamo la funzione

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} & \text{se } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } t = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Formalmente si ha, derivando la serie termine a termine,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.14)$$

e tra poco giustificheremo rigorosamente questi fatti. Da ciò segue che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = f & \text{in } \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \\ w(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

in cui *non* si prescrive per la  $w$  un andamento al più esponenziale all'infinito, non può avere soluzione unica, poiché se  $w$  è soluzione, anche  $w + u$  lo è, se  $u$  è la funzione di Tikhonov (3.13). Naturalmente, dato che tutto questo non deve contraddire il teorema di Phragmén-Lindelöf, la funzione (3.13) non può soddisfare alcuna disuguaglianza della forma

$$|u(x, t)| \leq K e^{\alpha|x|^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

con  $\alpha, T > 0$ .

Dimostriamo che vale (3.14). Cominciamo a far vedere che la serie in (3.13) è uniformemente convergente in ogni semi-striscia della forma  $[-a, a] \times [\delta, \infty[$ . Fissato  $t \geq \delta$ , la formula di Cauchy, applicata alla circonferenza  $C_t$  del piano complesso di centro  $t$  e raggio  $t/2$ , fornisce

$$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Poiché vale la relazione, di facile verifica,

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{4}{3t} \right| = \frac{2}{3t} \quad \forall z \in C_t,$$

si deduce che per ogni  $z \in C_t$  esiste  $\omega \in [0, 2\pi]$  tale che

$$\frac{1}{z} = \frac{4}{3t} \left( 1 + \frac{e^{i\omega}}{2} \right),$$

da cui

$$\frac{1}{z^2} = \frac{16}{9t^2} \left( 1 + \frac{e^{2i\omega}}{4} + e^{i\omega} \right),$$

e dunque

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z^2} = \frac{16}{9t^2} \left( 1 + \frac{\cos 2\omega}{4} + \cos \omega \right) \geq \frac{4}{9t^2} \quad \forall t \geq \delta,$$



ove l'ultima disuguaglianza si ottiene minimizzando rispetto a  $\omega$  in  $[0, 2\pi]$  (il minimo si ha per  $\omega = \pi$ ). Da qui, ricordando (3.15), ricaviamo

$$\begin{aligned} |g^{(k)}(t)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{C_t} \frac{|g(z)|}{|z-t|^{k+1}} |dz| = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\operatorname{Re}(-1/z^2)} t}{(t/2)^{k+1}} \frac{t}{2} d\vartheta \leq \\ &\leq k! \left(\frac{2}{t}\right)^k e^{-\frac{4}{9t^2}}; \end{aligned}$$

ottenendo infine

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|g^{(k)}(t)|}{(2k)!} x^{2k} \leq e^{-\frac{4}{9t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k! x^{2k}}{(2k)! t^k} \leq e^{-\frac{4}{9t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{x^{2k}}{t^k} = e^{-\frac{4}{9t^2} + \frac{x^2}{t}}, \quad (3.16)$$

cosicché la serie in (3.13) è convergente. Inoltre è facile constatare che, in particolare,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{(x,t) \in [-a,a] \times [\delta, \infty[} \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \right| = 0,$$

il che prova la convergenza uniforme. In modo analogo si dimostra che le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

sono uniformemente convergenti in  $[-a, a] \times [\delta, \infty[$ . Ne segue  $u_t - u_{xx} = 0$  in  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$ . Dalla (3.16) segue anche

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0 \quad \text{uniformemente rispetto a } x \in [-a, a],$$

e quindi  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$  e  $u(x, 0) = 0$ . La validità di (3.14) è provata.

### 3.3 La soluzione fondamentale

In questo paragrafo ci dedicheremo alla risoluzione esplicita del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ |u(x, t)| \leq K e^{\alpha|x|^2} & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \end{cases} \quad (3.17)$$

per opportuni  $\alpha, K > 0$ , ove  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . La soluzione sarà determinata attraverso la costruzione della cosiddetta *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore, per mezzo della quale, come vedremo in seguito, risolveremo anche i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann in  $\Omega \times [0, T]$ , con  $\Omega$  aperto limitato di tipo assai generale.

**Definizione 3.3.1** *Si chiama soluzione fondamentale dell'equazione del calore la funzione*

$$\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[. \quad (3.18)$$

Osserviamo che, come promette il suo nome, la funzione  $\Gamma(x, t)$  verifica

$$\Gamma_t - \Delta \Gamma = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[. \quad (3.19)$$

Infatti risulta, come è facile verificare,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \left[ -\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right], \quad (3.20)$$

$$D_i \Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \left[ -\frac{x_i}{2t} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

$$D_j D_i \Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \left[ \frac{x_j x_i}{4t^2} - \frac{\delta_{ij}}{2t} \right], \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.22)$$

e in particolare

$$D_i^2 \Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \left[ \frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.23)$$

da cui la (3.19).

Da dove scaturisce e come si utilizza la soluzione fondamentale? Cominciamo con un calcolo euristico. Supponiamo che  $u$  sia una soluzione (che sappiamo essere unica) del problema (3.17). Andiamo ad applicare la *trasformata di Fourier* all'equazione  $u_t - \Delta u = 0$ .

Ricordiamo che la trasformata di Fourier è l'operatore  $\mathcal{F}$  definito su  $L^1(\mathbb{R}^n)$  dalla corrispondenza  $f \mapsto \widehat{f}$ , ove

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

esso è bigettivo da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ove

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

e si estende univocamente ad un isomorfismo dello spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^n)$  in sé, con

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Inoltre la trasformata di Fourier gode delle seguenti proprietà:

$$\widehat{D_j u}(\xi) = i\xi_j \widehat{u}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ con } u, D_j u \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (3.24)$$

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (3.25)$$

ove il simbolo '\*' denota il *prodotto di convoluzione* fra due funzioni:

$$g * h(x) = h * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)h(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Applichiamo dunque la trasformata di Fourier (rispetto alla variabile  $x$ , con  $t > 0$  fissato), senza preoccuparci troppo del fatto che, a priori, la funzione  $u(\cdot, t)$  potrebbe non essere in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ : il conto che segue, in effetti, serve solo a costruire una "candidata soluzione". Si ottiene, tenuto conto della proprietà (3.24),

$$\widehat{u}_t(\xi, t) + |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) = 0 \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[, \quad (3.26)$$

mentre dalla condizione iniziale si ricava

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\varphi}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.27)$$

Le condizioni (3.26)-(3.27) determinano un problema di Cauchy per una equazione ordinaria del primo ordine, dipendente dal parametro  $\xi$ . La sua unica soluzione è

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}, \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[.$$

D'altra parte è noto, benché la verifica richieda qualche accorgimento tecnico, che

$$e^{-|\xi|^2 t} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \widehat{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}(\xi) = \mathcal{F} \left( \frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \right) (\xi),$$

cosicché

$$\widehat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{e^{-|\cdot|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\right)(\xi),$$

e, per la proprietà (3.25), concludiamo che se  $u$  è soluzione di (3.17), allora  $u$  è data da

$$u(x, t) = \frac{e^{-|\cdot|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} * \varphi(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy, \quad (3.28)$$

ossia

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t) \varphi(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[. \quad (3.29)$$

Possiamo ora enunciare il teorema di esistenza seguente:

**Teorema 3.3.2** *Se  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , allora il problema (3.17) ha un'unica soluzione  $u$  data dalla (3.29), ove  $\Gamma$  è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore definita da (3.18). Inoltre  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$  e si ha*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

**Dimostrazione** Dobbiamo far vedere che la funzione (3.29) è davvero soluzione di (3.17). Questo non è troppo complicato: infatti nella soluzione fondamentale  $\Gamma$  è presente un'esponenziale negativa che permette di derivare la funzione  $u$  quante volte si vuole portando la derivata sotto il segno di integrale. È facile allora verificare che  $u_t = \Delta u$  in ogni punto di  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ . Più delicato è verificare che  $u(x, 0) = \varphi(x)$ : a questo scopo, notiamo per cominciare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} dy = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} d\xi = 1 \quad \forall t > 0, \quad (3.30)$$

per cui, fissato  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , possiamo scrivere la differenza  $u(x, t) - \varphi(x_0)$  nel modo seguente:

$$u(x, t) - \varphi(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} [\varphi(y) - \varphi(x_0)] dy. \quad (3.31)$$

Sia  $\varepsilon > 0$ : poiché  $\varphi$  è continua in  $x_0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$  per  $|y - x_0| < \delta$ . Inoltre esiste  $\tau > 0$  tale che

$$\int_{|\eta|>r} e^{-|\eta|^2} d\eta < \varepsilon \quad \forall r \geq \tau.$$

Da (3.31) segue allora, posto  $\xi = y - x_0$  e successivamente  $\eta = \frac{x-x_0-\xi}{2\sqrt{t}}$ ,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \varphi(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-x_0-\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} [\varphi(x_0 + \xi) - \varphi(x_0)] d\xi \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{|\xi|<\delta} \frac{e^{-\frac{|x-x_0-\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} d\xi + 2\|\varphi\|_\infty \int_{|\xi|\geq\delta} \frac{e^{-\frac{|x-x_0-\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} d\xi < \\ &< \varepsilon + 2\pi^{-n/2}\|\varphi\|_\infty \int_{|2\eta\sqrt{t}+x-x_0|\geq\delta} e^{-|\eta|^2} d\eta. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni  $(x, t)$  tale che  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$  e  $0 < t < \frac{\delta^2}{16\tau^2}$ , otteniamo

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon + 2\pi^{-n/2}\|\varphi\|_\infty \int_{|\eta|\geq\tau} e^{-|\eta|^2} d\eta < C\varepsilon,$$

ove  $C$  è un'opportuna costante. Pertanto

$$\lim_{(x,t)\rightarrow(x_0,0)} u(x, t) = \varphi(x_0). \quad (3.32)$$

Infine, utilizzando (3.30) si verifica immediatamente che

$$\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty,$$

e ciò prova che la funzione (3.28) risolve il problema (3.17).  $\square$

**Osservazioni 3.3.3 (1)** La soluzione dell'equazione del calore fornita dal teorema 3.3.2 è di classe  $C^\infty$  (anzi analitica, come vedremo) in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ , anche se il dato iniziale  $\varphi$  è solo una funzione continua: c'è quindi un fenomeno di regolarizzazione nel tempo che è tipico delle equazioni paraboliche e non si riscontra invece nelle iperboliche. Questa proprietà è un'altra similitudine fra equazioni paraboliche ed ellittiche.

(2) Se, invece della condizione  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  e  $u(x, 0) = \varphi(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , richiedessimo la condizione più debole

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

perderemmo l'unicità della soluzione. Ad esempio, per  $n = 1$ , la funzione (3.21), ossia

$$v(x, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(4t)^{3/2}}$$

risolve l'equazione  $v_t - v_{xx} = 0$  in  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$ , è continua in  $\mathbb{R} \times [0, \infty[ \setminus \{(0, 0)\}$  ed ha limite nullo per  $t \rightarrow 0$  in ogni punto  $x \in \mathbb{R}$ , senza essere identicamente nulla; d'altra parte la funzione identicamente nulla gode delle stesse proprietà.

(3) Abbiamo sempre preso  $t = 0$  come istante iniziale nel problema di Cauchy: nulla vieta però di scegliere invece un qualunque  $s \in \mathbb{R}$ . La soluzione del problema (3.17) con istante iniziale  $s$  è

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) \varphi(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]s, \infty[. \quad (3.33)$$

(4) Il problema di Cauchy a ritroso nel tempo non è ben posto, perché manca la dipendenza continua dai dati: ad esempio, per ogni  $\varepsilon > 0$ , la funzione

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}} \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

risolve l'equazione del calore in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ed anche, in particolare, il problema di Cauchy "all'indietro"

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t - \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times ]-\infty, 0[ \\ u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Benché si abbia  $\varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow 0$  uniformemente per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , risulta per ogni  $T > 0$

$$\|u_\varepsilon\|_{C(\mathbb{R}^n \times [-T, 0])} = \varepsilon e^{T/\varepsilon^2} \rightarrow +\infty \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Questo fatto illustra in qualche senso l'*irreversibilità* dei fenomeni di diffusione.

(5) Sia  $\varphi$  una funzione continua e non negativa su  $\mathbb{R}^n$ , non identicamente nulla e tale che  $\varphi = 0$  fuori della palla  $B(x_0, r)$ . Allora la soluzione

$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$  è strettamente positiva per ogni  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Questo ci dice che nei problemi parabolici le perturbazioni si propagano con velocità infinita.

**(6)** C'è una versione più generale del teorema 3.3.2, nella quale il dato iniziale  $\varphi$  verifica la condizione

$$\varphi \in C(\mathbb{R}^n), \quad x \mapsto \varphi(x) e^{-\alpha|x|^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

per un fissato  $\alpha > 0$ . Sotto queste ipotesi si può provare che la funzione (3.29) è soluzione del problema in  $\mathbb{R}^n \times ]0, T]$  per ogni  $T < \frac{1}{4\alpha}$ . La dimostrazione è analoga, con qualche complicazione in più per verificare che le derivazioni sotto il segno di integrale sono ancora lecite.

La soluzione fondamentale  $\Gamma(x, t)$  utilizzata nella dimostrazione del teorema 3.3.2 gode, come abbiamo visto, di svariate interessanti proprietà, che qui rielenchiamo. Anzitutto (si veda (3.19)) essa risolve l'equazione del calore in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ . Poi, per (3.30), per ogni  $t > 0$  tale funzione è la densità di una misura  $\mu_t$  su  $\mathbb{R}^n$  di massa unitaria:

$$\mu_t(E) = \int_E \Gamma(x, t) dx, \quad \mu_t(\mathbb{R}^n) = 1 \quad \forall t > 0. \quad (3.34)$$

Inoltre, le relazioni (3.32) e (3.29) ci dicono che le misure  $\mu_t$ , pensate come operatori lineari e continui sullo spazio di Banach  $C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , convergono debolmente\* alla misura di Dirac  $\delta_0$  per  $t \rightarrow 0^+$ , ossia risulta, per ogni  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \mu_t, \varphi \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) \varphi(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Infine, osserviamo che, denotando con  $u(x, t; s, \varphi)$  la funzione (3.33), ossia la soluzione del problema (con  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $s \in \mathbb{R}$  fissati)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]s, \infty[ \\ u(x, s) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ |u(x, t)| \leq K e^{\alpha|x|^2} & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [s, \infty[, \end{cases} \quad (3.35)$$

si vede immediatamente che essa è continua rispetto a  $(x, t, s)$  in  $\mathbb{R}^n \times \{(t, s) : 0 \leq t - s\}$ , nonché lineare rispetto a  $\varphi$ . Inoltre, per unicità, si ha

$$u(x, t; s, \varphi) = u(x, t; \tau, u(\cdot, \tau; s, \varphi)) \quad \forall \tau \in [s, t].$$

Introducendo l'operatore  $\Omega_t : C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , definito per ogni  $t > 0$  da

$$(\Omega_t \varphi)(x) = u(x, t; 0, \varphi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

si ottiene allora che ciascun  $\Omega_t$  è lineare e continuo sullo spazio  $C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , con norma uguale a 1, e la famiglia  $\{\Omega_t\}_{t \geq 0}$  è un *semigruppò di operatori*, ossia verifica

$$\Omega_0 = I, \quad \Omega_{t+\tau} = \Omega_t \circ \Omega_\tau \quad \forall t, \tau \geq 0;$$

scrivendo esplicitamente questa relazione applicata a una generica  $\varphi$ , e applicando il teorema di Fubini, si ottiene in particolare, per l'arbitrarietà di  $\varphi$ , la seguente identità soddisfatta dalla soluzione fondamentale:

$$\Gamma(x - \xi, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) \Gamma(y - \xi, \tau) dy \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t, \tau > 0.$$

La formula (3.33) ha un'interpretazione fisica in termini di calore e temperatura. La quantità  $\Gamma(x - \xi, t - s)$  è la temperatura che si ha nel punto  $x$  all'istante  $t$ , indotta da un'emanazione di calore unitaria, avvenuta istantaneamente al tempo  $s$  e concentrata nel punto  $\xi$ . Il contributo alla temperatura in  $x$  al tempo  $t$  dovuto al calore presente in  $\xi$  al tempo  $s$  è dunque pari a  $\Gamma(x - \xi, t - s)\varphi(\xi)$ . La somma di tutti i contributi emanati all'istante  $s$ , che determina la temperatura effettiva  $u(x, t)$  nel punto  $x$  al tempo  $t$ , è dunque data dall'integrale  $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - s)\varphi(\xi) d\xi$ .

Useremo la soluzione fondamentale per costruire le soluzioni di svariati problemi ai limiti. A questo scopo è necessario procurarci alcune utili maggiorazioni per essa e per le sue derivate.

**Proposizione 3.3.4** *Sia  $\Gamma$  la soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Allora esistono  $C, L > 0$  tali che per ogni  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $t > 0$  si ha:*

- (i)  $|\Gamma(x, t)| \leq C t^{-\frac{n}{2}} e^{-L \frac{|x|^2}{t}};$
- (ii)  $|D_i \Gamma(x, t)| \leq C t^{-\frac{n+1}{2}} e^{-L \frac{|x|^2}{t}}, \quad i = 1, \dots, n;$
- (iii)  $|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t)| \leq C t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-L \frac{|x|^2}{t}};$
- (iv)  $|D_i D_j \Gamma(x, t)| \leq C t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-L \frac{|x|^2}{t}}, \quad i, j = 1, \dots, n;$



(v)  $|\Gamma(x, t) - \Gamma(x_0, t)| \leq C |x - x_0|^\beta t^{-\frac{n+\beta}{2}} e^{-L\frac{(|x|\wedge|x_0|)^2}{t}}$  per ogni  $\beta \in [0, 1]$ ;

(vi)  $|D_i\Gamma(x, t) - D_i\Gamma(x_0, t)| \leq C |x - x_0|^\beta t^{-\frac{n+1+\beta}{2}} e^{-L\frac{(|x|\wedge|x_0|)^2}{t}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  
per ogni  $\beta \in [0, 1]$ .

**Dimostrazione** Sono tutte verifiche facili che si fanno per mezzo di una stima esplicita, partendo dalle (3.18), (3.20), (3.21) e (3.22). Verifichiamo la (vi) che si ottiene invece per interpolazione (come la (v), ma quest'ultima è analoga e ancora più semplice). Usando (ii) si ha

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x, t) - D_i\Gamma(x_0, t)| &\leq |D_i\Gamma(x, t)| + |D_i\Gamma(x_0, t)| \leq \\ &\leq 2C t^{-\frac{n+1}{2}} e^{-L\frac{(|x|\wedge|x_0|)^2}{t}}, \end{aligned}$$

mentre usando (iv) e il teorema del valor medio si trova

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x, t) - D_i\Gamma(x_0, t)| &= |\langle \nabla D_i\Gamma(\xi, t), x - x_0 \rangle| \leq \\ &\leq nC |x - x_0| t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-L\frac{(|x|\wedge|x_0|)^2}{t}}; \end{aligned}$$

dunque, fissato  $\beta \in [0, 1]$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x, t) - D_i\Gamma(x_0, t)| &= |D_i\Gamma(x, t) - D_i\Gamma(x_0, t)|^{(1-\beta)+\beta} \leq \\ &\leq \left[ 2C t^{-\frac{n+1}{2}} e^{-L\frac{(|x|\wedge|x_0|)^2}{t}} \right]^{1-\beta} \left[ nC |x - x_0| t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-L\frac{(|x|\wedge|x_0|)^2}{t}} \right]^\beta, \end{aligned}$$

da cui segue subito la tesi.  $\square$

Concludiamo questo paragrafo mostrando che la soluzione del problema di Cauchy (3.17) è una funzione analitica per qualunque dato  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , come annunciato nell'osservazione 3.3.3(1).

**Teorema 3.3.5** *Se  $u$  risolve il problema di Cauchy (3.17) in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ , allora  $u$  è analitica in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ .*

**Dimostrazione** Anzitutto, la soluzione fondamentale è ben definita in campo complesso: infatti l'espressione

$$\Gamma(z, \tau) = \frac{e^{-\frac{\langle z, z \rangle}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{n/2}}$$

ha senso, ed è anzi olomorfa, per  $z \in \mathbb{C}^n$  e  $\tau \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} \tau > 0$ , se si prende come radice quadrata di  $\tau$  quella con parte reale positiva. Inoltre, per ogni

$\xi \in \mathbb{R}^n$ , per ogni  $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ , e per ogni  $\tau = t + i\sigma$  con  $t > 0$  si ha, ponendo  $\lambda = \frac{\sigma}{t}$  (cosicché  $\sqrt{1 + \lambda^2} = \frac{|\tau|}{t}$ ):

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z - \xi, \tau)| &= |(4\pi\tau)^{-n/2}| \cdot \left| e^{-\frac{\langle z - \xi, z - \xi \rangle}{4\tau}} \right| = \\
&= (4\pi t \sqrt{1 + \lambda^2})^{-n/2} \left| e^{-\frac{\langle x - \xi + iy, x - \xi + iy \rangle}{4t(1 + \lambda^2)} \frac{1 - i\lambda}{1 - i\lambda}} \right| = \\
&= (4\pi t \sqrt{1 + \lambda^2})^{-n/2} e^{-\frac{|x - \xi|^2 + |y|^2 - 2\lambda \langle y, x - \xi \rangle}{4t(1 + \lambda^2)}} e^{-\frac{\lambda^2 |y|^2}{4t(1 + \lambda^2)}} e^{-\frac{\lambda^2 |y|^2}{4t(1 + \lambda^2)}} = \\
&= (1 + \lambda^2)^{n/4} (4\pi t (1 + \lambda^2))^{-n/2} e^{\frac{|y|^2}{4t}} e^{-\frac{|x - \xi + \lambda y|^2}{4t(1 + \lambda^2)}} = \\
&= (1 + \lambda^2)^{n/4} e^{\frac{|y|^2}{4t}} \Gamma(x - \xi + \lambda y, t(1 + \lambda^2)).
\end{aligned}$$

Ne segue che per ogni  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z - \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi$$

è convergente per ogni  $(z, \tau) \in \mathbb{C}^{n+1}$  con  $\operatorname{Re} \tau > 0$ ; quindi esso definisce una funzione  $u(z, \tau)$  continua che estende la soluzione del problema (3.17) alla regione di  $\mathbb{C}^{n+1}$  sopra descritta.

Analogamente si verifica che tutte le derivate di  $u$  rispetto a  $x, y, t, \sigma$  si ottengono derivando sotto il segno di integrale e sono continue in  $A = \{(z, \tau) \in \mathbb{C}^{n+1} : \operatorname{Re} \tau > 0\}$ . Ma allora, poiché  $\Gamma$ , essendo olomorfa, verifica in quella regione le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} D_{y_j} \Gamma = i D_{x_j} \Gamma, & j = 1, \dots, n \\ \Gamma_\sigma = i \Gamma_t, \end{cases}$$

lo stesso accadrà per la  $u$ , che dunque è anch'essa olomorfa nella regione  $A$ . In particolare,  $u(x, t)$  è una funzione analitica in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ .  $\square$

**Osservazione 3.3.6** Un risultato analogo vale per la soluzione del problema di Cauchy (3.17) quando il dato iniziale  $\varphi$  è supposto continuo e tale che  $x \mapsto \varphi(x) e^{-\alpha|x|^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ; l'unica differenza è che la soluzione  $u$  si estenderà olomorficamente nella regione

$$\left\{ (z, \tau) \in \mathbb{C}^{n+1} : \operatorname{Re} \tau > 0, |\operatorname{Im} \tau| < \sqrt{\frac{1 - 4\alpha T}{4\alpha T}} \operatorname{Re} \tau \right\} \quad \forall T \in \left] 0, \frac{1}{4\alpha} \right[.$$

In particolare,  $u$  sarà analitica in  $\mathbb{R}^n \times ]0, T[$  per ogni  $T \in ]0, \frac{1}{4\alpha}[$ .

### 3.4 Il problema di Cauchy non omogeneo

La soluzione fondamentale ha un ruolo basilare anche per costruire la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[, \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ |u(x, t)| \leq Ke^{\alpha|x|^2} & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \end{cases} \quad (3.36)$$

con  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$ . Vale un “metodo di variazione delle costanti arbitrarie” analogo al caso delle equazioni differenziali ordinarie. Dal punto di vista fisico, infatti,  $f(\xi, s)$  rappresenta una sorgente che emana calore nel punto  $\xi$  all'istante  $s$ : quindi  $\Gamma(x - \xi, t - s)f(\xi, s)$  è il contributo di calore, emesso nel punto  $\xi$  al tempo  $s$ , che va ad influenzare la temperatura nel punto  $x$  all'istante  $t$ . La somma di tutti questi contributi, al variare del punto e dell'istante di emanazione, è l'integrale

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - s)f(\xi, s) d\xi ds,$$

il quale dunque deve coincidere con la soluzione calcolata in  $(x, t)$ . E in effetti vale il seguente risultato:

**Teorema 3.4.1** *Se  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$  e se inoltre essa è hölderiana di esponente  $\varepsilon \in ]0, 1]$  rispetto a  $x$  oppure rispetto a  $t$ , uniformemente nell'altra variabile, allora la funzione*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - s)f(\xi, s) d\xi ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \quad (3.37)$$

*appartiene a  $C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$  e risolve il problema (3.36). Inoltre si ha*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)} \leq T \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)} \quad \forall T > 0.$$

**Dimostrazione** L'ipotesi su  $f$  dice che esiste  $K \geq 0$  tale che

$$|f(x, t) - f(x', t)| \leq K|x - x'|^\varepsilon \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.38)$$

oppure

$$|f(x, t) - f(x, t')| \leq K|t - t'|^\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t, t' \geq 0. \quad (3.39)$$

Abbiamo una candidata soluzione  $u$ , data da (3.37), e motivata dalle considerazioni fisiche sopra esposte. Per verificare che essa è soluzione per davvero, dobbiamo derivare sotto il segno di integrale: cominciamo dunque col giustificare tale possibilità. Il problema non è banale, perché l'integrando che compare nella definizione di  $u$  contiene una singolarità nell'estremo  $t$ . Supponiamo che  $f$  soddisfi (3.38) e fissiamo  $\delta > 0$ . Per  $0 < h < \delta$  consideriamo le funzioni

$$u_h(x, t) = \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - s) f(\xi, s) d\xi ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [\delta, \infty[.$$

Esse sono ovviamente derivabili rispetto a  $t$  (abbiamo tolto la singolarità dell'integrando in  $s = t$ ) e si ha

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, h) f(\xi, t - h) d\xi + \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s) f(\xi, s) d\xi ds;$$

osservando che, in virtù della (3.34), risulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s) d\xi = \frac{d}{dt} 1 = 0 \quad \forall t > s,$$

possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, h) f(\xi, t - h) d\xi + \\ &+ \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s) [f(\xi, s) - f(x, s)] d\xi ds. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} |u_h(x, t) - u(x, t)| &= \left| \int_{t-h}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - s) f(\xi, s) d\xi ds \right| \leq \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{t-h}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - s) d\xi ds = \|f\|_\infty h, \end{aligned}$$

cosicché  $u_h \rightarrow u$  per  $h \rightarrow 0$  uniformemente in  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty[$ . In particolare,  $u$  è continua in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ . Inoltre la continuità di  $u$  per  $t = 0$ , con  $u(x, 0) = 0$ , è evidente dall'esame della formula (3.37).

Per quanto riguarda  $(u_h)_t$ , tenuto conto di (3.31) e (3.32) l'ipotetico limite per  $h \rightarrow 0$  dovrebbe essere, almeno formalmente,

$$w(x, t) := f(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s)[f(\xi, s) - f(x, s)] d\xi ds. \quad (3.40)$$

Verifichiamo intanto che questa espressione ha senso: si ha, ricordando la proposizione 3.3.4(ii) e la (3.38), e utilizzando il cambiamento di variabili  $\sqrt{\frac{L}{t-s}}(\xi - x) = y$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s)[f(\xi, s) - f(x, s)] d\xi ds \right| &\leq \\ &\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (t - s)^{-\frac{n}{2}-1} K |\xi - x|^\varepsilon e^{-\frac{L|\xi-x|^2}{(t-s)}} d\xi ds = \\ &= L^{-n/2} CK \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (t - s)^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} |y|^\varepsilon e^{-|y|^2} dy ds < \infty. \end{aligned}$$

Valutiamo allora la differenza  $(u_h)_t - w$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) - w(x, t) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, h) f(\xi, t - h) d\xi - f(x, t) \right| + \\ &+ \left| \int_{t-h}^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s)[f(\xi, s) - f(x, s)] d\xi ds \right|. \end{aligned}$$

Per il primo addendo, con un cambiamento di variabili si ha, ricordando la proposizione 3.3.4(i) e il fatto che  $t \mapsto f(x, t)$  è continua,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, h) f(\xi, t - h) d\xi - f(x, t) \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, h)[f(\xi, t - h) - f(x, t - h)] d\xi \right| + |f(x, t - h) - f(x, t)| \leq \\ &\leq L^{-n/2} CK |h|^{\varepsilon/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^\varepsilon e^{-|\eta|^2} d\eta + o(1) = o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

mentre il secondo termine è evidentemente anch'esso infinitesimo per  $h \rightarrow 0$ , trattandosi dell'integrale di una funzione sommabile su un intervallo che va riducendosi a un punto. Si noti inoltre che le convergenze ottenute sono uniformi in  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty[$ . Abbiamo così

$$u_h \rightarrow u, \quad \frac{\partial u_h}{\partial t} \rightarrow w \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R}^n \times [\delta, \infty[:$$

ciò implica, essendo  $\delta$  arbitrario, che esiste  $\frac{\partial u}{\partial t} = w$  in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ .  
 In maniera assolutamente analoga si prova che esiste  $\Delta u$  in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ , e che

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \Gamma(x - \xi, t - s) [f(\xi, s) - f(x, s)] d\xi ds, \quad (3.41)$$

e poiché  $\Gamma$  verifica l'equazione del calore, da (3.40) e (3.41) si ottiene subito  $u_t - \Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ . La tesi del teorema è provata nel caso in cui  $f$  è hölderiana rispetto alla variabile  $x$ .

Se invece vale la condizione (3.39), si procede nello stesso modo, trovando stavolta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - s) [f(\xi, s) - f(\xi, t)] d\xi ds + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t) f(\xi, t) d\xi, \\ \Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \Gamma(x - \xi, t - s) [f(\xi, s) - f(\xi, t)] d\xi ds + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t) f(\xi, t) d\xi - f(x, t), \end{aligned}$$

da cui nuovamente si ottiene  $u_t - \Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ .  $\square$

La soluzione fondamentale verrà anche impiegata, nel seguito, per risolvere i problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore omogenea, con dato iniziale nullo, in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times ]0, T], \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \bar{\Omega}, \\ u(x, t) = \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times ]0, T], \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.43)$$

ove, in entrambi i casi, supporremo che  $\psi \in C(\partial\Omega \times [0, T])$ , e che  $\Omega$  sia un aperto limitato con frontiera regolare.

Prima di avviarcì alla risoluzione di tali problemi, occorre però uno studio preliminare delle equazioni integrali di Volterra, che, come vedremo, giocheranno un ruolo fondamentale. A questo studio è dedicato il paragrafo che segue.

### 3.5 Equazioni integrali di Volterra

Le equazioni integrali di Volterra sono equazioni funzionali del tipo

$$g(x) + \int_X K(x, y) g(y) d\mu(y) = f(x), \quad x \in X,$$

ove  $(X, \mu)$  è uno spazio misurato, la funzione  $K$  (detta *nucleo*) è sommabile in  $X \times X$  rispetto alla misura prodotto  $\mu \times \mu$ ,  $f$  è una funzione nota, appartenente a  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , oppure a  $C(X)$  (quando  $X$  è anche uno spazio metrico compatto), e  $g$  è l'incognita, che si cerca nello stesso spazio a cui appartiene  $f$ . Piuttosto che fare uno studio generale, noi ci limiteremo ad equazioni integrali della forma seguente:

$$q(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} K(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = p(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3.44)$$

ove  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  con frontiera di classe  $C^1$ ,  $p \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  è assegnata,  $q \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  è l'incognita, e infine il nucleo  $K(x, \xi, t, \tau)$  è una funzione continua in  $\partial\Omega \times \partial\Omega \times [0, T] \times [0, T]$  ad eccezione dei punti in cui  $x = \xi$  oppure  $t = \tau$ , e verifica la stima

$$|K(x, \xi, t, \tau)| \leq H |t - \tau|^{\beta-1} |x - \xi|^{\gamma-n+1} \quad \forall x \neq \xi, \forall t \neq \tau, \quad (3.45)$$

ove  $\beta, \gamma$  sono numeri positivi.

Definiamo l'operatore  $J : C(\partial\Omega \times [0, T]) \rightarrow C(\partial\Omega \times [0, T])$  nel modo seguente:

$$(Jq)(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} K(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau, \quad q \in C(\partial\Omega \times [0, T]). \quad (3.46)$$

Allora l'equazione (3.44) si può scrivere così:

$$(I + J)q = p;$$

la sua soluzione è

$$q = (I + J)^{-1}p = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J^m p, \quad (3.47)$$

purché la serie sopra scritta converga in qualche senso; naturalmente  $J^m$  significa  $J \circ J \circ \dots \circ J$  ( $m$  volte). Proveremo:

- (a) che  $J$  e le sue potenze  $J^m$  sono operatori lineari e continui dallo spazio  $C(\partial\Omega \times [0, T])$  in sé;
- (b) che tali operatori sono operatori integrali con nucleo costruito esplicitamente;
- (c) che la serie in (3.47) converge nello spazio  $C(\partial\Omega \times [0, T])$ .

Questi fatti ci permetteranno di risolvere univocamente l'equazione di Volterra (3.44), con soluzione che dipenderà con continuità dal secondo membro. Cominciamo lo studio della (3.44) con alcuni lemmi.

**Lemma 3.5.1** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$ . Se  $0 < \gamma \leq n - 1$ , esiste  $N_\gamma \geq 0$  tale che*

$$\int_{\partial\Omega} |x - \xi|^{\gamma-n+1} |\xi - y|^{\gamma-n+1} d\sigma_\xi \leq N_\gamma |x - y|^{\gamma-n+1} \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

**Dimostrazione** Per ogni  $x, \xi, y \in \partial\Omega$  si ha

$$\begin{aligned} |x - \xi|^{\gamma-n+1} |\xi - y|^{\gamma-n+1} &= \left[ \frac{|x - y|}{|x - \xi| |\xi - y|} \right]^{n-1-\gamma} |x - y|^{\gamma-n+1} \leq \\ &\leq \left[ \frac{|x - \xi| + |\xi - y|}{|x - \xi| |\xi - y|} \right]^{n-1-\gamma} |x - y|^{\gamma-n+1} = \\ &= \left[ \frac{1}{|\xi - y|} + \frac{1}{|x - \xi|} \right]^{n-1-\gamma} |x - y|^{\gamma-n+1}. \end{aligned}$$

Integrando rispetto a  $\xi$  su  $\partial\Omega$  si trova (per subadditività se  $0 \leq n - 1 - \gamma < 1$ , per convessità se  $n - 1 - \gamma \geq 1$ ):

$$\int_{\partial\Omega} |x - \xi|^{\gamma-n+1} |\xi - y|^{\gamma-n+1} d\sigma_\xi \leq C |x - y|^{\gamma-n+1} \sup_{\eta \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\xi - \eta|^{n-1-\gamma}} d\sigma_\xi,$$

ove  $C = \max\{2, 2^{n-1-\gamma}\}$ . La tesi segue osservando che l'esponente dell'integrando a secondo membro è strettamente minore della dimensione della varietà dove si integra, cosicché l'estremo superiore è certamente finito.  $\square$



**Lemma 3.5.2** Sia  $\Gamma$  la funzione di Eulero, definita da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} q^{\alpha-1} e^{-q} dq, \quad \alpha > 0.$$

Allora

$$\int_0^1 q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} dq = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \forall \alpha, \beta > 0.$$

**Dimostrazione** Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q^{2\alpha-1} p^{2\beta-1} e^{-p^2-q^2} dpdq$$

in due modi. Separando le variabili si trova

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} q^{2\alpha-1} e^{-q^2} dq \cdot \int_0^{\infty} p^{2\beta-1} e^{-p^2} dp = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{4}. \end{aligned}$$

Utilizzando le coordinate polari si ha invece

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \rho^{2\alpha+2\beta-2} \cos^{2\alpha-1} \vartheta \sin^{2\beta-1} \vartheta e^{-\rho^2} \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_0^{\infty} \rho^{2\alpha+2\beta-1} e^{-\rho^2} d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1} \vartheta \sin^{2\beta-1} \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

da cui, posto  $r = \rho^2$  e  $p = \cos^2 \vartheta$ ,

$$I = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{4} \int_0^1 p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} dp.$$

Uguagliando le due espressioni di  $I$ , si ha la tesi.  $\square$

**Lemma 3.5.3** Sia  $\Gamma$  la funzione di Eulero. Allora per ogni  $\beta > 0$  la serie di potenze

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m\beta)}$$

ha raggio di convergenza  $+\infty$ .

**Dimostrazione** La tesi segue facilmente applicando il criterio del rapporto, il lemma 3.5.2 ed il teorema di convergenza dominata.  $\square$

Nel lemma che segue si introducono i nuclei per mezzo dei quali si rappresentano le potenze dell'operatore integrale  $J$  definito in (3.46).

**Lemma 3.5.4** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$ . Sia  $J$  l'operatore definito in (3.46) e supponiamo che il suo nucleo  $K$  sia una funzione continua per  $x \neq \xi$  e  $t \neq \tau$ , verificante la condizione (3.45). Allora per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  si ha*

$$(J^m q)(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} K_m(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau, \quad q \in C(\partial\Omega \times [0, T]), \quad (3.48)$$

ove  $K_m$  è definito da

$$\begin{cases} K_1(x, \xi, t, \tau) = K(x, \xi, t, \tau), \\ K_m(x, \xi, t, \tau) = \int_\tau^t \int_{\partial\Omega} K(x, \eta, t, s) K_{m-1}(\eta, \xi, s, \tau) d\sigma_\eta ds \quad \forall m > 1. \end{cases}$$

Inoltre  $K_m$  è continuo per  $x \neq \xi$  e  $t \neq \tau$ , e per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  vale la stima

$$|K_m(x, \xi, t, \tau)| \leq H^m N_\gamma^{m-1} \frac{\Gamma(\beta)^m}{\Gamma(m\beta)} |t - \tau|^{m\beta-1} |x - \xi|^{\gamma-n+1}. \quad (3.49)$$

**Dimostrazione** La stima è banale per  $m = 1$ . Se essa è vera per  $m - 1$ , allora dalla (3.45) e dall'ipotesi induttiva, utilizzando i lemmi 3.5.2 e 3.5.1, segue

$$\begin{aligned} |K_m(x, \xi, t, \tau)| &\leq \frac{H^m N_\gamma^{m-2} \Gamma(\beta)^{m-1}}{\Gamma((m-1)\beta)} \times \\ &\quad \times \int_\tau^t \int_{\partial\Omega} |t - s|^{\beta-1} |x - \eta|^{\gamma-n+1} |s - \tau|^{(m-1)\beta-1} |\eta - \xi|^{\gamma-n+1} d\sigma_\eta ds \leq \\ &\leq H^m N_\gamma^{m-2} \frac{\Gamma(\beta)^{m-1}}{\Gamma((m-1)\beta)} \int_\tau^t (t - s)^{\beta-1} |s - \tau|^{(m-1)\beta-1} ds \times \\ &\quad \times \int_{\partial\Omega} |x - \eta|^{\gamma-n+1} |\eta - \xi|^{\gamma-n+1} d\sigma_\eta \leq \\ &\leq H^m N_\gamma^{m-1} \frac{\Gamma(\beta)^m}{\Gamma(m\beta)} |t - \tau|^{m\beta-1} |x - y|^{\gamma-n+1}. \end{aligned}$$

Ciò prova la (3.49). Questa, a sua volta, permette di definire l'operatore integrale che appare in (3.48); occorre provare che tale operatore coincide con la potenza  $J^m$ . In effetti ciò è banalmente vero per  $m = 1$ ; se poi la (3.48) vale per  $m - 1$ , allora

$$\begin{aligned}
(J^m q)(x, t) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} K(x, \eta, t, s) (J^{m-1} q)(\eta, s) d\sigma_\eta ds = \\
&= \int_0^t \int_{\partial\Omega} K(x, \eta, t, s) \int_0^s \int_{\partial\Omega} K_{m-1}(\eta, \xi, s, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau d\sigma_\eta ds = \\
&= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left( \int_\tau^t \int_{\partial\Omega} K(x, \eta, t, s) K_{m-1}(\eta, \xi, s, \tau) d\sigma_\eta ds \right) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = \\
&= \int_0^t \int_{\partial\Omega} K_m(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau,
\end{aligned}$$

e la formula (3.48) è provata.  $\square$

**Corollario 3.5.5** *Sia  $J$  l'operatore integrale definito da (3.46). Allora per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  risulta  $J^m \in \mathcal{L}(C(\partial\Omega \times [0, T]))$ , con*

$$\|J^m\|_{\mathcal{L}(C(\partial\Omega \times [0, T]))} \leq B H^m N_\gamma^{m-1} T^{m\beta} \frac{\Gamma(\beta)^m}{\Gamma(m\beta)},$$

ove  $B = \sup_{x \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |x - \xi|^{\gamma-n+1} d\sigma_\xi$ .

**Dimostrazione** Dal lemma precedente e dalla stima (3.49) segue facilmente che per ogni  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$  si ha

$$\begin{aligned}
\|J^m q(x, t)\| &\leq \int_0^t \int_{\partial\Omega} |K_m(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau)| d\sigma_\xi d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \int_{\partial\Omega} H^m N_\gamma^{m-1} \frac{\Gamma(\beta)^m}{\Gamma(m\beta)} |t - \tau|^{m\beta-1} |x - \xi|^{\gamma-n+1} d\sigma_\xi d\tau \|q\|_{C(\partial\Omega \times [0, T])} \leq \\
&\leq H^m N_\gamma^{m-1} T^{m\beta} \frac{\Gamma(\beta)^m}{\Gamma(m\beta)} \int_{\partial\Omega} |x - \xi|^{\gamma-n+1} d\sigma_\xi \|q\|_{C(\partial\Omega \times [0, T])}
\end{aligned}$$

da cui la tesi.  $\square$

Come conseguenza del lemma precedente e del lemma 3.5.3, è ben definito il nucleo

$$Q(x, \xi, t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_m(x, \xi, t, \tau) \quad (3.50)$$

per ogni  $x, \xi \in \partial\Omega$  e  $t, \tau \in [0, T]$  con  $x \neq \xi$  e  $t \neq \tau$ : infatti tale serie è totalmente convergente in ogni insieme della forma

$$\{(x, \xi, t, \tau) \in \partial\Omega \times \partial\Omega \times [0, T] \times [0, T] : |x - \xi| \geq \varepsilon, |t - \tau| \geq \varepsilon\},$$

in virtù della maggiorazione

$$\begin{aligned} |Q(x, \xi, t, \tau)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H^m N_\gamma^{m-1} \Gamma(\beta)^m}{\Gamma(m\beta)} |t - \tau|^{m\beta-1} |x - \xi|^{\gamma-n+1} \leq \\ &\leq K |t - \tau|^{\beta-1} |x - \xi|^{\gamma-n+1}. \end{aligned}$$

Si noti che in effetti, salvo i primi addendi in cui  $m\beta < 1$ , i termini della serie (3.50) sono regolari anche per  $t = \tau$ .

Possiamo finalmente enunciare il risultato fondamentale relativo all'equazione (3.44):

**Teorema 3.5.6** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$  e sia  $K(x, \xi, t, \tau)$  una funzione continua per  $x \neq \xi$  e  $t \neq \tau$ , verificante la condizione (3.45). Allora per ogni  $p \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  l'equazione integrale di Volterra*

$$q(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} K(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = p(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

ha l'unica soluzione

$$q(x, t) = p(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, \xi, t, \tau) p(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau,$$

ove  $Q$  è il nucleo definito in (3.50). Inoltre si ha

$$\|q\|_{C(\partial\Omega \times [0, T])} \leq C \|p\|_{C(\partial\Omega \times [0, T])}. \quad (3.51)$$

**Dimostrazione** Sia  $R$  l'operatore integrale di nucleo  $Q$ . Allora, per (3.50) e (3.48), e per convergenza dominata,

$$\begin{aligned} (Rp)(x, t) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_m(x, \xi, t, \tau) p(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_0^t \int_{\partial\Omega} K_m(x, \xi, t, \tau) p(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (J^m p)(x, t); \end{aligned}$$

dunque, posto  $q = p + Rp$ , si ha

$$\begin{aligned}
q + Jq &= p + Rp + Jp + JRp = \\
&= p + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J^m p + Jp + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J^{m+1} p = \\
&= p + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J^k p + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J^k p = p.
\end{aligned}$$

La stima (3.51) segue subito dalla formula di rappresentazione di  $q$ .

L'unicità della soluzione dell'equazione si dimostra facilmente: se  $q$  è una soluzione dell'equazione (3.44) con  $p = 0$ , allora per ogni  $b \in ]0, T]$  si ha

$$\begin{aligned}
|q(x, t)| &\leq \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} K(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\
&\leq \|q\|_{C(\partial\Omega \times [0, b])} \int_0^t \int_{\partial\Omega} H |t - \tau|^{\beta-1} |x - \xi|^{\gamma-n+1} d\sigma_\xi d\tau \leq \\
&\leq C \|q\|_{C(\partial\Omega \times [0, b])} t^\beta \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, b],
\end{aligned}$$

da cui  $q = 0$  in  $\partial\Omega \times [0, b]$ , pur di scegliere  $b$  in modo che  $Cb^\beta < 1$ . Allora l'equazione (3.44) diventa

$$q(x, t) + \int_b^t \int_{\partial\Omega} K(x, \xi, t, \tau) q(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [b, T].$$

Ripetendo la precedente argomentazione un numero finito di volte si ottiene  $q = 0$  in  $\partial\Omega \times [0, T]$ .  $\square$

### 3.6 I problemi di Cauchy-Neumann e di Cauchy-Dirichlet

Consideriamo i problemi di Cauchy-Dirichlet (3.42) e di Cauchy-Neumann (3.43) per l'equazione del calore omogenea, con dato iniziale nullo, in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Supporremo che  $\psi \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  e che  $\Omega$  sia un aperto limitato con frontiera di classe  $C^{1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ : ciò significa che per ogni  $x_0 \in \partial\Omega$  esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^n$  ed una funzione  $F : U \rightarrow B(0, 1) \subset$

$\mathbb{R}^n$ , tale che

$$\left\{ \begin{array}{l} F \in C^{1+\alpha}(U, \mathbb{R}^n) \text{ ed è biunivoca} \\ |\det \nabla F(x)| \neq 0 \quad \forall x \in U \\ F(U \cap \Omega) = \{y \in B(0, 1) : y_n > 0\} \\ F(U \cap \partial\Omega) = \{y \in B(0, 1) : y_n = 0\}. \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Come si sa (teorema 3.2.5), c'è unicità della soluzione per entrambi i problemi; vogliamo determinare la soluzione nel modo più esplicito possibile. Useremo ancora, come si è già preannunciato, la soluzione fondamentale

$$\Gamma(x - \xi, t - \tau) = \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{n/2}}.$$

Poiché il metodo è lo stesso per i due problemi, faremo tutti i conti nel caso del problema di Cauchy-Neumann, mentre ci limiteremo ad alcuni accenni per il problema di Cauchy-Dirichlet (osservazione 3.6.5(3)).

**Teorema 3.6.1** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^{1+\alpha}$ , ove  $\alpha \in ]0, 1]$ . Per ogni  $\psi \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  il problema (3.43) ha un'unica soluzione  $u \in C(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times ]0, T])$ .*

Osserviamo che la soluzione non appartiene, in generale, a  $C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ , e quindi la condizione  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \psi(x, t)$ ,  $(x, t) \in \partial\Omega \times ]0, T]$ , vale in un opportuno senso generalizzato.

**Dimostrazione** Cercheremo una soluzione del problema (3.43) nella forma cosiddetta di “potenziale di semplice strato” (single-layer potential), cioè del tipo

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau, \quad (3.53)$$

ove  $\varphi \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  è una funzione da determinare. Si noti che questa funzione è definita in  $\Omega \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$  e non solamente in  $\Omega$ . Il motivo che ci spinge a cercare una soluzione di questa forma è che essa certamente ha senso e, come vedremo fra poco, verifica l'equazione differenziale; inoltre è chiaro che  $u(x, 0) = 0$ . Per ottenere anche la condizione alla frontiera, poi, abbiamo a disposizione la funzione  $\varphi$ , che è arbitraria; essa sarà determinata risolvendo un'opportuna equazione integrale di Volterra del tipo analizzato nel paragrafo precedente.

Mostriamo che la funzione (3.53) risolve l'equazione del calore in  $\Omega \times ]0, T]$ .  
Risulta

$$u_i(t, x) - \Delta u(x, t) = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x - \xi, 0) \varphi(\xi, t) d\sigma_\xi + \\ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} [\Gamma_t(x - \xi, t - \tau) - \Delta_x \Gamma(x - \xi, t - \tau)] \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = 0$$

in virtù del fatto che  $\Gamma$  risolve l'equazione del calore e inoltre verifica  $\Gamma(y, 0) = 0$  per ogni  $y \neq 0$ .

È anche chiaro che risulta  $u(x, 0) = 0$  per ogni  $x \in \bar{\Omega}$ . Meno facile, invece, è dimostrare che la condizione alla frontiera sulla derivata normale di  $u$  è soddisfatta: in effetti, se  $i \in \{1, \dots, n\}$  si ha per  $(x, t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega) \times ]0, T]$

$$D_i u(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} D_i \Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau,$$

ma quando  $x$  tende verso un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  le stime fornite dalla proposizione 3.3.4(ii)-(vi) non sono sufficienti a far convergere l'integrale.

Prima di proseguire, proviamo due ulteriori lemmi utili nel seguito.

**Lemma 3.6.2** *Se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $s \in \mathbb{R}$  con  $n + s > 2$ , allora*

$$\int_0^t e^{-\frac{|x|^2}{\tau}} \tau^{-\frac{n+s}{2}} d\tau \leq C_s |x|^{2-n-s},$$

e in particolare risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t e^{-\frac{|x|^2}{\tau}} \tau^{-\frac{n+s}{2}} d\tau = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

**Dimostrazione** Si tratta di un facile calcolo:

$$\int_0^t e^{-\frac{|x|^2}{\tau}} \tau^{-\frac{n+s}{2}} d\tau = \int_{\frac{|x|^2}{t}}^\infty e^{-q} |x|^{2-n-s} q^{\frac{n+s}{2}-2} dq \leq \\ \leq |x|^{2-n-s} \int_0^\infty e^{-q} q^{\frac{n+s}{2}-2} dq = \Gamma\left(\frac{n+s}{2} - 1\right) |x|^{2-n-s},$$

ove  $\Gamma$  è la funzione di Eulero. Se  $x \neq 0$  la prima uguaglianza mostra anche che il limite richiesto vale 0.  $\square$

**Lemma 3.6.3** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^1$ . Per ogni  $x_0 \in \partial\Omega$  esiste  $\delta > 0$  tale che, posto  $S_r = \partial\Omega \cap B(x_0, r)$ ,  $r \in ]0, \delta[$ , risulta

$$\int_{S_\delta \setminus S_r} |x_0 - \xi|^{-n+1-\gamma} d\sigma_\xi \leq C_\gamma r^{-\gamma} \quad \forall r \in ]0, \delta[, \quad \forall \gamma > 0.$$

**Dimostrazione** Fissiamo  $x_0 \in \partial\Omega$ . Poiché  $\partial\Omega$  è di classe  $C^1$ , esiste  $\delta > 0$  per il quale vi è un diffeomorfismo  $F$ , di classe  $C^1$ , che verifica le condizioni (3.52), con  $U = B(x_0, \delta)$  e  $\alpha = 0$ . Mostriamo che esistono due numeri positivi  $c_1$  e  $c_2$  tali che

$$B(0, c_1 r) \subseteq F(B(x_0, r)) \subseteq B(0, c_2 r)$$

per ogni  $r \in ]0, \delta[$  sufficientemente piccolo. Infatti, sia  $y \in B(0, c_1 r)$  e sia  $\xi = F^{-1}(y) \in B(x_0, \delta)$ : allora, dalla formula di Taylor, se  $r$  è piccolo si ha

$$|\xi - x_0| = |F^{-1}(y) - F^{-1}(0)| = |\nabla F^{-1}(0)y| + o(y) \leq K|y| < Kc_1 r,$$

da cui la prima inclusione scegliendo  $c_1 = \frac{1}{K}$ . Similmente, se  $\xi \in B(x_0, r)$  e se  $r$  è piccolo si ha

$$|F(\xi)| = |F(\xi) - F(x_0)| = |\nabla F(x_0)(\xi - x_0)| + o(\xi - x_0) \leq Mr,$$

da cui la seconda inclusione prendendo  $c_2 = M$ .

Adesso osserviamo che, per definizione di integrale sulla varietà  $(n-1)$ -dimensionale  $\partial\Omega$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_\delta \setminus S_r} |\xi - x_0|^{-n+1-\gamma} d\sigma_\xi &= \\ &= \int_{\{y_n=0\} \cap F(B(x_0, \delta) \setminus B(x_0, r))} |F^{-1}(y) - F^{-1}(0)|^{-n+1-\gamma} M(y) dy', \end{aligned}$$

ove  $dy' = dy_1 \dots dy_{n-1}$  e

$$M(y) = \left( \sum_{i=1}^n M_i(y)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad M_i(y) = \det \left\{ \frac{\partial(F^{-1})_h}{\partial y_k}(y) \right\}_{h \neq i, k \neq n}.$$



Dato che le derivate di  $F^{-1}$  sono (in particolare) limitate, deduciamo

$$\begin{aligned}
& \int_{S_\delta \setminus S_r} |\xi - x_0|^{-n+1-\gamma} d\sigma_\xi = \\
& = \int_{\{y_n=0\} \cap [B(0,1) \setminus F(B(x_0,r))]} |F^{-1}(y) - F^{-1}(0)|^{-n+1-\gamma} M(y) dy' \leq \\
& \leq C \int_{\{y_n=0\} \cap [B(0,1) \setminus B(0,c_1r)]} |y|^{-n+1-\gamma} dy' = C' \int_r^1 \rho^{-n+1-\gamma} \rho^{n-2} d\rho = \\
& = C_\gamma \left( \frac{1}{r^\gamma} - 1 \right) \leq C_\gamma \frac{1}{r^\gamma},
\end{aligned}$$

e la tesi è provata per  $r > 0$  sufficientemente piccolo, diciamo  $0 < r < r_0$ . Ma se  $r \in [r_0, \delta[$ , la tesi è banale:

$$\int_{S_\delta \setminus S_r} |\xi - x_0|^{-n+1-\gamma} d\sigma_\xi \leq Cr_0^{-n+1-\gamma} \int_{\partial\Omega} 1 d\sigma_\xi \leq K \leq \frac{K}{r^\gamma}. \quad \square$$

Possiamo adesso enunciare il lemma che costituisce il punto chiave dell'intera argomentazione.

**Lemma 3.6.4** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera di classe  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , e sia  $u$  la funzione (3.53). Se  $x_0 \in \partial\Omega$  e se  $x \rightarrow x_0$  lungo la retta normale a  $\partial\Omega$  in  $x_0$ , allora*

$$\sum_{j=1}^n D_j u(x, t) \nu_j(x_0) \rightarrow W(x_0, t) \pm \frac{1}{2} \varphi(x_0, t) \quad \forall t \in ]0, T],$$

ove

$$W(x_0, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(x_0)}(x_0 - \xi, t - \tau) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau, \quad (3.54)$$

e il segno è positivo oppure negativo a seconda che  $x \rightarrow x_0$  dall'interno di  $\Omega$  oppure dall'esterno di  $\Omega$ . Inoltre la funzione  $(x_0, t) \mapsto W(x_0, t)$  è continua su  $\partial\Omega \times [0, T]$ .

**Dimostrazione** Accertiamoci anzitutto che  $W(x_0, t)$  abbia senso. Dalla (3.21) segue

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(x_0)}(x_0 - \xi, t - \tau) = -\frac{\Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)}{2(t - \tau)} \langle x_0 - \xi, \nu(x_0) \rangle. \quad (3.55)$$

D'altra parte risulta

$$\partial\Omega \cap B(x_0, \delta) = \{x \in B(x_0, \delta) : F_n(x) = 0\},$$

ove  $F$  è il diffeomorfismo di classe  $C^{1+\alpha}$  fra  $B(x_0, \delta)$  e  $B(0, 1)$  che verifica le condizioni (3.52). Dunque, per ogni  $\xi \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta)$  si ha  $F_n(\xi) = 0$  e  $\nu(\xi) = -\frac{\nabla F_n(\xi)}{|\nabla F_n(\xi)|}$ . Ne segue

$$\begin{aligned} |\langle x_0 - \xi, \nu(x_0) \rangle| &= \frac{1}{|\nabla F_n(x_0)|} |\langle \nabla F_n(x_0), \xi - x_0 \rangle + F_n(x_0) - F_n(\xi)| = \\ &= \frac{1}{|\nabla F_n(x_0)|} \left| \int_0^1 \langle \nabla F_n(x_0) - \nabla F_n(x_0 + t(\xi - x_0)), \xi - x_0 \rangle dt \right| \leq \\ &\leq \frac{C_\alpha}{|\nabla F_n(x_0)|} \int_0^1 t^\alpha |\xi - x_0|^{1+\alpha} dt \leq C_\alpha |\xi - x_0|^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

cosicché da (3.55) e dalla proposizione 3.3.4(i) otteniamo

$$\left| \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(x_0)}(x_0 - \xi, t - \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-\frac{n+2}{2}} |\xi - x_0|^{1+\alpha} e^{-\frac{L|\xi - x_0|^2}{t - \tau}}, \quad (3.56)$$

ed anche, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(x_0)}(x_0 - \xi, t - \tau) \right| &\leq \\ &\leq C \left[ (t - \tau)^{-\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{4}} |\xi - x_0|^{n + \frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{L|\xi - x_0|^2}{t - \tau}} \right] (t - \tau)^{\frac{\alpha}{4} - 1} |\xi - x_0|^{\frac{\alpha}{2} - n + 1} \end{aligned}$$

da cui, per ogni  $\xi \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta)$  e per ogni  $t, \tau \in [0, T]$  con  $t \neq \tau$ ,

$$\left| \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(x_0)}(x_0 - \xi, t - \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{\frac{\alpha}{4} - 1} |\xi - x_0|^{\frac{\alpha}{2} - n + 1}. \quad (3.57)$$

Questa stima prova che l'integrale che definisce  $W(x_0, t)$  nella (3.54) è convergente. Inoltre un facile argomento basato sulla convergenza dominata mostra che  $W(x_0, t)$  è continua nei suoi argomenti in  $\partial\Omega \times [0, T]$ .

Adesso dobbiamo valutare la differenza

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n D_j u(x, t) \nu_j(x_0) - W(x_0, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n [D_j \Gamma(x - \xi, t - \tau) - D_j \Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] \times \\ &\quad \times \nu_j(x_0) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau \end{aligned} \quad (3.58)$$

al tendere di  $x$  a  $x_0$  lungo la normale a  $\partial\Omega$  in  $x_0$ . Se stimiamo direttamente questa differenza con l'ausilio della proposizione 3.3.4(vi) e del lemma 3.6.2, non otteniamo lo scopo perché troviamo

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n [D_j\Gamma(x - \xi, t - \tau) - D_j\Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] \nu_j(x_0) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq C \|\varphi\|_\infty \int_0^t \int_{\partial\Omega} (t - \tau)^{-\frac{n+1+\beta}{2}} e^{-\frac{L(|x-\xi| \wedge |x_0-\xi|)^2}{t-\tau}} |x - x_0|^\beta d\sigma_\xi d\tau \leq \\ & \leq C \|\varphi\|_\infty \int_{\partial\Omega} |x - x_0|^\beta (|x - \xi| \wedge |x_0 - \xi|)^{-n-\beta+1} d\sigma_\xi, \end{aligned}$$

ma l'ultimo integrale su  $\partial\Omega$  non è convergente.

Dobbiamo dunque aggiungere e togliere termini nella (3.58) in modo opportuno. Poniamo per brevità di scrittura

$$N_{j,x}(\xi, t - \tau) = D_j\Gamma(x - \xi, t - \tau) - D_j\Gamma(x_0 - \xi, t - \tau);$$

allora possiamo riscrivere la (3.58) come segue:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n D_j u(x, t) \nu_j(x_0) - W(x_0, t) = \\ & = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(x_0) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \tag{3.59}$$

ove

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(x_0) [\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)] d\sigma_\xi d\tau, \\ I_2 &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(x_0) [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)] d\sigma_\xi d\tau, \\ I_3 &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) [\nu_j(x_0) - \nu_j(\xi)] \varphi(x_0, t) d\sigma_\xi d\tau, \\ I_4 &= \varphi(x_0, t) \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(\xi) d\sigma_\xi d\tau. \end{aligned}$$

Proveremo che per  $x \rightarrow x_0$  (lungo la retta normale a  $\partial\Omega$  in  $x_0$ ) i termini  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  sono infinitesimi, mentre  $I_4$  – il quale, come si vedrà, ha senso come

integrale improprio di Riemann – converge a  $\pm \frac{1}{2} \varphi(x_0, t)$ .  
 Sia  $\varepsilon > 0$  e sia  $\delta > 0$  tale che

$$|\xi - x_0| < \delta, \quad \tau \in [0, t] \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)| < \varepsilon.$$

Poniamo  $\Sigma = \partial\Omega \cap B(x_0, \delta)$  e  $S = \partial\Omega \cap B(x_0, 2|x - x_0|)$ ; se  $|x - x_0| < \delta/2$ , si ha  $S \subseteq \Sigma \subseteq \partial\Omega$ . Allora possiamo decomporre  $I_1$  spezzando gli integrali:

$$I_1 = \int_0^t \int_S \dots + \int_0^t \int_{\Sigma \setminus S} \dots + \int_0^t \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \dots = I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Stimiamo  $I_{11}$  rimpiazzando con  $\varepsilon$  l'incremento della  $\varphi$  e con una somma la differenza delle  $D_j\Gamma$ : dalla proposizione 3.3.4(ii), dalla (3.56) e dal lemma 3.6.2 segue

$$\begin{aligned} |I_{11}| &= \left| \int_0^t \int_S \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(x_0) [\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t \int_S \left[ |\nabla\Gamma(x - \xi, t - \tau)| + \left| \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(x_0)}(x_0 - \xi, t - \tau) \right| \right] \varepsilon d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C\varepsilon \int_0^t \int_S \left[ \frac{e^{-\frac{L|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{e^{-\frac{L|x_0-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x - x_0|^{1+\alpha} \right] d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C\varepsilon \left[ \int_S |x - \xi|^{-n+1} d\sigma_\xi + \int_S |x_0 - \xi|^{-n+1+\alpha} d\sigma_\xi \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo a questo punto che  $x$  appartiene alla retta normale a  $\partial\Omega$  in  $x_0$ ; inoltre, poiché  $\xi \in S$ , per  $|x - x_0|$  sufficientemente piccolo la differenza  $|\xi - P(\xi)|$  fra  $\xi$  e la sua proiezione  $P(\xi)$  sull'iperpiano tangente a  $\partial\Omega$  in  $x_0$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $|x - x_0|$ . Pertanto si ha, per  $|x - x_0|$  piccolo,

$$|\xi - x| \geq |P(\xi) - x| - |\xi - P(\xi)| \geq |x_0 - x| - \frac{1}{2}|x - x_0| = \frac{1}{2}|x - x_0|.$$

Ne segue, per  $|x - x_0|$  piccolo,

$$|I_{11}| \leq C\varepsilon \left[ |x - x_0|^{-n+1} \int_S d\sigma_\xi + \int_S |x_0 - \xi|^{-n+1+\alpha} d\sigma_\xi \right] \leq C\varepsilon.$$

Il termine  $I_{12}$  si stima essenzialmente allo stesso modo. Si osserva che se  $\xi \in \Sigma \setminus S$  si ha

$$\begin{aligned} |\xi - x| &\geq |P(\xi) - x| - |\xi - P(\xi)| \geq |P(\xi) - x_0| - |\xi - P(\xi)| \geq \\ &\geq |\xi - x_0| - 2|P(\xi) - \xi| \geq \frac{1}{2}|\xi - x_0| \end{aligned}$$

a patto di aver scelto  $\delta$  abbastanza piccolo. Quindi, per i lemmi 3.6.2 e 3.6.3,

$$\begin{aligned} |I_{12}| &= \left| \int_0^t \int_{\Sigma \setminus S} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(x_0) [\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq C\varepsilon \int_0^t \int_{\Sigma \setminus S} \frac{e^{-\frac{L|x_0 - \xi|^2}{2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x - x_0| d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C\varepsilon |x - x_0| \int_{\Sigma \setminus S} |x_0 - \xi|^{-n} d\sigma_\xi \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Per  $I_{13}$  si rimpiazza l'incremento di  $\varphi$  con una costante, e si controlla l'incremento delle  $D_j\Gamma$  con la proposizione 3.3.4(ii). Si trova, con l'ausilio del lemma 3.6.2,

$$\begin{aligned} |I_{13}| &= \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t - \tau) \nu_j(x_0) [\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq C \int_0^t \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \frac{e^{-\frac{L|x_0 - \xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x - x_0| d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C|x - x_0| \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} |x_0 - \xi|^{-n} d\sigma_\xi \leq C_\delta |x - x_0|. \end{aligned}$$

Ciò prova che  $I_1 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ ,  $x - x_0 \perp \partial\Omega$ .

Analizziamo ora il termine  $I_2$ . In corrispondenza del numero  $\varepsilon$  già fissato, esiste  $\eta > 0$  tale che

$$\xi \in \partial\Omega, \quad |t - \tau| < \eta \quad \implies \quad |\varphi(\xi, t) - \varphi(\xi, \tau)| < \varepsilon.$$

Allora decomponiamo  $I_2$  spezzando gli integrali:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{t-\eta} \int_{\partial\Omega} \dots + \int_{t-\eta}^t \int_S \dots + \int_{t-\eta}^t \int_{\Sigma \setminus S} \dots + \int_{t-\eta}^t \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \dots = \\ &= I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}, \end{aligned}$$

ove stavolta  $\Sigma = \partial\Omega \cap B(x_0, \eta)$  e si suppone  $|x - x_0| < \eta/2$ .  
 Utilizzando la proposizione 3.3.4(vi), la (3.56) ed il lemma 3.6.2 si ottiene, procedendo come per la stima di  $I_1$ :

$$\begin{aligned} |I_{21}| &= \left| \int_0^{t-\eta} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t-\tau) \nu_j(x_0) [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq C \int_0^{t-\eta} \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-\frac{L(|x_0-\xi| \wedge |x-\xi|)^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x-x_0| d\sigma_\xi d\tau \leq C_\eta |x-x_0|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_{22}| &= \left| \int_{t-\eta}^t \int_S \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t-\tau) \nu_j(x_0) [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq C\varepsilon \int_{t-\eta}^t \int_S \left[ \frac{e^{-\frac{L|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{e^{-\frac{L|x_0-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x-x_0|^{1+\alpha} \right] d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C\varepsilon \left[ \int_S |x-\xi|^{-n+1} d\sigma_\xi + \int_S |x_0-\xi|^{-n+1+\alpha} d\sigma_\xi \right] \leq \\ &\leq C\varepsilon \left[ |x-x_0|^{-n+1} \int_S d\sigma_\xi + \int_S |x_0-\xi|^{-n+1+\alpha} d\sigma_\xi \right] \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_{23}| &= \left| \int_{t-\eta}^t \int_{\Sigma \setminus S} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t-\tau) \nu_j(x_0) [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq C\varepsilon \int_{t-\eta}^t \int_{\Sigma \setminus S} \frac{e^{-\frac{L|x_0-\xi|^2}{2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x-x_0| d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C\varepsilon |x-x_0| \int_{\Sigma \setminus S} |x_0-\xi|^{-n} d\sigma_\xi \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_{24}| &= \left| \int_{t-\eta}^t \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \sum_{j=1}^n N_{j,x}(\xi, t-\tau) \nu_j(x_0) [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)] d\sigma_\xi d\tau \right| \leq \\ &\leq C\varepsilon \int_{t-\eta}^t \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \frac{e^{-\frac{L\delta^2}{2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} |x-x_0| d\sigma_\xi d\tau \leq C_\eta |x-x_0|. \end{aligned}$$

Da tutte queste maggiorazioni segue che  $I_2 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ ,  $x - x_0 \perp \partial\Omega$ .  
 La stima di  $I_3$  è più semplice: essendo  $|\nu(x_0) - \nu(\xi)| \leq c|x_0 - \xi|^\alpha$ , si ha, utilizzando ancora la proposizione 3.3.4(vi) con  $0 < \beta < \alpha$ , nonché il lemma 3.6.2,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-\frac{L(|x_0 - \xi| \wedge |x - \xi|)^2}{t - \tau}}}{(t - \tau)^{\frac{n+1+\beta}{2}}} |x - x_0|^\beta |x_0 - \xi|^\alpha d\sigma_\xi d\tau \leq \\ &\leq C \int_{\partial\Omega} \frac{|x - x_0|^\beta}{(|x_0 - \xi| \wedge |x - \xi|)^{n-1+\beta-\alpha}} d\sigma_\xi \leq C|x - x_0|^\beta, \end{aligned}$$

e dunque anche  $I_3 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ ,  $x - x_0 \perp \partial\Omega$ .

Vediamo infine il termine  $I_4$ , che verrà esplicitamente calcolato. Verifichiamo che si tratta di un integrale improprio di Riemann convergente, ossia che

$$\begin{aligned} I_4 &= \varphi(x_0, t) \times \\ &\times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n [D_j \Gamma(x - \xi, t - \tau) - D_j \Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] \nu_j(\xi) d\sigma_\xi d\tau. \end{aligned}$$

Sia infatti, per  $x \in \partial\Omega$  e  $\tau \in [0, t[$ ,

$$E(x, \tau) = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n [D_j \Gamma(x - \xi, t - \tau) - D_j \Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] \nu_j(\xi) d\sigma_\xi,$$

allora risulta, per la formula di Green, ed osservando che  $\Delta_\xi \Gamma(x - \xi, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(x - \xi, t - \tau) = 0$ ,

$$\begin{aligned} E(x, \tau) &= - \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_j} [\Gamma(x - \xi, t - \tau) - \Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] \nu_j(\xi) d\sigma_\xi = \\ &= - \int_{\Omega} \Delta_\xi [\Gamma(x - \xi, t - \tau) - \Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] d\xi = \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} [\Gamma(x - \xi, t - \tau) - \Gamma(x_0 - \xi, t - \tau)] d\xi, \end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\varepsilon} E(x, \tau) d\tau &= \int_{\Omega} [\Gamma(x - \xi, \varepsilon) - \Gamma(x_0 - \xi, \varepsilon)] d\xi - \\ &- \int_{\Omega} [\Gamma(x - \xi, t) - \Gamma(x_0 - \xi, t)] d\xi = I_{41}(x, \varepsilon) + I_{42}(x), \end{aligned}$$

per cui otteniamo

$$I_4 = \varphi(x_0, t) \cdot \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{41}(x, \varepsilon) + I_{42}(x) \right] \quad (3.60)$$

ammesso che il limite a secondo membro esista, cosa che verificheremo fra poco. Poiché inoltre

$$|I_{42}(x)| \leq Ct^{-\frac{n+1}{2}} |x - x_0| \int_{\Omega} e^{-\frac{L(|x-\xi| \wedge |x_0-\xi|)^2}{t}} d\xi \leq c(t)|x - x_0|,$$

è chiaro che  $I_{42}(x)$  tende a 0 quando  $x$  tende a  $x_0$  lungo la normale a  $\partial\Omega$  in  $x_0$ . In definitiva ci si riduce a dover dimostrare che esistono i due limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{41}(x, \varepsilon) = I_4, \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x-x_0 \perp \partial\Omega} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{41}(x, \varepsilon) \right].$$

Analizziamo il primo limite, ricordando che

$$I_{41}(x, \varepsilon) = \int_{\Omega} [\Gamma(x - \xi, \varepsilon) - \Gamma(x_0 - \xi, \varepsilon)] d\xi.$$

Si ha, utilizzando un opportuno cambiamento di variabili,

$$\int_{\Omega} \Gamma(x - \xi, \varepsilon) d\xi = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{A_\varepsilon} e^{-|z|^2} dz,$$

ove  $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : 2\sqrt{\varepsilon}z + x \in \Omega\}$ .

Notiamo che se  $x \in \Omega$  allora per ogni  $z \in \mathbb{R}^n$  si ha  $z \in A_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo; analogamente, se  $x \notin \overline{\Omega}$ , allora  $z \notin A_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. Dunque, per convergenza dominata,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{A_\varepsilon} e^{-|z|^2} dz = \begin{cases} \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = 1 & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Analogamente

$$\int_{\Omega} \Gamma(x_0 - \xi, \varepsilon) d\xi = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{B_\varepsilon} e^{-|z|^2} dz,$$

ove stavolta  $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : 2\sqrt{\varepsilon}z + x_0 \in \Omega\}$ . Dato che  $x_0 \in \partial\Omega$ , detto  $\Pi$  il semispazio aperto di  $\mathbb{R}^n$  che contiene  $\Omega \cap B(x_0, \delta)$ , se  $z \in \Pi$  si ha  $z \in B_\varepsilon$



per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, mentre se  $z \notin \bar{\Pi}$  si ha  $z \notin B_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo; se ne deduce, a causa dell'invarianza per rotazioni dell'integrando,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{B_\varepsilon} e^{-|z|^2} dz = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\Pi} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{2}. \quad (3.62)$$

Da (3.61) e (3.62) segue infine

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{41}(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} [\Gamma(x - \xi, \varepsilon) - \Gamma(x_0 - \xi, \varepsilon)] d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \in \Omega, \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Abbiamo pertanto provato che per  $x \rightarrow x_0$  (lungo la retta perpendicolare a  $\partial\Omega$  in  $x_0$ ) si ha, in virtù di (3.60),

$$I_4 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi(x_0, t) & \text{se } x \in \Omega, \\ -\frac{1}{2} \varphi(x_0, t) & \text{se } x \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Ciò conclude la dimostrazione del lemma 3.6.4.  $\square$

Possiamo ora vedere se la nostra candidata soluzione  $u$ , data da (3.53), risolve davvero il problema di Cauchy-Neumann (3.43). La  $u$  è una funzione regolare in  $\Omega \times ]0, T]$ , e continua in  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ , come si verifica facilmente usando la proposizione 3.3.4(v) (con  $\beta \in ]0, 1[$ ); essa risolve l'equazione del calore in  $\Omega \times ]0, T]$  ed è nulla in  $\bar{\Omega}$  per  $t = 0$ . Come si è già osservato, le stime sulle derivate di  $\Gamma$  fornite dalla proposizione 3.3.4(vi) non garantiscono che  $u$  abbia derivate prime continue su  $\partial\Omega \times [0, T]$ ; tuttavia il lemma 3.6.4 ci dice che si può dare senso alla derivata normale su  $\partial\Omega \times ]0, T]$ , e che tale derivata normale vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t) &= \lim_{x \rightarrow x_0, x-x_0 \perp \partial\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) = \\ &= W(x_0, t) + \frac{1}{2} \varphi(x_0, t) \quad \forall (x_0, t) \in \partial\Omega \times ]0, T], \end{aligned} \quad (3.63)$$

ove  $W(x_0, t)$  è dato da (3.54); essa è dunque una funzione continua su  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ . Perciò, affinché  $u$  risolva il problema (3.43), occorre che sia

$$W(x_0, t) + \frac{1}{2} \varphi(x_0, t) = \psi(x_0, t) \quad \forall (x_0, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

ossia che valga, per ogni  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ , l'equazione integrale

$$\varphi(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - \xi, t - \tau) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = 2\psi(x, t). \quad (3.64)$$

Il nucleo di questa equazione, in virtù della sua continuità per  $x \neq \xi$  e  $t \neq \tau$  e grazie a (3.57), verifica le ipotesi del teorema 3.5.6. Quindi l'equazione integrale ha un'unica soluzione  $\varphi$ , la quale, inserita nell'espressione di  $u$ , permette di mostrare che  $u$  è la soluzione del problema di Cauchy-Neumann (3.43). Ciò conclude la dimostrazione del teorema 3.6.1  $\square$

**Osservazioni 3.6.5 (1)** Anche se abbiamo risolto la (3.64) in  $\partial\Omega \times [0, T]$ , la soluzione  $u$  verifica la condizione  $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0, t) = \psi(x_0, t)$  soltanto in  $\partial\Omega \times ]0, T]$ : infatti si vede facilmente, utilizzando la proposizione 3.3.4, che per  $t = 0$  le derivate prime di  $u$  sono continue e nulle in  $\Omega$ , per cui quando  $t = 0$  si ha

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x - x_0 \perp \partial\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, 0) = 0.$$

Per verificare la condizione alla frontiera anche per  $t = 0$ , dovrebbe dunque essere  $\psi(x_0, 0) = 0$ : questa è una condizione di compatibilità che potrebbe non essere verificata dal dato  $\psi$ . Se questa condizione è soddisfatta, l'equazione integrale ci dà  $\varphi(x_0, 0) = 0$ , la (3.64) vale in  $\partial\Omega \times [0, T]$  e la relazione  $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0, t) = \psi(x_0, t)$  è valida in  $\partial\Omega \times [0, T]$ , ma soltanto nel senso sopra descritto, perché la  $u$  non è di classe  $C^1$ ; infatti le derivate prime di  $u$ , nulle su  $\Omega$  per  $t = 0$ , non sono però continue, come funzioni di  $(x, t)$ , nei punti  $(x_0, 0)$  con  $x_0 \in \partial\Omega$ .

**(2)** Con lo stesso metodo si vede che la funzione  $u$ , definita da (3.53), è soluzione del “problema di Cauchy-Neumann esterno”

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \overline{\Omega}^c \times ]0, T], \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \Omega^c, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(x, t) = \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ |u(x, t)| \leq M e^{\alpha|x|^2} & \forall (x, t) \in \Omega^c \times [0, T] \text{ per qualche } M > 0, \alpha > 0, \end{array} \right.$$

purché la funzione  $\varphi$  che compare nelle definizioni di  $u$  soddisfi l'equazione integrale di Volterra

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) - 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(\xi)}(x - \xi, t - \tau) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = \\ = -2\psi(x, t) \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T];\end{aligned}$$

la limitazione sulla crescita all'infinito serve a garantire l'unicità.

**(3)** Per il problema di Cauchy-Dirichlet (3.42) in un aperto limitato  $\Omega$  con frontiera di classe  $C^{1+\alpha}$  vale un enunciato analogo a quello del teorema 3.6.1: esiste un'unica soluzione  $u$ , che è esprimibile nella forma di “potenziale di doppio strato” (double-layer potential), vale a dire

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial\xi_j} \Gamma(x - \xi, t - \tau) \nu_j(\xi) \mu(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau, \quad (3.65)$$

ove  $\mu \in C(\partial\Omega \times [0, T])$  è l'unica soluzione dell'equazione integrale di Volterra in  $\partial\Omega \times [0, T]$

$$\mu(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(\xi)}(x - \xi, t - \tau) \mu(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = 2\psi(x, t).$$

La stessa funzione  $u$  risolve il “problema di Cauchy-Dirichlet esterno”

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \overline{\Omega^c} \times ]0, T], \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \Omega^c, \\ u(x, t) = \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ |u(x, t)| \leq M e^{\alpha|x|^2} & \forall (x, t) \in \Omega^c \times [0, T] \text{ per qualche } M > 0, \alpha > 0, \end{cases}$$

purché la funzione  $\mu$  che compare nella (3.65) risolva l'equazione integrale

$$\mu(x, t) - 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu(\xi)}(x - \xi, t - \tau) \mu(\xi, \tau) d\sigma_\xi d\tau = -2\psi(x, t).$$

**(4)** Le versioni più generali dei problemi (3.43) e (3.42), ossia quelle con dati non omogenei, sono rispettivamente:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \times ]0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(x, t) = \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \times ]0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in \overline{\Omega}, \\ u(x, t) = \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Questi problemi sono risolvibili con metodi analoghi a quelli visti fin qui; ne tralasciamo lo studio per mancanza di tempo. Osserviamo che vi sono condizioni non banali di compatibilità fra i dati, se si vogliono soluzioni regolari in  $\overline{\Omega} \times [0, T]$ . Per approfondimenti si può consultare [6].

Le equazioni paraboliche, come le iperboliche, si possono utilmente affrontare, in modo più astratto e generale, per mezzo della teoria dei semigrupp: si tratta di uno strumento potente e versatile, applicabile a varie problematiche, per il quale rimandiamo a [7].

# Capitolo 4

## L'equazione di D'Alembert

### 4.1 Motivazioni fisiche

Il prototipo delle equazioni iperboliche è l'*equazione delle onde*, o di D'Alembert,

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t), \quad (4.1)$$

cui si perviene nello studio di svariati fenomeni fisici di tipo evolutivo, tutti però accomunati dalla caratteristica fondamentale di descrivere moti ondulatori: di particelle subatomiche, di materiali elastici, di fluidi, di corrente elettrica. Il mondo delle equazioni iperboliche è vastissimo e presenta caratteristiche matematiche proprie, molto diverse da quelle tipiche del caso parabolico: cercheremo di analizzarle nei paragrafi successivi. Vediamo qualche esempio fisico in cui compare l'equazione delle onde.

**Esempio 4.1.1** Analizziamo le vibrazioni trasversali di una corda tesa, ossia di un filo elastico, flessibile, teso orizzontalmente tra due estremi, i punti 0 e  $L$  dell'asse  $x$ . Ci interessa solamente lo spostamento  $u(x, t)$  (nel punto  $x$ , all'istante  $t$ ) in direzione verticale. Denotiamo con  $\mathbf{T}(x, t)$  la tensione della corda nel punto  $x$  all'istante  $t$ : essa è diretta tangenzialmente alla corda in ogni punto  $(x, u(x, t))$  di essa; ciò traduce matematicamente il fatto che la corda non esercita resistenza alla flessione. Detta  $\rho(x)$  la densità lineare della corda, la variazione della componente verticale della quantità di moto relativa ad un tratto di corda  $[x_1, x_2]$  in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi.$$

Essa coincide con l'impulso, nello stesso intervallo di tempo, delle componenti verticali delle forze che agiscono sul tratto di corda in esame, cioè la tensione ai due estremi e le forze esterne quali la gravità, che denoteremo globalmente con  $F$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [T_y(x_2, t) - T_y(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(\xi, t) d\xi dt. \end{aligned}$$

Supponendo che  $u$  e  $\mathbf{T}$  siano funzioni regolari, l'equazione precedente si può riscrivere nel modo seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho(\xi)u_{tt}(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial \xi} T_y(\xi, t) + F(\xi, t) \right] d\xi dt = 0.$$

Per l'arbitrarietà del rettangolo  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ , si ricava

$$\rho(x)u_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} T_y(x, t) + F(x, t) = 0.$$

Adesso scriviamo una formula per la tensione: secondo la legge di Hooke, possiamo assumere

$$T_y(x, t) = k(x)u_x(x, t),$$

ove  $k(x)$  è il cosiddetto modulo di Young; ciò è plausibile, considerando che la tensione in un tratto di corda deve essere tanto maggiore quanto più gli spostamenti ai due estremi differiscono fra loro. Si deduce allora l'equazione

$$\rho(x)u_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (k(x)u_x(x, t)) + F(x, t) = 0.$$

Se ora si ammette che la densità  $\rho$  e il modulo di Young  $k$  siano costanti, si ottiene l'equazione delle onde (4.1) con  $c = \sqrt{k/\rho}$ .

Le linee caratteristiche per l'equazione (4.1) sono le rette  $x \pm ct = h$  con  $h$  costante. Dunque la retta  $t = 0$  non è caratteristica ed è quindi naturale fissare, al tempo  $t = 0$ , condizioni iniziali della forma

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \forall x \in [0, L],$$

con le quali si forniscono la configurazione e la velocità iniziale della corda. Occorre inoltre una condizione agli estremi: se i due capi della corda sono fissati, imponremo

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

**Esempio 4.1.2** Consideriamo le oscillazioni trasversali di una membrana, ossia di una pellicola non resistente a flessioni e trazioni, fissata lungo il suo contorno giacente nel piano  $z = 0$ . Indicheremo con  $\Sigma$  la proiezione della membrana sul piano  $z = 0$ . Ci interessano gli spostamenti verticali  $u(x, y, t)$  in corrispondenza del punto  $(x, y)$  all'istante  $t$ , e supporremo quindi che quelli tangenziali siano nulli. Denotiamo con  $\mathbf{T}(x, y, t)$  la tensione che viene esercitata sulla membrana in corrispondenza del punto  $(x, y)$  ad un fissato istante  $t$ : essa in ogni punto è tangente alla superficie, proprio perché non vi è opposizione alle flessioni e alle trazioni.

Consideriamo un pezzetto di membrana, la cui proiezione sul piano orizzontale sia un aperto regolare  $S$ . Esso è sottoposto a tensione in tutti i punti della sua frontiera, e la tensione agisce in direzione normale a  $\partial S$  (eventuali componenti tangenziali determinerebbero spostamenti non verticali dei punti della membrana, contro l'ipotesi fatta). A noi interessa la componente verticale  $T_z$  della tensione: la tensione complessiva, in direzione verticale, a cui è sottoposto il pezzo di membrana all'istante  $t$  si misura attraverso l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial S} T_z(x, y) ds.$$

Facciamo ora l'ipotesi che nei punti di  $\partial S$  risulti

$$T_z(x, y, t) = k(x, y) \langle \nabla u(x, y, t), n(x, y) \rangle,$$

ove  $n$  è il versore normale esterno a  $\partial S$  nel piano orizzontale: ciò, in analogia con il caso unidimensionale della corda, è plausibile, perché dove  $\nabla u$  è grande in modulo la tensione dovrebbe avere una componente verticale grande; d'altra parte dove  $\nabla u$  punta in direzione trasversale a  $n$ , vuol dire che nella direzione di  $n$  la  $u$  è quasi costante e quindi la tensione dovrebbe essere piccola.

Utilizzando il teorema della divergenza, otteniamo

$$\int_{\partial S} T_z(x, y, t) ds = \int_S \operatorname{div}(k \nabla u) dx dy.$$

Uguagliando la variazione in  $[t_1, t_2]$  della componente verticale della quantità di moto all'impulso delle forze nello stesso intervallo, indicate con  $F(x, y, t)$  le forze esterne si può scrivere

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho u_{tt} dx dy dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S [\operatorname{div}(k \nabla u) + F] dx dy dt,$$

da cui per l'arbitrarietà di  $S$  e di  $[t_1, t_2]$  ricaviamo, supponendo l'integrando continuo,

$$\rho(x, y)u_{tt}(x, y, t) - \operatorname{div}(k(x, y)\nabla u(x, y, t)) = F(x, y, t) \quad \forall (x, y) \in \Sigma, \forall t > 0.$$

Se poi si suppone che  $\rho$  e  $k$  siano costanti, si trova l'equazione

$$u_{tt} - \frac{k}{\rho}\Delta u = \frac{F}{\rho} \quad \text{in } \Sigma \times ]0, \infty[.$$

Ad essa vanno aggiunte le condizioni iniziali  $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$  e  $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$ , nonché una condizione al contorno: dato che la membrana è tenuta fissa al bordo, si impone la condizione  $u(x, y, t) = 0$  per  $(x, y, t) \in \partial\Sigma \times [0, \infty[$ .

**Esempio 4.1.3** Il passaggio di corrente in un filo conduttore è caratterizzato da due grandezze: l'intensità di corrente  $i(x, t)$ , cioè la quantità di carica che attraversa una sezione unitaria del filo nell'unità di tempo, e la tensione  $v(x, t)$ , che dipende dalla differenza di potenziale alle estremità del filo. La legge di Ohm, applicata ad un trattino  $dx$  di filo, lega queste due quantità nel modo seguente:

$$v(x, t) - v(x + dx, t) \simeq -v_x dx = Ri dx + Li_t dx - f dx. \quad (4.2)$$

Il termine  $-v_x dx$  rappresenta la caduta di tensione nel tratto di filo considerato, che deve uguagliare la somma delle dispersioni di carica lungo il filo. Le costanti  $R$  e  $L$  sono la resistenza e l'induttanza del circuito,  $f$  è una forza elettromotrice esterna, fornita ad esempio da una batteria. D'altra parte la quantità di carica presente nel tratto di filo considerato nell'unità di tempo è pari a  $i(x, t) - i(x + dx, t) \simeq -i_x dx$ ; essa è uguale a  $Cv_t dx - Gv dx$ , ossia a ciò che serve a caricare l'elemento  $dx$ , meno ciò che si perde per isolamento imperfetto:  $C$  è la capacità del circuito,  $G$  è un coefficiente di perdita, di solito molto piccolo se il filo è ben isolato. Abbiamo così una seconda equazione,  $-i_x dx = Cv_t dx - Gv dx$ . Otteniamo in questo modo il sistema

$$\begin{cases} i_x + Cv_t - Gv = 0, \\ v_x + Li_t + Ri - f = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Se deriviamo rispetto a  $x$  la prima equazione e rispetto a  $t$  la seconda, ricaviamo

$$\begin{cases} i_{xx} + Cv_{tx} - Gv_x = 0, \\ v_{xt} + Li_{tt} + Ri_t - f_t = 0 \end{cases}$$



Inserendo al posto di  $v_x$  la sua espressione ottenuta dalla (4.2), e ricavando  $v_{tx}$  dalla seconda equazione, la prima equazione si riscrive nella forma

$$i_{xx} + LGi_t + GRi - Gf - CLi_{tt} - CRi_t + Cf_t = 0. \quad (4.4)$$

In modo analogo, derivando la prima equazione del sistema (4.3) rispetto a  $t$  e la seconda rispetto a  $x$ , ricaviamo

$$v_{xx} - CLv_{tt} + GLv_t - RCv_t + GRv - f_x = 0. \quad (4.5)$$

Se il filo è ben isolato, come si è detto si ha  $G \simeq 0$ ; se inoltre esso è un buon conduttore, si ha anche  $R \simeq 0$ , e le due equazioni diventano rispettivamente

$$v_{tt} = \frac{1}{LC} v_{xx} - \frac{f_x}{LC}, \quad i_{tt} = \frac{1}{LC} i_{xx} + \frac{f_t}{L},$$

e dunque sia  $v$ , sia  $i$  risolvono l'equazione di D'Alembert.

**Esempio 4.1.4** Questo esempio è un po' più elaborato dei precedenti. Consideriamo il moto di un fluido o di un gas compressibile, che supporremo perfettamente non viscoso, ossia con completa assenza di attrito fra le molecole. Denotiamo con  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  la sua velocità, con  $\rho(x, y, z, t)$  la sua densità, con  $p(x, y, z, t)$  la sua pressione, e con  $\mathbf{F}(x, y, z, t)$  le forze esterne per unità di massa. La somma delle forze agenti su un volume di liquido  $T$  (semplicemente connesso) è data da  $\rho \mathbf{F}$  e dalla pressione esercitata dal liquido circostante, diretta perpendicolarmente su  $\partial T$ . Uguagliando la somma di tali forze all'accelerazione, si può scrivere l'equazione

$$\int_T \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \, dx dy dz = \int_T \rho \mathbf{F} \, dx dy dz - \int_{\partial T} p \mathbf{n} \, d\sigma,$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale esterno. Dal teorema della divergenza deduciamo

$$\int_T \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \, dx dy dz = \int_T [\rho \mathbf{F} - \nabla p] \, dx dy dz.$$

D'altra parte, se  $(x(t), y(t), z(t))$  è la legge oraria di una particella di fluido, si ha  $\mathbf{v} = (x', y', z')$  e

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} z' + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

ove  $\langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v}$  è il vettore  $\sum_{i=1}^3 v_i D_i \mathbf{v}$ . Per l'arbitrarietà di  $T$ , otteniamo l'equazione del moto

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + F. \quad (4.6)$$

Vi è poi un altro legame fra le variabili: se in  $T$  non ci sono né sorgenti né pozzi, la variazione della quantità di liquido nell'unità di tempo è pari al suo flusso attraverso la frontiera:

$$\frac{d}{dt} \int_T \rho \, dx dy dz = - \int_{\partial T} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma,$$

ovvero, ancora per l'arbitrarietà di  $T$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.7)$$

Questa è l'equazione di continuità.

Infine, ipotizziamo che la pressione nel fluido dipenda soltanto dalla densità; se il fenomeno di moto del fluido è adiabatico, ossia non provoca scambi di calore con l'esterno, allora si ammette che valga una equazione di stato del tipo

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k,$$

ove  $p_0$  e  $\rho_0$  sono dati iniziali per la pressione e per la densità. Otteniamo così il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + F, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k. \end{cases} \quad (4.8)$$

Osserviamo adesso che se, inizialmente,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , oppure  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , allora, purché sia anche  $\mathbf{F}(\cdot, t) = \mathbf{0}$  o  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\cdot, t) = \mathbf{0}$  per ogni  $t > 0$ , risulterà anche  $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\cdot, t) \equiv \mathbf{0}$ . Infatti, fissato un punto  $(x, y, z)$ , e scrivendo  $\mathbf{v}(t)$  in luogo di  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(t) &= \operatorname{rot} \mathbf{v}(0) + \int_0^t \operatorname{rot} \frac{d}{ds} \mathbf{v}(s) \, ds = \mathbf{0} + \int_0^t \operatorname{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v} \right] \, ds = \\ &= \int_0^t \operatorname{rot} \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \right) \, ds = \int_0^t \operatorname{rot} \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \, ds. \end{aligned}$$

D'altronde, per ogni funzione scalare  $\varphi$  e per ogni funzione vettoriale  $\mathbf{A}$  si verifica facilmente che

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A},$$

ove il simbolo  $\times$  denota il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Nel nostro caso si ha  $\varphi = -\rho^{-1}$  e  $\mathbf{A} = \nabla p$ ; essendo  $\nabla p = \frac{p_0}{\rho_0} k \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} \nabla \rho$ , il vettore  $\nabla p$  è parallelo a  $\nabla \rho$ , da cui

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(t) = \operatorname{rot} \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \nabla p + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = \mathbf{0}.$$

Supponiamo, per semplicità,  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Allora da  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$  segue, essendo  $T$  semplicemente connesso, che esiste un *potenziale cinetico*  $U(x, y, z, t)$  tale che  $\mathbf{v} = -\nabla U$  in  $T$ . In particolare, si noti che

$$\langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v} = \langle \nabla U, \nabla \rangle \nabla U = \sum_{i=1}^3 D_i U D_i \nabla U = \frac{1}{2} \nabla \sum_{i=1}^3 (D_i U)^2 = \frac{1}{2} \nabla |\nabla U|^2.$$

Sostituendo la relazione  $\mathbf{v} = -\nabla U$  nel sistema (4.8), quest'ultimo diventa

$$\begin{cases} -\nabla U_t + \frac{1}{2} \nabla |\nabla U|^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla U) = 0 \\ p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \end{cases} \quad (4.9)$$

ed è ancora troppo complicato. Facciamo qualche approssimazione: poniamo  $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ , ossia  $\frac{\rho}{\rho_0} = s + 1$ , e supponiamo  $\frac{\rho}{\rho_0} \simeq 1$ , da cui  $s \simeq 0$ . Di conseguenza,  $p = p_0(1 + s)^k \simeq p_0(1 + ks)$  e  $\nabla p \simeq p_0 k \nabla s$ . Allora, posto  $a^2 = \frac{p_0 k}{\rho_0}$ , il sistema (4.9) si riduce a

$$\begin{cases} -\nabla U_t + \frac{1}{2} \nabla |\nabla U|^2 = -a^2 \nabla s, \\ s_t - \Delta U = 0 \\ p = p_0(1 + ks). \end{cases} \quad (4.10)$$

La prima equazione del sistema si può integrare, ottenendo

$$-U_t + \frac{1}{2} |\nabla U|^2 + a^2 s = c(t)$$

con  $c(t)$  funzione indipendente da  $(x, y, z)$ . Ma si può supporre  $c(t) = 0$  modificando il potenziale  $U$ , ossia rimpiazzandolo con  $U(x, y, z, t) - \int_0^t c(s) ds$ : dunque possiamo supporre senz'altro  $-U_t + \frac{1}{2}|\nabla U|^2 + a^2 s = 0$ . Derivando questa equazione rispetto a  $t$ , troviamo

$$0 = -U_{tt} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla U|^2 + a^2 s_t = -U_{tt} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla U|^2 + a^2 \Delta U,$$

e dunque  $U$  verifica

$$U_{tt} - a^2 \Delta U = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla U|^2.$$

Questa è un'equazione non lineare, la cui parte principale è l'operatore di D'Alembert. Se supponiamo che il modulo della velocità sia indipendente dal tempo, si ottiene che  $U$  verifica l'equazione delle onde.

## 4.2 Il caso di una variabile spaziale

Consideriamo l'equazione delle onde in una variabile spaziale: questo è il caso più semplice ma permette già di analizzare i fenomeni tipici delle equazioni iperboliche. La prima cosa da osservare è che, come peraltro già sappiamo dall'esempio 1.6.5, si ha:

**Teorema 4.2.1** *Sia  $D$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^2$ . Tutte e sole le soluzioni di classe  $C^2$  dell'equazione*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } D \tag{4.11}$$

*sono le funzioni  $u$  della forma*

$$u(x, t) = \alpha(x + ct) + \beta(x - ct), \tag{4.12}$$

*con  $\alpha$  e  $\beta$  funzioni di classe  $C^2$  di una sola variabile. In particolare, esse sono estendibili ad un opportuno parallelogramma contenente  $D$ .*

**Dimostrazione** È ovvio che tutte le funzioni della forma sopra scritta risolvono l'equazione (4.11).

Viceversa, l'operatore di D'Alembert  $D_t^2 - c^2 D_x^2$  si può fattorizzare nella forma  $(D_t - cD_x)(D_t + cD_x)$ , cosicché l'equazione (4.11) è equivalente al sistema del primo ordine

$$\begin{cases} (D_t + cD_x)u = v \\ (D_t - cD_x)v = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Se  $u$  è una soluzione di classe  $C^2$  dell'equazione (4.11), allora  $v = u_t + cu_x$  è di classe  $C^1$  e risolve l'equazione  $v_t - cv_x = 0$ . Poniamo, per  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$S_\lambda = \{(x, t) \in D : x + ct = \lambda\}.$$

La funzione  $v$  è costante su  $S_\lambda$  (ammesso che questo non sia vuoto): infatti, nei punti di  $S_\lambda$ , che sono della forma  $(\lambda - ct, t)$  con  $t \in I_\lambda$  (ove  $I_\lambda$ , essendo  $D$  convesso, è un opportuno intervallo di  $\mathbb{R}$ ), si ha

$$\frac{d}{dt}v(\lambda - ct, t) = -cv_x(\lambda - ct, t) + v_t(\lambda - ct, t) = (v_t - cv_x)(\lambda - ct, t) = 0.$$

Sia  $w(\lambda)$  il valore costante che  $v$  assume su  $S_\lambda$ : allora per ogni  $(x, t) \in D$ , posto  $\lambda = x + ct$ , si ha  $v(x, t) = w(\lambda) = w(x + ct)$ , e in definitiva

$$v(x, t) = w(x + ct) \quad \forall (x, t) \in D.$$

In particolare, la funzione  $w$  è di classe  $C^1$ . Dunque, se  $\alpha$  è una funzione di classe  $C^2$  tale che  $\alpha'(\lambda) = \frac{1}{2c} w(\lambda)$ , si avrà

$$(D_t + cD_x)\alpha(x + ct) = 2c\alpha'(x + ct) = w(x + ct) = v(x, t) = (D_t + cD_x)u(x, t),$$

ossia la funzione  $z(x, t) = u(x, t) - \alpha(x + ct)$  risolve l'equazione  $z_t + cz_x = 0$  ed è di classe  $C^2$ .

Se ora poniamo

$$T_\lambda = \{(x, t) \in D : x - ct = \lambda\},$$

si trova che nei punti  $(\lambda + ct, t)$  di  $T_\lambda$ , sempre che questo sia non vuoto, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z(\lambda + ct, t) &= cu_x(\lambda + ct, t) + u_t(\lambda + ct, t) - w(\lambda + 2ct) = \\ &= (u_t + cu_x - v)(\lambda + ct, t) = 0, \end{aligned}$$

e dunque  $z$  è costante su  $T_\lambda$ : detto  $\beta(\lambda)$  tale valore, come in precedenza si ricava che

$$z(x, t) = \beta(x - ct) \quad \forall (x, t) \in D,$$

e in particolare  $\beta$  è di classe  $C^2$ . Pertanto

$$u(x, t) = \alpha(x + ct) + \beta(x - ct) \quad \forall (x, t) \in D$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  funzioni di classe  $C^2$ . Inoltre,  $\alpha$  è definita su un certo intervallo  $I$  e  $\beta$  è definita su un certo intervallo  $J$ : si conclude che  $u$  è definita sull'intero parallelogramma

$$P = \{(x, t) : x + ct \in I, x - ct \in J\},$$

il quale contiene  $D$  poiché la soluzione è definita, per ipotesi, su tutto  $D$ .  $\square$

**Osservazione 4.2.2** Per un osservatore che si muova con velocità  $c$  lungo la direzione positiva dell'asse  $x$ , il valore di  $x - ct$  resta costante nel tempo: quindi  $\beta(x - ct)$  rimane costante. In altre parole, il grafico di  $z = \beta(x - ct)$  nel piano  $xz$  si sposta con velocità  $c$  verso destra (asse delle  $x$  positive). Analogamente, il grafico  $z = \alpha(x + ct)$  si sposta con velocità  $c$  verso sinistra (asse delle  $x$  negative). Le funzioni  $x \mapsto \beta(x - ct)$  e  $x \mapsto \alpha(x + ct)$  si chiamano *onde piane*, e come abbiamo visto queste onde si propagano con velocità  $\pm c$  lungo l'asse  $x$  mantenendo la propria forma. In definitiva, il teorema 4.2.1 ci dice che ogni soluzione dell'equazione di D'Alembert si ottiene sovrapponendo due onde piane, la prima *progressiva* (che si propaga con velocità  $c$ ), la seconda *regressiva* (che si propaga con velocità  $-c$ ).

Enunciamo ora il teorema di esistenza per il problema di Cauchy in una variabile spaziale.

**Teorema 4.2.3** Se  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$  e  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ , allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.14)$$

è ben posto e la sua unica soluzione, che appartiene a  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ , è data dalla formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi. \quad (4.15)$$

**Dimostrazione** Se la soluzione esiste, sappiamo dal teorema 4.2.1 che essa ha la forma (4.12), con  $\alpha, \beta$  funzioni di classe  $C^2$ . Le condizioni iniziali ci dicono che

$$\alpha(x) + \beta(x) = \varphi(x), \quad c[\alpha'(x) - \beta'(x)] = \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte vale l'identità, di facile verifica,

$$\begin{aligned} & \alpha(x+ct) + \beta(x-ct) = \\ &= \frac{1}{2}[\alpha(x+ct) + \beta(x+ct) + \alpha(x-ct) + \beta(x-ct)] + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} [\alpha'(\xi) - \beta'(\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

quindi la soluzione  $u$ , se esiste, è data dalla formula (4.15).

D'altra parte, sempre per il teorema 4.2.1 la funzione (4.15) è davvero soluzione del problema (4.14), essendo somma di due funzioni calcolate rispettivamente in  $x+ct$  e  $x-ct$ , la cui regolarità  $C^2$  è assicurata dalla regolarità dei dati  $\varphi$  e  $\psi$ .

Infine, verifichiamo che il problema è ben posto: se  $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ , allora per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [-T, T]$  si ha

$$|u(x, t)| \leq \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2c} \int_{x-|ct|}^{x+|ct|} |\psi(\xi)| d\xi \leq \|\varphi\|_\infty + T\|\psi\|_\infty,$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

Dal punto di vista qualitativo, la formula (4.15) ci rivela immediatamente che il valore della soluzione  $u$  del problema (4.14) in un punto  $(x_0, t_0)$ , con  $t_0$  positivo, dipende soltanto dai valori assunti dal dato  $\varphi$  nei due punti  $x_0 \pm ct_0$  e da  $\psi$  nell'intervallo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ . Questo intervallo si dice *dominio di dipendenza* del punto  $(x_0, t_0)$ . Più in generale, dato un intervallo  $I = [a - r, a + r] \subset \mathbb{R}$ , l'insieme dei punti  $(x, t)$ , per i quali il valore di  $u$  in  $(x, t)$  dipende solo dai valori dei dati  $\varphi, \psi$  in punti di  $I$ , è il rombo

$$\mathcal{B}(I) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| \leq r - c|t|\}.$$

Le rette di pendenza  $\pm \frac{1}{c}$  nel piano  $xt$ , come sappiamo, sono le caratteristiche dell'equazione. Conducendo per un punto  $(x_0, 0)$  le due caratteristiche, si determina il cono

$$\mathcal{C}(x_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq c|t|\},$$

il quale si chiama *dominio di influenza* del punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Esso è costituito dai punti  $(x, t)$  tali che il valore  $u(x, t)$  è influenzato dai valori assunti in  $x_0$  dai dati  $\varphi, \psi$ . Osserviamo che, per giunta, il valore di  $\varphi$  in  $x_0$  influenza la soluzione solamente nei punti delle rette  $x - x_0 = \pm ct$ . In altre parole, possiamo

dire che le perturbazioni si propagano lungo le linee caratteristiche. C'è da osservare inoltre un fatto fondamentale: a differenza che nel caso parabolico, i fenomeni iperbolici sono *reversibili* nel tempo: questo segue dall'invarianza dell'equazione delle onde rispetto alla trasformazione  $t \mapsto -t$ , e ce lo conferma la forma della soluzione (4.15).

Consideriamo ora un altro problema unidimensionale: quello della “corda semi-finita”, ossia l'equazione di D'Alembert sulla semiretta  $[0, \infty[$ . Ci limiteremo, per semplicità, alla semiretta dei tempi positivi. Il problema è il seguente:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } ]0, \infty[^2 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = h(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

ove  $\varphi$  e  $h$  sono funzioni di classe  $C^2$  mentre  $\psi$  è di classe  $C^1$ . Poiché cerchiamo una soluzione di classe  $C^2$ , dobbiamo imporre le condizioni di compatibilità

$$h(0) = \varphi(0), \quad h'(0) = \psi(0), \quad h''(0) = c^2 \varphi''(0). \quad (4.17)$$

Si ha allora questo risultato:

**Teorema 4.2.4** *Se  $\varphi \in C^2([0, \infty[)$ ,  $h \in C^2([0, \infty[)$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty[)$ , e se valgono le condizioni (4.17), allora il problema (4.16) è ben posto e la soluzione  $u \in C^2([0, \infty[ \times [0, \infty[)$  è data da*

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi & \text{se } x \geq ct, \\ h(t - \frac{x}{c}) + \frac{\varphi(ct+x) - \varphi(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(\xi) d\xi & \text{se } x \leq ct. \end{cases}$$

**Dimostrazione** Sappiamo dal teorema 4.2.1 che la soluzione  $u$ , se esiste, ha la forma  $u(x, t) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct)$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  di classe  $C^2$ . Imponendo le condizioni al contorno, otteniamo

$$\begin{cases} \alpha(x) + \beta(x) = \varphi(x) & \forall x \geq 0 \\ c\alpha'(x) - c\beta'(x) = \psi(x) & \forall x \geq 0 \\ \alpha(ct) + \beta(-ct) = h(t) & \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$



Derivando la prima equazione, si ha il sistema

$$\begin{cases} \alpha'(x) + \beta'(x) = \varphi'(x) & \forall x \geq 0 \\ c\alpha'(x) - c\beta'(x) = \psi(x) & \forall x \geq 0, \end{cases}$$

da cui

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad \beta(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \quad \forall x \geq 0.$$

Si noti che dovremmo aggiungere ad  $\alpha$  e  $\beta$  due costanti arbitrarie  $h$  e  $k$ , ma la condizione  $\alpha(x) + \beta(x) = \varphi(x)$  implica che  $h + k = 0$ ; tenuto conto che  $u = \alpha + \beta$ , non è restrittivo scegliere  $h = k = 0$ .

Invece per ogni  $\tau < 0$  si ha dalla terza equazione del sistema (4.18)

$$\beta(\tau) = -\alpha(-\tau) + h(-\tau/c) = -\frac{1}{2}\varphi(-\tau) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\tau} \psi(\xi) d\xi + h(-\tau/c).$$

Sostituendo le espressioni delle funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  nella definizione della candidata soluzione, si ottengono senza difficoltà le formule relative a  $u$ . Si noti che, in virtù delle condizioni di compatibilità (4.17), la funzione  $u$  è di classe  $C^2$  anche nei punti in cui  $x = \pm ct$ . Infine, il problema è ben posto perché si ha, per ogni  $T > 0$  e per ogni  $(x, t) \in [0, \infty[ \times ]0, T]$ ,

$$|u(x, t)| \leq \begin{cases} \|\varphi\|_\infty + T\|\psi\|_\infty & \text{se } x \geq ct, \\ \|h\|_\infty + \|\varphi\|_\infty + T\|\psi\|_\infty & \text{se } x \leq ct. \end{cases} \quad \square$$

**Osservazione 4.2.5** Quando  $h(t) \equiv 0$ , la soluzione in un punto  $(x_0, t_0)$  è, per  $x_0 \leq ct_0$ ,

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \left[ \frac{1}{2}\varphi(ct_0 + x_0) + \frac{1}{2c} \int_0^{ct_0 + x_0} \psi(\xi) d\xi \right] - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2}\varphi(ct_0 - x_0) + \frac{1}{2c} \int_0^{ct_0 - x_0} \psi(\xi) d\xi \right], \end{aligned}$$

ossia è somma di un'onda diretta (regressiva, con velocità  $-c$ , partita dal punto di ascissa  $x = x_0 + ct_0$  all'istante  $t = 0$ ) e di un'onda riflessa, progressiva (velocità  $c$ ), che è il risultato della riflessione, avvenuta nell'estremo  $x = 0$  all'istante  $t = t_0 - \frac{x_0}{c}$ , di un'onda regressiva, partita all'istante  $t = 0$

dal punto di ascissa  $x = ct_0 - x_0$ . Se prolunghiamo per disparità le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  a tutto  $\mathbb{R}$ , la soluzione si estende a tutto  $\mathbb{R} \times [0, \infty[$  nel modo seguente:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[,$$

cioè ritroviamo la formula (4.15). Si noti che le estensioni dispari di  $\varphi$  e  $\psi$  sono rispettivamente di classe  $C^2$  e  $C^1$ , in virtù delle condizioni di compatibilità (4.17).

Concludiamo l'esame dei problemi in una dimensione spaziale con il caso della corda di lunghezza finita  $L$ , fissata agli estremi  $0$  e  $L$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.19)$$

Le condizioni di compatibilità per avere una soluzione in  $C^2([0, L] \times [0, \infty[)$  sono:

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \varphi(L) = \psi(L) = \varphi''(L) = 0. \quad (4.20)$$

Si ha allora:

**Teorema 4.2.6** *Se  $\varphi \in C^2([0, L])$  e  $\psi \in C^1([0, L])$ , e se valgono le condizioni (4.20), allora il problema (4.19) è ben posto e la soluzione  $u \in C^2([0, L] \times [0, \infty[)$  è data da*

$$u(x, t) = \frac{\bar{\varphi}(x + ct) + \bar{\varphi}(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{\psi}(\xi) d\xi, \quad (4.21)$$

ove  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\psi}$  sono i prolungamenti dispari e  $2L$ -periodici di  $\varphi$  e di  $\psi$  a tutto  $\mathbb{R}$ . In particolare, la soluzione  $u$  è periodica nella variabile  $t$  di periodo  $2L/c$ .

**Dimostrazione** La soluzione  $u$ , se esiste, ha la forma  $u(x, t) = \alpha(x + ct) + \beta(x - ct)$ . Le condizioni  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  ci dicono che

$$\alpha(ct) + \beta(-ct) = 0, \quad \alpha(L + ct) + \beta(L - ct) = 0,$$

il che implica  $\beta(-\xi) = -\alpha(\xi)$  per ogni  $\xi \geq 0$  ed anche  $\alpha(L+\xi) = -\beta(L-\xi) = \alpha(\xi - L)$  per ogni  $\xi \geq L$ . Pertanto  $\alpha(x) = \alpha(x + 2L)$  per ogni  $x \geq 0$  e  $\beta(x) = \beta(x - 2L)$  per ogni  $x \leq 0$ . Possiamo dunque prolungare  $\alpha$  e  $\beta$  a funzioni  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  definite su  $\mathbb{R}$  e  $2L$ -periodiche.

Dalle condizioni iniziali del sistema (4.19) ricaviamo poi

$$\varphi(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \psi(x) = c\alpha'(x) - c\beta'(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (4.22)$$

da cui si deduce facilmente, come nel caso della corda semi-finita,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(\xi)d\xi, \\ \beta(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(\xi)d\xi \end{aligned} \quad \forall x \in [0, L]. \quad (4.23)$$

Utilizzando la periodicit  delle estensioni  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$ ,   facile riconoscere che

$$\bar{\beta}(x) = -\bar{\alpha}(-x), \quad \bar{\beta}'(x) = \bar{\alpha}'(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e in particolare, quindi,

$$\varphi(x) = \bar{\alpha}(x) - \bar{\alpha}(-x), \quad \psi(x) = c(\bar{\alpha}'(x) - \bar{\alpha}'(-x)) \quad \forall x \in [0, L].$$

Volendo estendere i dati  $\varphi$  e  $\psi$  in modo che la (4.22) valga per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , bisogna che le estensioni siano esse stesse, come  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$ , funzioni dispari e  $2L$ -periodiche. Dette  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\psi}$  tali estensioni, si ottiene che la (4.23) vale anch'essa per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Da qui segue subito che  $u$ , se esiste, ha la forma prescritta nell'enunciato ed   quindi a sua volta prolungabile ad una funzione definita su  $[0, L] \times \mathbb{R}$ , periodica nella variabile  $t$  di periodo  $\frac{2L}{c}$ . Si noti che  $\frac{2L}{c}$    il tempo impiegato da un'onda per partire da un punto, percorrere la corda in un senso, riflettersi a una estremit , percorrerla nell'altro senso, riflettersi alla seconda estremit  e tornare al punto di partenza.

Dalla forma (4.21) della soluzione segue infine immediatamente la dipendenza continua dai dati nella norma uniforme in  $[0, L] \times [-T, T]$ .  $\square$

**Osservazione 4.2.7** Talvolta   pi  utile cercare la soluzione del problema (4.19) sotto forma di serie di Fourier, quantunque questa scelta comporti ipotesi pi  restrittive sui dati: occorre infatti prendere  $\varphi \in C^3([0, L])$  e  $\psi \in C^2([0, L])$ , tali che valgano le condizioni (4.20). Possiamo sviluppare le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  in serie di soli seni:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Si noti che in tal modo  $\varphi$  e  $\psi$  possono pensarsi prolungate a  $\mathbb{R}$  in modo dispari e  $2L$ -periodico e che le serie sopra scritte convergono uniformemente in  $\mathbb{R}$ , al pari delle serie relative a  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  e  $\psi'$ . Con il metodo della separazione di variabili non è difficile mostrare che la soluzione  $u$  è data da

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sin \frac{n\pi(x+ct)}{L} + \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right] - \frac{L}{2\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \left[ \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} - \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right]$$

Questa è la rappresentazione di  $u$  come somma di onde progressive e regressive. Con evidenti modifiche si può anche rappresentare la soluzione come somma di *onde stazionarie*,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin \left( \frac{n\pi ct}{L} + \phi_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

ove

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} d\xi, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} d\xi,$$

$$A_n = N_n \sin \phi_n, \quad \tan \phi_n = \frac{A_n}{B_n}.$$

Questo modo di scrivere la soluzione del problema (4.19) si presta a una analisi musicale del suono prodotto dalla vibrazione della corda: ogni onda stazionaria  $N_n \sin \left( \frac{n\pi ct}{L} + \phi_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$ , che viene detta *armonica del suono*, determina per ciascun punto  $x$  della corda un *moto armonico* di ampiezza  $N_n \sin \frac{n\pi x}{L}$  e fase  $\phi_n$  (che è la stessa per tutti i punti). La corda, di conseguenza, emette un suono di *altezza* pari alla frequenza di oscillazione  $\frac{n\pi x}{L}$ , *intensità*  $|N_n|$  e *timbro* determinato dalla struttura dell'insieme delle ampiezze (che decrescono verso 0 per  $n \rightarrow \infty$ ).

### 4.3 Il metodo dell'energia

In questo paragrafo inizieremo lo studio dell'equazione delle onde in  $n$  variabili spaziali. Mostriamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.24)$$

ha al più una soluzione e proveremo la dipendenza continua della soluzione dai dati in opportune norme integrali, rimandando la costruzione esplicita della soluzione ai paragrafi successivi.

Per stabilire l'unicità della soluzione faremo uso del *metodo dell'energia*. Tutto si basa sul seguente

**Lemma 4.3.1** *Se  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  è soluzione dell'equazione delle onde in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$  e se*

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad \text{per } |x - x_0| \leq a,$$

*allora  $u \equiv 0$  sul cono  $\{(x, t) : ct + |x - x_0| \leq a\}$ .*

**Dimostrazione** Sia  $t_0 \in ]0, \frac{a}{c}[$ , e consideriamo il tronco di cono  $D = \{(x, t) : ct + |x - x_0| \leq a, 0 < t < t_0\}$ . Moltiplichiamo l'equazione delle onde per  $2u_t$  e integriamo su  $D$ :

$$0 = \int_D 2u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) dx dt = \int_D \frac{\partial}{\partial t} |u_t|^2 dx dt - 2c^2 \int_D u_t \Delta u dx dt;$$

d'altra parte risulta

$$\begin{aligned} 2u_t \Delta u &= \left( 2u_t \Delta u + 2 \sum_{i=1}^n D_i u_t D_i u \right) - 2 \sum_{i=1}^n D_i u_t D_i u = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n D_i (u_t D_i u) - \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

cosicché sostituendo nella relazione precedente ricaviamo

$$0 = \int_D \frac{\partial}{\partial t} (|u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx dt - 2c^2 \int_D \sum_{i=1}^n D_i (u_t D_i u) dx dt.$$

Notando che  $\partial D$  è di classe  $C^1$  a tratti possiamo utilizzare il teorema della divergenza, ottenendo

$$0 = \int_{\partial D} \left[ (|u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2) \nu_t - 2c^2 \sum_{i=1}^n u_t D_i u \nu_i \right] d\sigma,$$

ove  $\nu$  è il versore normale esterno a  $D$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Decomponendo  $\partial D$  nelle sue tre parti  $\Sigma_1$  (la base),  $\Sigma_2$  (la sommità) e  $\Sigma_3$  (la superficie laterale), si ha:

- su  $\Sigma_1$ ,  $\nu = (0, \dots, 0, -1)$  e  $t = 0$ ,
- su  $\Sigma_2$ ,  $\nu = (0, \dots, 0, 1)$  e  $t = t_0$ ,
- su  $\Sigma_3$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_t)$  con

$$\nu_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \sum_{i=1}^n \nu_i^2 = 1 - \nu_t^2 = \frac{1}{1+c^2} = \frac{\nu_t^2}{c^2}.$$

Notiamo inoltre che su  $\Sigma_1$  l'integrando è nullo a causa delle condizioni iniziali. Pertanto deduciamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma_2} [ |u_t(x, t_0)|^2 + c^2 |\nabla u(x, t_0)|^2 ] dx + \\ &+ \frac{1}{\nu_t} \int_{\Sigma_3} \sum_{i=1}^n [ c^2 |u_t|^2 \nu_i^2 + c^2 (D_i u)^2 \nu_t^2 - 2c^2 u_t D_i u \nu_i \nu_t ] d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma_2} [ |u_t(x, t_0)|^2 + c^2 |\nabla u(x, t_0)|^2 ] dx + \frac{c^2}{\nu_t^2} \int_{\Sigma_3} \sum_{i=1}^n (u_t \nu_i - D_i u \nu_t)^2 d\sigma, \end{aligned}$$

da cui

$$u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 = 0 \quad \text{su } \Sigma_2.$$

Poiché  $t_0$  è arbitrario, si ha

$$u_t(x, t) = 0, \quad \nabla u(x, t) = \mathbf{0} \quad \text{per } t \in ]0, a/c[ \text{ e } |x - x_0| \leq a - ct;$$

per continuità deduciamo che  $u$  è costante per  $ct + |x - x_0| \leq a$ . D'altronde, essendo  $u(x, 0) = 0$  concludiamo che  $u \equiv 0$  per  $ct + |x - x_0| \leq a$ .  $\square$

**Corollario 4.3.2** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.25)$$

con  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ ,  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , ha al più una soluzione.

**Dimostrazione** Se  $u$  e  $v$  sono due soluzioni, la loro differenza risolve il problema (4.24) con  $\varphi$  e  $\psi$  nulle; dunque si può applicare il lemma 4.3.1 per ogni scelta di  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $a \in ]0, \infty[$ . Ne segue che  $u - v$  è identicamente nulla.  $\square$

**Osservazione 4.3.3** Più in generale, per il problema di Cauchy (4.24) vale un “principio di conservazione dell’energia”: se  $u$  risolve l’equazione delle onde in  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$  e se  $\varphi$  e  $\psi$  hanno supporto compatto in  $\mathbb{R}^n$  (cosicché anche  $u$  ha supporto compatto rispetto a  $x$  per ogni  $t \in [0, T]$ , con  $T > 0$  opportuno), allora l’integrale dell’energia

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} [|u_t(x, t)|^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2] dx$$

è costante in  $[0, T]$ . Infatti, procedendo come nella dimostrazione del lemma 4.3.1, otteniamo per  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} 2u_t(x, t)(u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t)) dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(x, t)|^2 dx - 2c^2 \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t) \sum_{i=1}^n D_i^2 u(x, t) dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(x, t)|^2 dx + 2c^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n D_i u_t(x, t) D_i u(x, t) dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t(x, t)|^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx = \frac{d}{dt} E(t), \end{aligned}$$

ove si è integrato per parti in  $\mathbb{R}^n$  usando il fatto che  $u(x, t)$  è identicamente nulla fuori di un compatto. Pertanto

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

il che prova l’enunciato.

## 4.4 Il problema di Cauchy in due e tre variabili spaziali

Veniamo ora al problema dell'esistenza per il problema (4.24) nel caso  $n = 2$  oppure  $n = 3$ . Ci proponiamo di fornire una formula esplicita per la soluzione. A questo scopo occorre provare alcuni fatti preliminari che valgono per  $n$  arbitrario.

Sia  $(x, t)$  un punto fissato di  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ , e consideriamo per ogni  $r > 0$  le medie sferiche di una soluzione  $u$  di classe  $C^2$  del problema (4.24):

$$U(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) d\sigma_y =: \mathop{\int}\limits_{\partial B(x, r)} u(y, t) d\sigma_y, \quad (4.26)$$

e, analogamente, per un fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ , quelle dei dati  $\varphi$  e  $\psi$ :

$$\Phi(x, r) = \mathop{\int}\limits_{\partial B(x, r)} \varphi(y) d\sigma_y, \quad \Psi(x, r) = \mathop{\int}\limits_{\partial B(x, r)} \psi(y) d\sigma_y. \quad (4.27)$$

Useremo, più in generale, il simbolo  $\mathop{\int}\limits_A$  per denotare la media integrale su un qualunque insieme (misurabile)  $A$ .

Vale allora questo lemma:

**Lemma 4.4.1** *Sia  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  soluzione del problema (4.24). Allora, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , la funzione  $U(x, \cdot, \cdot)$  appartiene a  $C^2([0, \infty[^2)$  e risolve il problema*

$$\begin{cases} U_{tt}(x, \cdot, \cdot) - c^2 (U_{rr}(x, \cdot, \cdot) + \frac{n-1}{r} U_r(x, \cdot, \cdot)) = 0 & \text{in } [0, \infty[^2, \\ U(x, r, 0) = \Phi(x, r), & r \geq 0, \\ U_t(x, r, 0) = \Psi(x, r), & r \geq 0, \\ U(x, 0, t) = u(x, t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Se, in più,  $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ , con  $k > 2$ , allora  $U(x, \cdot, \cdot) \in C^k([0, \infty[^2)$ .

L'equazione che compare in questo enunciato si chiama equazione di Eulero-Poisson-Darboux. Si noti che l'espressione  $U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r$  corrisponde al Laplaciano applicato alle funzioni radiali, nel senso che se  $v$  è una funzione radiale, cioè tale che  $v(x) = [u(r)]_{r=|x|} = u(|x|)$ , allora risulta  $\Delta v(x) = u_{rr}(|x|) + \frac{n-1}{|x|} u_r(|x|)$ .



**Dimostrazione** Nel calcolo delle derivate  $U_r$  e  $U_{rr}$  non è restrittivo supporre  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ , poiché, per ogni fissato compatto di  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$ ,  $u$  è limite in  $C^2(K)$  di una successione di funzioni di classe  $C^\infty$ .

Anzitutto, per omotetia si vede che

$$U(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz, t) d\sigma_z = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz, t) d\sigma_z,$$

da cui

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U(x, r, t) = u(x, t);$$

inoltre, derivando sotto il segno di integrale,

$$U_t(x, r, t) = \int_{\partial B(0,1)} u_t(x + rz, t) d\sigma_z, \quad U_{tt}(x, r, t) = \int_{\partial B(0,1)} u_{tt}(x + rz, t) d\sigma_z.$$

In particolare, è chiaro che risulta, grazie alla continuità di  $u$  e  $u_t$ ,

$$U(x, r, 0) = \Phi(x, r), \quad U_t(x, r, 0) = \Psi(x, r) \quad \forall r > 0.$$

Per quanto riguarda le derivazione rispetto a  $r$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} U_r(x, r, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz, t) d\sigma_z = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(x + rz, t), z \rangle d\sigma_z, \end{aligned}$$

il che ci dice che  $U_r$  dipende dalle derivate prime di  $u$ . Proseguendo il calcolo, risulta

$$\begin{aligned} U_r(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \left\langle \nabla u(y, t), \frac{y-x}{r} \right\rangle d\sigma_y = \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y, t) d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy = \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy = \frac{r}{n} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz, \end{aligned}$$

e, in particolare, otteniamo  $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(x, r, t) = 0$ . Inoltre

$$\begin{aligned} U_{rr}(x, r, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{n} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \frac{r}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \langle \nabla \Delta u(x + rz, t), z \rangle dz; \end{aligned}$$

ora, poiché risulta, per il teorema della divergenza,

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \langle \nabla \Delta u(x + rz, t), z \rangle dz &= \frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} [\Delta u(x + rz, t)] z_i dz = \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \sum_{i=1}^n \Delta u(x + rz, t) z_i \nu_i d\sigma_z - \\
&\quad - \frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \sum_{i=1}^n \Delta u(x + rz, t) D_i z_i dz = \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) d\sigma_z - \frac{n}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz = \\
&= \int_{\partial B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) d\sigma_z - \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz,
\end{aligned}$$

deduciamo che

$$U_{rr}(x, r, t) = \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \int_{\partial B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) d\sigma_z.$$

In particolare,  $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{rr}(x, r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$ . È allora facile verificare che  $U(x, \cdot, \cdot)$  e le sue derivate  $U_r, U_t, U_{rr}, U_{rt}, U_{tt}$  sono funzioni continue in  $[0, \infty[{}^2$ . Ciò prova che  $U(x, \cdot, \cdot) \in C^2([0, \infty[{}^2)$ .

Se, poi,  $u \in C^k([0, \infty[{}^2)$ , allora partendo dalle espressioni di  $U, U_r$  e  $U_{rr}$  è possibile calcolare tutte le derivate di ordine  $k$  di  $U$ , e mostrarne senza particolari difficoltà la continuità in  $[0, \infty[{}^2$ .

Verifichiamo infine che  $U$  risolve l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux. Dall'espressione di  $U_r$  in termini di media integrale su  $B(x, r)$  ricaviamo

$$r^{n-1} U_r(x, r, t) = \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy = \frac{1}{c^2 \omega_n} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y, t) dy,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} U_r(x, r, t)) &= \frac{1}{c^2 \omega_n} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} u_{tt}(y, t) d\sigma_y d\rho = \\
&= \frac{r^{n-1}}{c^2} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y, t) d\sigma_y = \frac{r^{n-1}}{c^2} U_{tt}(x, r, t).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$U_{tt} = \frac{c^2}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} U_r) = c^2 \left( U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right),$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

Passiamo ora a dimostrare i teoremi di esistenza per il problema (4.24) nei casi  $n = 2$  e  $n = 3$ . Considereremo anzitutto il caso  $n = 3$ ; l'altro, come vedremo, si deduce dal primo. Il caso di  $n$  qualunque sarà trattato nel paragrafo successivo.

**Teorema 4.4.2** *Sia  $n = 3$ , siano  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$  e  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , e sia  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[)$  una soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4.29)$$

Allora  $u$  è data dalla formula di Kirchhoff

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(0,1)} \varphi(x + ctz) d\sigma_z \right) + t \int_{\partial B(0,1)} \psi(x + ctz) d\sigma_z = \\ &= \int_{\partial B(x, ct)} [t\psi(y) + \varphi(y) + \langle \nabla \varphi(y), y - x \rangle] d\sigma_y \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Viceversa, se  $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$  e  $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , allora il problema (4.29) è ben posto e la sua unica soluzione è la funzione (4.30), la quale appartiene a  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[)$ .

**Dimostrazione** Poniamo per un fissato  $x \in \mathbb{R}^3$  e per ogni  $(r, t) \in ]0, \infty[^2$ :

$$V(x, r, t) = rU(x, r, t), \quad G(x, r) = r\Phi(x, r), \quad H(x, r) = r\Psi(x, r). \quad (4.31)$$

Proviamo che  $V(x, \cdot, \cdot)$  risolve il seguente problema di Cauchy, in una dimensione spaziale, per la corda semi-finita:

$$\begin{cases} V_{tt}(x, \cdot, \cdot) - c^2 V_{rr}(x, \cdot, \cdot) = 0 & \text{in } [0, \infty[^2, \\ V(x, r, 0) = G(x, r), & r \geq 0, \\ V_t(x, r, 0) = H(x, r), & r \geq 0, \\ V(x, 0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Si noti che in questo problema le condizioni di compatibilità necessarie per avere una soluzione di classe  $C^2$  sono verificate: infatti, procedendo come si

è fatto in precedenza per la funzione  $U(x, r, t)$ , si verifica in modo un po' laborioso ma non difficile che

$$\lim_{r \rightarrow 0} G(x, r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} H(x, r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} G_{rr}(x, r) = 0.$$

Le condizioni ai limiti per  $V$  sono soddisfatte: infatti, essendo  $u$  soluzione di (4.29), utilizzando (4.26) e (4.27) si ha

$$V(x, r, 0) = r \int_{\partial B(x, r)} u(y, 0) d\sigma_y = r \int_{\partial B(x, r)} \varphi(y) d\sigma_y = r\Phi(x, r) = G(x, r),$$

$$V_t(x, r, 0) = r \int_{\partial B(x, r)} u_t(y, 0) d\sigma_y = r \int_{\partial B(x, r)} \psi(y) d\sigma_y = r\Psi(x, r) = H(x, r).$$

ed anche, ovviamente,

$$V(x, 0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} rU(x, r, t) = 0.$$

Inoltre, per il lemma 4.4.1,

$$V_{tt} = r U_{tt} = r c^2 \left( U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial r} (U + rU_r) = c^2 \frac{\partial}{\partial r} V_r = c^2 V_{rr}. \quad (4.33)$$

Dunque, per  $V(x, \cdot, \cdot)$  vale il teorema 4.2.4, in base al quale quando  $r < ct$  si ha

$$V(x, r, t) = \frac{G(x, ct + r) - G(x, ct - r)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} H(x, \rho) d\rho.$$

Essendo

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(x, r, t)}{r},$$

si deduce facilmente, ricordando (4.31) e (4.27),

$$\begin{aligned} u(x, t) &= G_r(x, ct) + \frac{1}{c} H(x, ct) = \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} G(x, ct) + H(x, ct) \right] = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (ct \Phi(x, ct)) + t \Psi(x, ct) = \frac{\partial}{\partial t} (t \Phi(x, ct)) + t \Psi(x, ct) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( t \int_{\partial B(0,1)} \varphi(x + ctz) d\sigma_z \right) + t \int_{\partial B(0,1)} \psi(x + ctz) d\sigma_z. \end{aligned}$$

Svolgendo la derivata rispetto a  $t$ , si ottiene facilmente la seconda rappresentazione in (4.30). Ciò prova la prima parte del teorema 4.4.2.

Adesso dobbiamo provare che se  $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$  e  $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , allora la funzione  $u$ , data da (4.30), risolve il problema (4.29). Per la verifica delle condizioni iniziali si utilizza la prima formulazione della formula di Kirchhoff:

$$u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B(0,1)} \varphi(x + ctz) d\sigma_z + ct \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \varphi(x + ctz), z \rangle d\sigma_z + t \int_{\partial B(0,1)} \psi(x + ctz) d\sigma_z \right] = \varphi(x),$$

e analogamente

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ 2c \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \varphi(x + ctz), z \rangle d\sigma_z + \right. \\ &+ c^2 t \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla^2 \varphi(x + ctz) \cdot z, z \rangle d\sigma_z + \int_{\partial B(0,1)} \psi(x + ctz) d\sigma_z + \\ &+ ct \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \psi(x + ctz), z \rangle d\sigma_z \left. \right] = \\ &= 2c \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \varphi(x), z \rangle d\sigma_z + \psi(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'equazione differenziale, è sufficiente provare, più in generale, che se  $\alpha \in C^2(\mathbb{R}^3)$  allora la funzione

$$v(x, t) = t \int_{\partial B(0,1)} \alpha(x + ctz) d\sigma_z$$

è soluzione dell'equazione delle onde: infatti, da ciò si ha come conseguenza che se  $\alpha \in C^3(\mathbb{R}^3)$  allora anche  $v_t$  risolve tale equazione, essendo evidentemente  $(v_t)_{tt} = v_{ttt} = c^2(\Delta v)_t = c^2 \Delta v_t$ .

In effetti, risulta

$$\begin{aligned}
v_{tt}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\partial B(0,1)} \alpha(x + ctz) dz + ct \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \alpha(x + ctz), z \rangle d\sigma_z \right] = \\
&= \frac{2c}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \alpha(x + ctz), z \rangle d\sigma_z + \frac{ct}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla \alpha(x + ctz), z \rangle d\sigma_z = \\
&= \frac{1}{2\pi ct^2} \int_{\partial B(x, ct)} \left\langle \nabla \alpha(y), \frac{y-x}{ct} \right\rangle d\sigma_y + \\
&\quad + \frac{ct}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2 t^2} \int_{\partial B(x, ct)} \left\langle \nabla \alpha(y), \frac{y-x}{ct} \right\rangle d\sigma_y \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi ct^2} \int_{\partial B(x, ct)} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu}(y) d\sigma_y + \frac{ct}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2 t^2} \int_{\partial B(x, ct)} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu}(y) d\sigma_y \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi ct^2} \int_{B(x, ct)} \Delta \alpha(y) dy + \\
&\quad + \frac{t}{4\pi c} \left[ -\frac{2}{t^3} \int_{B(x, ct)} \Delta \alpha(y) dy + \frac{1}{t^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{ct} \int_{\partial B(x, \rho)} \Delta \alpha(y) d\sigma_y d\rho \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x, ct)} \Delta \alpha(y) d\sigma_y = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \Delta \alpha(x + ctz) d\sigma_z = c^2 \Delta v(x, t).
\end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione, osserviamo che dalla formula di Kirchhoff segue facilmente che la dipendenza continua dai dati vale nel senso seguente: per ogni  $T > 0$  e per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$  si ha

$$|u(x, t)| \leq C[\|\varphi\|_\infty + \|\nabla \varphi\|_\infty + T \|\psi\|_\infty],$$

sempre che, naturalmente, il secondo membro sia finito. Il teorema 4.4.2 è provato.  $\square$

Passiamo ora al caso  $n = 2$ . Qui non si riesce più a ridurre l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux all'equazione della corda semi-finita, perché manca l'analogo della (4.33). Allora si ricorre all'artificio di considerare una soluzione  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$  come una funzione di tre variabili, costante rispetto alla terza, che risolve il problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[$  con dati a loro volta costanti rispetto alla terza variabile spaziale. Questa procedura si chiama *metodo di discesa*.

**Teorema 4.4.3** Sia  $n = 2$ , siano  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , e sia  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$  una soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.34)$$

Allora  $u$  è data dalla formula di Parseval

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{2} \int_{B(0,1)} \frac{\varphi(x + ctz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) + \frac{t}{2} \int_{B(0,1)} \frac{\psi(x + ctz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz = \\ &= \frac{c}{2} \int_{B(x, ct)} \frac{t^2 \psi(y) + t[\varphi(y) + \langle \nabla \varphi(y), y - x \rangle]}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Viceversa, se  $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$  e  $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , allora il problema (4.34) è ben posto e la sua unica soluzione è la funzione (4.35), la quale appartiene a  $C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$ .

**Dimostrazione** Sia  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$  soluzione del problema (4.34). Per ogni  $x = (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3$  scriviamo  $x' = (x_1, x_2)$ , cosicché  $x = (x', z)$ . Definiamo

$$\bar{u}(x, t) = u(x', t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty[.$$

Analogamente, poniamo

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x'), \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x') \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Se definiamo, per l'estensione  $\bar{\zeta}(x) = \zeta(x')$  di una generica funzione  $\zeta \in C(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\bar{Z}(x, r) = \int_{\partial B(x, r)} \bar{\zeta}(y) d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3, r > 0,$$

risulta, parametrizzando i due emisferi di  $\partial B(x, r)$  mediante le funzioni  $z = \pm \gamma(y')$  con  $\gamma(y') = \sqrt{r^2 - |y' - x'|^2}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{Z}(x, r) &= \frac{2}{4\pi r^2} \int_{B(x', r)} \zeta(y') \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y')|^2} dy' = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B(x', r)} \frac{\zeta(y')}{\sqrt{r^2 - |y' - x'|^2}} dy' = \frac{r}{2} \int_{B(x', r)} \frac{\zeta(y')}{\sqrt{r^2 - |y' - x'|^2}} dy', \end{aligned}$$

e in particolare

$$\begin{aligned}\bar{Z}(x, ct) &= \frac{ct}{2} \int_{B(x', ct)} \frac{\zeta(y')}{\sqrt{c^2 t^2 - |y' - x'|^2}} dy' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{B(0', 1)} \frac{\zeta(x' + ctz')}{\sqrt{1 - |z'|^2}} dz'.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Ciò premesso, la funzione  $\bar{u}$  risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - c^2 \Delta \bar{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty[, \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{\varphi}(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \bar{u}_t(x, 0) = \bar{\psi}(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}\quad (4.37)$$

e quindi è data dalla formula di Kirchhoff (4.30):

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(0, 1)} \bar{\varphi}(x + ctz) d\sigma_z \right) + t \int_{\partial B(0, 1)} \bar{\psi}(x + ctz) d\sigma_z = \\ &= \int_{\partial B(x, ct)} [t\bar{\psi}(y) + \bar{\varphi}(y) + \langle \nabla \bar{\varphi}(y), y - x \rangle] d\sigma_y;\end{aligned}$$

ne segue, in virtù della (4.36),

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{2} \int_{B(0', 1)} \frac{\varphi(x' + ctz')}{\sqrt{1 - |z'|^2}} dz' \right) + \frac{t}{2} \int_{B(0', 1)} \frac{\psi(x' + ctz')}{\sqrt{1 - |z'|^2}} dz' = \\ &= \frac{ct}{2} \int_{B(x', ct)} \frac{t\psi(y') + \varphi(y') + \langle \nabla \varphi(y'), y' - x' \rangle}{\sqrt{c^2 t^2 - |y' - x'|^2}} dy',\end{aligned}\quad (4.38)$$

formula che, notazioni a parte, coincide con la (4.35).

Se poi  $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$  e  $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , poiché la formula (4.30) fornisce l'effettiva soluzione (di classe  $C^2$ ) del problema (4.37), otteniamo che  $\bar{u}$ , data dalla (4.38), risolve lo stesso problema: ma essendo tale funzione indipendente da  $z$  al pari dei dati  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\psi}$ , essa, o meglio  $u$ , è anche soluzione (di classe  $C^2$ ) del problema (4.34).

Infine, la dipendenza continua dai dati vale nello stesso senso in cui vale nel caso  $n = 3$ : per ogni  $T > 0$  e per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$  si ha

$$|u(x, t)| \leq C[\|\varphi\|_\infty + \|\nabla \varphi\|_\infty + T \|\psi\|_\infty],$$

sempre che il secondo membro sia finito.  $\square$



**Osservazione 4.4.4** Analizziamo le differenze qualitative fra le soluzioni del problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$  nei casi  $n = 1, 2, 3$ .

Quando  $n = 1$ , la soluzione  $u$  è data dalla formula di D'Alembert (4.15) e, come sappiamo, il valore di  $u$  in  $(x_0, t_0)$  dipende solo dai valori assunti da  $\psi$  nel dominio di dipendenza  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ , e dai valori assunti da  $\varphi$  nel bordo di tale dominio; viceversa, una perturbazione dei dati nel punto  $\bar{x}$  all'istante  $t = 0$  modificherà i valori assunti da  $u$  nell'intero dominio di influenza  $\{(x, t) : |x - \bar{x}| \leq ct\}$ : infatti la perturbazione si propagherà fino a toccare  $x_0$  all'istante  $|x_0 - \bar{x}|/c$  e continuerà ad influire (tramite la funzione  $\psi$ , ma non tramite la  $\varphi$ ) negli istanti successivi.

Quando  $n = 2$  la soluzione  $u$  è fornita dalla formula di Parseval (4.35): il valore  $u(x_0, t_0)$  dipende dai valori assunti da  $\varphi$ ,  $\nabla\varphi$  e  $\psi$  sull'intero disco  $B(x_0, ct_0)$ . L'effetto di una perturbazione avvenuta in  $\bar{x}$  all'istante iniziale è risentito da tutti i punti del cono  $\{(x, t) : |x - \bar{x}| \leq ct\}$ , quindi nel punto  $x_0$  l'influenza agisce a partire dall'istante  $|x_0 - \bar{x}|/c$ . Si noti che, a differenza del caso  $n = 1$ , ciò accade anche quando  $\psi = 0$ . Questo è precisamente quello che succede quando si getta un sasso in uno stagno, prescindendo dagli smorzamenti del moto ondoso dovuti a forze esterne ed attriti.

Nel caso  $n = 3$ , infine, la soluzione è data dalla formula di Kirchhoff (4.30) e il valore  $u(x_0, t_0)$  dipende unicamente dai valori di  $\varphi$ ,  $\nabla\varphi$  e  $\psi$  su  $\partial B(x_0, ct_0)$ . Una perturbazione avvenuta in  $\bar{x}$  per  $t = 0$  determinerà un effetto in  $x_0$  soltanto all'istante  $|x_0 - \bar{x}|/c$ , senza lasciare traccia negli istanti successivi: in altre parole, i segnali si propagano senza deformazione. Questo è il *principio di Huygens*. Ad esempio, un battito di mani emesso a un dato istante viene percepito dopo un certo tempo e il suo effetto cessa subito dopo. Naturalmente, questo è vero quando non vi sono ostacoli fisici alla propagazione: in presenza di ostacoli, invece, le onde sonore si riflettono dando luogo a fenomeni di eco.

## 4.5 Il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$

Consideriamo il problema di Cauchy (4.24) in dimensione  $n$  qualunque. Prima di enunciare il teorema di esistenza, stabiliamo alcune utili identità.

**Lemma 4.5.1** Sia  $k \in \mathbb{N}^+$  e sia  $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ . Allora per ogni  $r \in \mathbb{R}$  si ha

$$(i) \quad \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k (r^{2k} \phi'(r));$$

(ii)  $\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \phi^{(j)}(r)$ , ove per  $j = 0, 1, \dots, k-1$  le quantità  $\beta_j^k$  sono costanti indipendenti da  $\phi$ , e in particolare

$$\beta_0^k = (2k-1)!! =: (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1;$$

(iii)  $\left[\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k \phi(r)\right]_{r=ct} = \frac{1}{c^{2k}} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^k [\phi(ct)]$  per ogni  $c > 0$  e  $t > 0$ .

**Dimostrazione (i)** Utilizziamo l'induzione su  $k$ . Per  $k = 1$  la relazione da dimostrare è vera perché per ogni  $\phi \in C^2(\mathbb{R})$  i due membri coincidono con  $2\phi'(r) + r\phi''(r)$ .

Supponiamo che la tesi valga per un fissato  $k$  e per ogni  $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ , e dimostriamola per  $k+1$ . Risulta per ogni  $\phi \in C^{k+2}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \phi(r)) &= \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) (r^{2k+1} \phi(r))\right] = \\ &= \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} [(2k+1)r^{2k-1} \phi(r) + r^{2k} \phi'(r)] = \\ &= \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} [r^{2k-1} ((2k+1)\phi(r) + r\phi'(r))]. \end{aligned}$$

Dall'ipotesi induttiva applicata alla funzione  $r \mapsto (2k+1)\phi(r) + r\phi'(r)$ , che appartiene a  $C^{k+1}(\mathbb{R})$ , segue

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \phi(r)) &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k \left[r^{2k} \frac{d}{dr} [(2k+1)\phi(r) + r\phi'(r)]\right] = \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k [r^{2k}(2k+2)\phi'(r) + r^{2k+1}\phi''(r)] = \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^{2k+2} \phi'(r))\right] = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k+1} [r^{2k+2} \phi'(r)], \end{aligned}$$

e ciò prova (i).

(ii) Per  $k = 1$  i due membri coincidono con  $r\phi(r)$  e risulta  $\beta_0^1 = 1$ , cosicché la tesi è vera.

Se vale la tesi per un certo  $k$ , andiamo a provarla per l'intero  $k + 1$ . Si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \phi(r)) &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^{2k+1} \phi(r)) \right] = \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} [r^{2k-1} ((2k+1)\phi(r) + r\phi'(r))]; \end{aligned}$$

per l'ipotesi induttiva applicata alla funzione  $(2k+1)\phi(r) + r\phi'(r)$ , si ottiene

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \phi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} [(2k+1)\phi^{(j)}(r) + (r\phi'(r))^{(j)}].$$

Adesso osserviamo che

$$(r\phi'(r))^{(j)} = r\phi^{(j+1)}(r) + j\phi^{(j)}(r) : \quad (4.39)$$

infatti questa relazione è vera per  $j = 0$ , e se vale per un dato  $j$  allora

$$\begin{aligned} (r\phi'(r))^{(j+1)} &= \frac{d}{dr} (r\phi'(r))^{(j)} = \frac{d}{dr} [r\phi^{(j+1)}(r) + j\phi^{(j)}(r)] = \\ &= r\phi^{(j+2)}(r) + (1+j)\phi^{(j+1)}(r). \end{aligned}$$

Quindi, utilizzando la (4.39), si ricava

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \phi(r)) &= \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} (2k+1+j)\phi^{(j)}(r) + \sum_{h=1}^k \beta_{h-1}^k r^{h+1} \phi^{(h)}(r) = \\ &= \sum_{s=0}^k \beta_s^{k+1} r^{s+1} \phi^{(s)}(r), \end{aligned}$$

ove

$$\begin{cases} \beta_0^{k+1} = (2k+1)\beta_0^k & \text{se } s = 0, \\ \beta_s^{k+1} = (2k+1+s)\beta_s^k + \beta_{s-1}^k & \text{se } s = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Ciò prova la formula enunciata in (ii). In particolare, il coefficiente  $\beta_0^k$  si ottiene dalla formula ricorsiva

$$\begin{cases} \beta_0^0 = 1 \\ \beta_0^{k+1} = (2k+1)\beta_0^k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

che dà immediatamente  $\beta_0^k = (2k - 1)!!$ .

(iii) La formula è vera per  $k = 1$ , dato che si ha

$$\left[ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \phi(r) \right]_{r=ct} = \frac{1}{ct} \phi'(ct) = \frac{1}{c^2 t} \frac{d}{dt} [\phi(ct)].$$

Se  $k > 1$  e se la formula vale per tutti gli  $h \leq k - 1$ , allora nel caso di  $k$ , applicando l'ipotesi induttiva, dapprima per  $h = 1$  e poi per  $h = k - 1$ , alla funzione  $\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} \phi(r)$ , si trova che

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \phi(r) \right]_{r=ct} &= \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \phi(r) \right] \right]_{r=ct} \\ &= \frac{1}{c^2 t} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \phi(r) \right]_{r=ct} = \frac{1}{c^{2k}} \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^k [\phi(ct)], \end{aligned}$$

il che prova la tesi.  $\square$

Veniamo ora al teorema di esistenza per il problema di Cauchy. Come è già accaduto nel caso di due e tre dimensioni spaziali, è necessario separare il caso di  $n$  dispari dal caso di  $n$  pari, perchè la struttura stessa della soluzione è differente nei due casi. Cominciamo con il caso di  $n$  dispari: l'altro ne è conseguenza quasi immediata tramite il "metodo di discesa".

**Teorema 4.5.2** *Sia  $n = 2k + 1$ , e sia  $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  soluzione del problema di Cauchy (4.24). Allora  $u$  è data dalla formula*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(n-2)!!} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x, ct)} \varphi(y) d\sigma_y \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x, ct)} \psi(y) d\sigma_y \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Se, in più,  $\varphi \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , allora il problema (4.24) è ben posto e la sua unica soluzione è la funzione (4.40), la quale appartiene a  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ .

**Dimostrazione** Poniamo, per un fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} V(x, r, t) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} U(x, r, t)], \\ G(x, r) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} \Phi(x, r)], \\ H(x, r) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} \Psi(x, r)], \end{aligned} \quad (4.41)$$

ove le funzioni  $U(x, r, t)$ ,  $\Phi(x, r)$  e  $\Psi(x, r)$  sono definite dalle (4.26) e (4.27). Si noti che risulta

$$V(x, r, 0) = G(x, r), \quad V_t(x, r, 0) = H(x, r) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0. \quad (4.42)$$

Come nel caso di tre variabili spaziali, proviamo che  $V(x, \cdot, \cdot)$  risolve il problema unidimensionale per la corda semi-finita:

$$\begin{cases} V_{tt}(x, \cdot, \cdot) - c^2 V_{rr}(x, \cdot, \cdot) = 0 & \text{in } [0, \infty[{}^2, \\ V(x, r, 0) = G(x, r), & r \geq 0, \\ V_t(x, r, 0) = H(x, r), & r \geq 0, \\ V(x, 0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

In effetti, le condizioni iniziali sono verificate grazie a (4.42), e la condizione  $V(x, 0, t) = 0$  segue passando al limite per  $r \rightarrow 0$  nella prima delle (4.41), ricordando il lemma 4.5.1(ii). Quanto all'equazione differenziale, si ha dal lemma 4.5.1(i)

$$\begin{aligned} V_{rr} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} U] = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^k [r^{2k} U_r] = \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} U_{rr} + 2k r^{2k-2} U_r] = \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left[ r^{2k-1} \left( U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right) \right]; \end{aligned}$$

utilizzando il lemma 4.4.1, si conclude che

$$V_{rr} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} U_{tt}] = \frac{1}{c^2} V_{tt}.$$

Come nel caso  $n = 3$ , si può verificare senza troppa fatica che le condizioni di compatibilità per avere la soluzione di classe  $C^2$ , vale a dire

$$\lim_{r \rightarrow 0} G(x, r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} H(x, r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} G_{rr}(x, r) = 0,$$

sono soddisfatte.

Possiamo allora dire che, in virtù del teorema 4.2.4, si ha per  $r < ct$

$$V(x, r, t) = \frac{1}{2} [G(x, ct + r) - G(x, ct - r)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} H(x, y) dy.$$

Ora dobbiamo ricavare  $u(x, t)$  da  $V(x, r, t)$ . Il lemma 4.5.1(ii) dice che

$$V(x, r, t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{1+j} \frac{\partial^j}{\partial r^j} U(x, r, t),$$

e quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(x, r, t)}{\beta_0^k r} = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t) = u(x, t).$$

Perciò

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{G(x, ct + r) - G(x, ct - r)}{2r} + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} H(x, y) dy \right] = \\ &= \frac{1}{(2k-1)!!} \left[ \frac{\partial}{\partial t} G(x, ct) + \frac{1}{c} H(x, ct) \right] = \\ &= \frac{1}{(n-2)!!} \left[ \frac{1}{c} G_r(x, ct) + \frac{1}{c} H(x, ct) \right]. \end{aligned}$$

Dalle ultime due delle (4.41) e dal lemma 4.5.1(iii) ricaviamo infine

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(n-2)!!} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^{2k-2}} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} [(ct)^{2k-1} \Phi(x, ct)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^{2k-1}} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} [(ct)^{2k-1} \Psi(x, ct)] \right] = \\ &= \frac{1}{(n-2)!!} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x, ct)} \varphi(y) d\sigma_y \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x, ct)} \psi(y) d\sigma_y \right) \right]. \end{aligned}$$

Questa è la formula (4.40). Si noti che per  $n = 3$  essa si riduce alla (4.30). Resta da provare che la funzione (4.40) è davvero una soluzione del problema (4.24). La verifica delle condizioni iniziali si fa senza fatica, applicando il lemma 4.5.1(ii). Per l'equazione differenziale, come già fatto nel caso  $n = 3$ , proveremo più in generale che se  $\alpha \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  allora la funzione

$$v(x, t) = \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x, ct)} \alpha(y) d\sigma_y \right)$$

è soluzione dell'equazione delle onde, e che, di conseguenza, se  $\alpha \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$  allora anche  $v_t$  risolve tale equazione.

In effetti si ha dal lemma 4.5.1(i)

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x, ct)} \alpha(y) d\sigma_y \right) \right] = \\ &= \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x, ct)} \alpha(y) d\sigma_y \right) \right]. \end{aligned}$$

D'altronde

$$\begin{aligned} t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x, ct)} \alpha(y) d\sigma_y &= t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0, 1)} \alpha(x + ctz) d\sigma_z = \\ &= \frac{ct^{n-1}}{\omega_n} \int_{\partial B(0, 1)} \langle \nabla \alpha(x + ctz), z \rangle d\sigma_z = \\ &= \frac{1}{c^{n-2} \omega_n} \int_{\partial B(x, ct)} \left\langle \nabla \alpha(y), \frac{y-x}{ct} \right\rangle d\sigma_y = \\ &= \frac{1}{c^{n-2} \omega_n} \int_{\partial B(x, ct)} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu}(y) d\sigma_y = \frac{1}{c^{n-2} \omega_n} \int_{B(x, ct)} \Delta \alpha(y) dy = \\ &= \frac{c^2 t^n}{n} \int_{B(x, ct)} \Delta \alpha(y) dy. \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{c^2 t^n}{n} \int_{B(x,ct)} \Delta \alpha(y) dy \right) = \\
&= \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{1}{c^{n-2} \omega_n} \int_{B(x,ct)} \Delta \alpha(y) dy \right) = \\
&= \frac{1}{c^{n-2} \omega_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,ct)} \Delta \alpha(y) dy \right) = \\
&= \frac{1}{c^{n-2} \omega_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{c}{t} \int_{\partial B(x,ct)} \Delta \alpha(y) dy \right) = \\
&= c^2 \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,ct)} \Delta \alpha(y) d\sigma_y \right) = \\
&= c^2 \Delta \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,ct)} \alpha(y) d\sigma_y \right) \right] = c^2 \Delta v.
\end{aligned}$$

Si noti che, avendo supposto  $\alpha \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , risulta  $v_{tt}, \Delta v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Inoltre dalla (4.40) si ottiene facilmente che per ogni  $T > 0$  vi è dipendenza continua dai dati nel senso seguente:

$$|u(x, t)| \leq C_T \left( \sum_{h=0}^{\frac{n-1}{2}} \|\nabla^h \varphi\|_{\infty} + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} \|\nabla^h \psi\|_{\infty} \right) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema 4.5.2.  $\square$

Passiamo ora al teorema di esistenza per il problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$  nel caso di  $n$  pari.

**Teorema 4.5.3** *Sia  $n = 2k$  e sia  $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  soluzione del problema di Cauchy (4.24). Allora  $u$  è data dalla formula*

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{c}{n!!} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(x,ct)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(x,ct)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) \right]. \tag{4.44}
\end{aligned}$$



Se, in più,  $\varphi \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , allora il problema (4.24) è ben posto e la sua unica soluzione è la funzione (4.40), la quale appartiene a  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ .

**Dimostrazione** Come nel caso bi-dimensionale, si fa uso del metodo di discesa. Per  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ , si scrive  $x = (x', z)$  con  $x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , e si introducono le funzioni

$$\bar{u}(x, t) = u(x', t), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x'), \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x').$$

La funzione  $\bar{u}$  risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - c^2 \Delta \bar{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty[, \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{\varphi}(x), & x \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \bar{u}_t(x, 0) = \bar{\psi}(x), & x \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases} \quad (4.45)$$

e quindi è data dalla formula (4.40) con  $n + 1$  al posto di  $n$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \frac{1}{(n-1)!!} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial B(x, ct)} \bar{\varphi}(y) d\sigma_y \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial B(x, ct)} \bar{\psi}(y) d\sigma_y \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

D'altra parte, posto  $\gamma(y') = \sqrt{c^2 t^2 - |y' - x'|^2}$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, ct)} \bar{\varphi}(y) d\sigma_y &= \frac{2}{\omega_{n+1} c^n t^n} \int_{B(x', ct)} \varphi(y') \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y')|^2} dy' = \\ &= \frac{2}{\omega_{n+1} c^{n-1} t^{n-1}} \int_{B(x', ct)} \frac{\varphi(y')}{\sqrt{c^2 t^2 - |y' - x'|^2}} dy' = \\ &= \frac{2ct \omega_n}{n \omega_{n+1}} \int_{B(x', ct)} \frac{\varphi(y')}{\sqrt{c^2 t^2 - |y' - x'|^2}} dy', \end{aligned}$$

e analogamente

$$\int_{\partial B(x, ct)} \bar{\psi}(y) d\sigma_y = \frac{2ct \omega_n}{n \omega_{n+1}} \int_{B(x', ct)} \frac{\psi(y')}{\sqrt{c^2 t^2 - |y' - x'|^2}} dy'.$$

Se ne deduce

$$\begin{aligned}
u(x', t) &= \bar{u}(x, t) = \frac{2c\omega_n}{(n-1)!! n\omega_{n+1}} \times \\
&\times \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{2ct\omega_n}{n\omega_{n+1}} \int_{B(x', ct)} \frac{\varphi(y')}{\sqrt{c^2t^2 - |y' - x'|^2}} dy' \right) + \right. \\
&\left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{2ct\omega_n}{n\omega_{n+1}} \int_{B(x', ct)} \frac{\psi(y')}{\sqrt{c^2t^2 - |y' - x'|^2}} dy' \right) \right].
\end{aligned}$$

A parte le notazioni e la costante moltiplicativa che compare all'inizio, questa formula coincide con la (4.44). Per precisare la costante, osserviamo che il numero  $\omega_n$ , cioè la misura  $(n-1)$ -dimensionale della sfera  $\partial B(0, 1)$ , coincide con  $n\alpha_n$ , essendo  $\alpha_n$  la misura della palla  $n$ -dimensionale  $B(0, 1)$ ; inoltre si prova facilmente per induzione che

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$

Si deduce allora, ricordando che  $n$  è pari e utilizzando le note proprietà della funzione  $\Gamma$  ( e cioè  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ ,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ):

$$\frac{2c\omega_n}{(n-1)!! n\omega_{n+1}} = \frac{2c\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\sqrt{\pi}(n+1)!! \Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{2c(n+1)!! 2^{-\frac{n+2}{2}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}(n+1)!! n!! 2^{-\frac{n}{2}}} = \frac{c}{n!!}.$$

Questo valore è esattamente quello che compare nella (4.44). Si noti che per  $n=2$  la formula (4.44) si riduce alla (4.35).

Quando  $\varphi \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , la funzione (4.44) è soluzione del problema perché coincide con  $\bar{u}$ , la quale è soluzione effettiva del problema (4.45) in virtù del teorema 4.5.2. Da questo teorema si deduce anche la dipendenza continua dai dati nel senso seguente:

$$|u(x, t)| \leq C_T \left( \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}} \|\nabla^h \varphi\|_{\infty} + \sum_{h=0}^{\frac{n-2}{2}} \|\nabla^h \psi\|_{\infty} \right) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema 4.5.3.  $\square$

## 4.6 Il problema non omogeneo

Consideriamo ora il problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.47)$$

ove  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$  che rappresenta una sorgente, o del rumore. Naturalmente, se sappiamo risolvere questo problema, poi per sovrapposizione sapremo risolvere il problema con secondo membro  $f$  e dati iniziali  $\varphi$  e  $\psi$  non nulli.

Costruiremo la soluzione di (4.47), che sappiamo già essere unica, seguendo un metodo generale che va sotto il nome di *principio di Duhamel*. Si considera il problema di Cauchy omogeneo ad istante iniziale  $s \geq 0$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [s, \infty[, \\ u(x, s) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, s) = f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.48)$$

del quale esiste la soluzione  $v(x, t; s)$  in virtù dei teoremi 4.5.2 e 4.5.3, a patto di sostituire  $t$  con  $t - s$  nelle formule esplicite (4.40) e (4.44). Poi si definisce la funzione

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[; \quad (4.49)$$

il principio di Duhamel stabilisce appunto che questa funzione risolve il problema (4.47).

**Teorema 4.6.1** *Sia  $n \in \mathbb{N}^+$  e sia  $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ . Allora il problema (4.47) è ben posto e la sua unica soluzione è la funzione (4.49), la quale appartiene a  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ .*

**Dimostrazione** Si ha

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \frac{n+2}{2} & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases}$$

cosicché dai teoremi 4.5.2 e 4.5.3 deduciamo che  $v(\cdot, \cdot; s) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty[)$ . Di più, dalle formule (4.40) e (4.44), scritte con  $t - s$  al posto di  $t$ , si vede facilmente che  $v$  è di classe  $C^2$  sull'insieme  $\mathbb{R}^n \times \{(t, s) : 0 \leq s \leq t\}$ . Quindi, in particolare, la definizione di  $u(x, t)$  ha senso. Per verificare che  $u$  soddisfa l'equazione delle onde, bisogna anzitutto calcolarne la derivata  $u_t$ : la cosa è meno banale di quello che sembra, perché la funzione integranda è definita solo per  $s \leq t$ . Fissato  $(x, t)$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ , si ha per  $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h} &= \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(x, t+h; s) ds + \int_0^t \frac{v(x, t+h; s) - v(x, t; s)}{h} ds, \end{aligned}$$

e dunque otteniamo facilmente, in virtù della continuità di  $v$  e della condizione iniziale  $v(x, t; t) = 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h} = \int_0^t v_t(x, t; s) ds. \quad (4.50)$$

Per fare il limite da sinistra non si può usare la decomposizione precedente, perché  $v(x, t+h; s)$  non è definita quando  $h < 0$  e  $s \in [t+h, t]$ . Allora scriviamo

$$\frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h} = \int_0^{t+h} \frac{v(x, t+h; s) - v(x, t; s)}{h} ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(x, t; s) ds;$$

per  $h \rightarrow 0^-$  il secondo addendo a secondo membro tende evidentemente a  $v(x, t; t)$ , ossia a 0, mentre il primo termine del secondo membro si può ulteriormente decomporre come segue:

$$\begin{aligned} \int_0^{t+h} \frac{v(x, t+h; s) - v(x, t; s)}{h} ds &= \int_0^{t+h} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v_t(x, \sigma; s) d\sigma ds = \\ &= \int_0^{t+h} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [v_t(x, \sigma; s) - v_t(x, t; s)] d\sigma ds + \int_0^{t+h} v_t(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

Utilizzando la continuità di  $v_t$ , chiaramente il secondo membro tende a  $\int_0^t v_t(x, t; s) ds$ ; si conclude perciò che

$$\exists u_t(x, t) = \int_0^t v_t(x, t; s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \quad (4.51)$$

dato che per  $t = 0$  si ottiene il risultato in modo ancora più semplice. Con gli stessi ragionamenti, facendo uso della continuità di  $v_t$  e  $v_{tt}$ , si prova che per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[$

$$\exists u_{tt}(x, t) = v_t(x, t; t) + \int_0^t v_{tt}(x, t; s) ds = f(x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t; s) ds.$$

Per le derivate rispetto alle variabili spaziali non vi è alcun problema a derivare sotto il segno di integrale, e quindi possiamo dire che la funzione (4.49) appartiene a  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ . Inoltre da (4.51) ricaviamo

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= f(x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t; s) ds = \\ &= f(x, t) + c^2 \int_0^t \Delta v(x, t; s) ds = f(x, t) + c^2 \Delta u(x, t). \end{aligned}$$

Infine è chiaro che  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . La tesi è provata.  $\square$

**Esempio 4.6.2** Scriviamo esplicitamente la soluzione (4.49) nel caso  $n = 3$ . Si ha dalla formula (4.30) con  $t - s$  al posto di  $t$  e tenendo conto che  $\varphi = 0$  e  $\psi = f(\cdot, s)$ ,

$$v(x, t; s) = \frac{t-s}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} f(x + c(t-s)z, s) d\sigma_z.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \frac{t-s}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} f(x + c(t-s)z, s) d\sigma_z ds = \\ &= \int_0^t \frac{\rho}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} f(x + c\rho z, t - \rho) d\sigma_z d\rho = \\ &= \int_0^t \frac{\rho}{4\pi} \int_{\partial B(x, c\rho)} \frac{1}{c^2 \rho^2} f(y, t - \rho) d\sigma_y d\rho = \\ &= \int_0^{ct} \int_{\partial B(x, \tau)} \frac{1}{4\pi c^2 \tau} f\left(y, t - \frac{\tau}{c}\right) d\sigma_y d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B(x, ct)} \frac{f(y, t - |x-y|/c)}{|x-y|} dy. \end{aligned}$$

Questa soluzione si chiama *potenziale ritardato*. Possiamo chiarire il motivo di tale denominazione come segue. Il valore di  $u$  in un punto  $(x_0, t_0)$  dipende

solo dai valori di  $f$  nei punti del cono  $\{(x, t) : |x - x_0| = c(t_0 - t)\}$ : ciò segue dall'espressione sopra scritta, valutata in  $x = x_0$  e  $t = t_0$ , in cui  $f$  è calcolata in  $y = x_0 + c(t_0 - s)z$ ,  $t = s$ , e si ha appunto  $|y - x_0| = c(t_0 - s)$ . Quindi l'effetto di una perturbazione di  $f$  avvenuta nel punto  $\bar{x}$  all'istante  $\bar{t}$  viene avvertita in  $x_0$  solo nell'istante  $t_0 = \bar{t} + \frac{|\bar{x} - x_0|}{c}$ ; cioè l'effetto della perturbazione è *ritardato* del tempo occorrente a percorrere la distanza  $|\bar{x} - x_0|$  con velocità  $c$ .

**Esempio 4.6.3** Consideriamo una sorgente concentrata in una piccola palla di centro l'origine di  $\mathbb{R}^3$ : ciò significa prendere in (4.47) un secondo membro della forma

$$f_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^3} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right),$$

ove  $f$  è una funzione continua nulla fuori dal cilindro  $\{(x, t) : |x| < 1\}$  e tale che  $\int_{B(0,1)} f(x, t) dx = \omega(t)$ , con  $\omega \in C^2([0, \infty[)$  fissata. Quindi, quanto più  $\varepsilon$  è piccolo, tanto più la sorgente  $f_\varepsilon$  è concentrata e intensa, dal momento che

$$\int_{B(0,\varepsilon)} f_\varepsilon(x, t) dx = \int_{B(0,1)} f(x, t) dx = \omega(t) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

La corrispondente soluzione di (4.47) è

$$u_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B(x, ct)} \frac{f_\varepsilon(y, t - |x - y|/c)}{|x - y|} dy.$$

Vediamo cosa succede quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ : quando  $|x| > ct$  si ha definitivamente  $B(0, \varepsilon) \cap B(x, ct) = \emptyset$ , cosicché  $u_\varepsilon(x, t) \rightarrow 0$ , mentre quando  $|x| < ct$  risulta definitivamente  $B(0, \varepsilon) \subset B(x, ct)$ , e pertanto, per convergenza dominata,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{f_\varepsilon(y, t - |x - y|/c)}{|x - y|} dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B(0,1)} \frac{f(z, t - |x - \varepsilon z|/c)}{|x - \varepsilon z|} dz = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\omega(t - |x|/c)}{|x|}. \end{aligned}$$

La funzione

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\omega(t - |x|/c)}{|x|} & \text{se } |x| < ct, \\ 0 & \text{se } |x| > ct, \end{cases} \quad (4.52)$$

è singolare per  $x = 0$  e discontinua quando  $|x| = ct$ ; tuttavia essa risolve l'equazione delle onde in  $(\mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[) \setminus \{(x, t) : |x| = ct\}$ . Ciò è evidente quando  $|x| > ct$ ; se invece  $|x| < ct$  si tratta di una verifica un po' laboriosa ma non difficile. La funzione (4.52) rappresenta un'onda sferica, generata da una sorgente puntuale posta nell'origine, che si propaga nello spazio (*problema di radiazione*). Se in particolare  $\omega(t) = 0$  fuori da un intorno di  $t = 0$ , si può verificare che ad un dato istante  $t$  la funzione  $u$  è diversa da 0 soltanto in un intorno della superficie sferica  $\partial B(0, ct)$ : questa è un'altra formulazione del principio di Huygens.

Si può comprendere allora per quale ragione il principio di Huygens non funziona nel caso di due variabili spaziali: la soluzione si ottiene col metodo di discesa, e dunque il problema di radiazione in  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$  corrisponde ad un problema in  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[$  in cui è presente una *linea di sorgenti* sull'asse  $z$ . Quindi un osservatore, posto a distanza  $\rho$  dall'origine nel piano  $xy$ , riceverà all'istante  $\rho/c$  il segnale irradiato al tempo  $t = 0$  dalla sorgente situata nell'origine; però, negli istanti  $\tau$  successivi, perverranno all'osservatore i segnali irradiati, sempre al tempo  $t = 0$ , da punti situati lungo l'asse  $z$  alle quote  $\xi = \sqrt{c^2\tau^2 - \rho^2}$ . Questo spiega perché il segnale sia percepito in tutti gli istanti  $\tau \geq \rho/c$ .

Concludiamo il nostro studio dell'equazione delle onde osservando che naturalmente esso è tutt'altro che esaurito. La teoria delle equazioni iperboliche presenta al contrario enormi sviluppi in svariatissime direzioni: equazioni non lineari, sistemi iperboliche, leggi di conservazione, equazioni di Hamilton-Jacobi, soluzioni viscosità, eccetera. Per una introduzione a questi importanti settori di ricerca si può consultare [2]. Noi ci limiteremo, nel paragrafo che segue, all'analisi di un metodo classico, dovuto a Riemann, per lo studio di equazioni iperboliche lineari in  $\mathbb{R}^2$  a coefficienti variabili.

## 4.7 Il metodo di Riemann

Consideriamo un'equazione iperbolica lineare in due variabili:

$$\begin{aligned} a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \\ + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + g(x, y)u = h(x, y), \quad (x, y) \in D, \end{aligned} \quad (4.53)$$

dove  $a, b, c, d, e, g, h$  sono funzioni regolari sull'aperto connesso  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . La condizione di iperbolicità è la seguente:

$$b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in D. \quad (4.54)$$

Essa assicura l'esistenza di due distinte famiglie di caratteristiche in ogni punto di  $D$ : infatti, detta  $\nu(x, y) = (\nu_x(x, y), \nu_y(x, y))$  la normale ad una curva regolare  $C \subset D$ , la condizione che  $C$  sia una linea caratteristica si esprime richiedendo che in ogni punto  $(x, y)$  si abbia

$$a\nu_x^2 + 2b\nu_x\nu_y + c\nu_y^2 = 0,$$

ovvero, supposto ad esempio  $\nu_y \neq 0$ ,

$$a \left( \frac{\nu_x}{\nu_y} \right)^2 + 2b \frac{\nu_x}{\nu_y} + c = 0.$$

La condizione (4.54) equivale a dire che questa equazione ha per ogni  $(x, y)$  due soluzioni reali distinte, il che fornisce due diverse direzioni per la normale alla curva in  $(x, y)$ . Quindi per ogni punto di  $D$  passano due curve caratteristiche.

Se una curva  $C$  è descritta dall'equazione  $F(x, y) = 0$ , allora  $\nu = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ ; quindi  $C$  è caratteristica se e solo se

$$aF_x^2 + 2bF_xF_y + cF_y^2 = 0 \quad \forall (x, y) \in C. \quad (4.55)$$

Se in particolare  $C$  è cartesiana, allora  $F(x, y) = y - k(x)$ , con  $k$  di classe  $C^1$ , e la condizione (4.55) diventa

$$a(k')^2 - 2bk' + c = 0, \quad (4.56)$$

ossia

$$k'(x) = \frac{b(x, k(x)) \pm \sqrt{b(x, k(x))^2 - a(x, k(x))c(x, k(x))}}{a(x, k(x))}.$$

Queste due equazioni differenziali avranno due famiglie di soluzioni,

$$y = \phi_1(x, \xi), \quad y = \phi_2(x, \eta), \quad (4.57)$$

ove  $\xi$  e  $\eta$  sono i valori attribuiti alle singole curve delle famiglie in corrispondenza di un fissato  $x_0$ . Se non ci si allontana troppo dai punti  $(x_0, \xi)$  e



$(x_0, \eta)$ , le derivate  $(\phi_1)_\xi$  e  $(\phi_2)_\eta$  saranno non nulle, e quindi in (4.57) potremo ricavare  $\xi$  e  $\eta$  in funzione di  $(x, y)$ :

$$\xi = \psi_1(x, y), \quad \eta = \psi_2(x, y). \quad (4.58)$$

In particolare

$$(\psi_1)_x = -\frac{(\phi_1)_x}{(\phi_1)_\xi}, \quad (\psi_1)_y = \frac{1}{(\phi_1)_\xi}, \quad (\psi_2)_x = -\frac{(\phi_2)_x}{(\phi_2)_\eta}, \quad (\psi_2)_y = \frac{1}{(\phi_2)_\eta},$$

cosicché

$$\nabla\psi_1(x, y) \neq \mathbf{0}, \quad \nabla\psi_2(x, y) \neq \mathbf{0}. \quad (4.59)$$

Poiché  $\phi_1(\cdot, \xi)$  e  $\phi_2(\cdot, \eta)$  soddisfano la (4.56), si riconosce subito che  $\psi_1$  e  $\psi_2$  verificano la (4.55).

Il problema di Cauchy per l'equazione (4.53) consiste nel fissare i valori di  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  lungo una curva non caratteristica. Lo studio risulta più semplice se dapprima riduciamo l'equazione in forma normale: a questo scopo conviene utilizzare proprio il cambiamento di variabili (4.58). In effetti, con facili ma noiosi calcoli, la sostituzione  $u(x, y) = v(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))$  porta all'equazione

$$\begin{aligned} & 2v_{\xi\eta}[a(\psi_1)_x(\psi_2)_x + b((\psi_1)_x(\psi_2)_y + (\psi_1)_y(\psi_2)_x) + c(\psi_1)_y(\psi_2)_y] + \\ & + v_\xi[a(\psi_1)_{xx} + 2b(\psi_1)_{xy} + c(\psi_1)_{yy} + d(\psi_1)_x + e(\psi_1)_y] + \\ & + v_\eta[a(\psi_2)_{xx} + 2b(\psi_2)_{xy} + c(\psi_2)_{yy} + d(\psi_2)_x + e(\psi_2)_y] + gv = h, \end{aligned} \quad (4.60)$$

ove i coefficienti  $a, b, c, d, e, g, h$  sono calcolati in  $(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))$ . Non è difficile però verificare che il coefficiente che moltiplica  $v_{\xi\eta}$  è sempre diverso da 0. Infatti, detta  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , dobbiamo far vedere che

$$\langle A \cdot \nabla\psi_1, \nabla\psi_2 \rangle \neq 0 \quad \text{in } D : \quad (4.61)$$

d'altronde, poiché  $\nabla\psi_1$  verifica la (4.55), si ha

$$\langle A \cdot \nabla\psi_1, \nabla\psi_1 \rangle = 0 \quad \text{in } D, \quad (4.62)$$

e dunque basta far vedere che per ogni  $(x, y) \in D$  i vettori  $\nabla\psi_1$  e  $\nabla\psi_2$  sono linearmente indipendenti. Infatti, ammesso questo fatto, da (4.61) e (4.62) seguirebbe che il vettore  $A \cdot \nabla\psi_1$  è nullo; ma allora, essendo  $\det A \neq 0$  in virtù

di (4.54), dedurremmo  $\nabla\psi_1 = \mathbf{0}$ , in contraddizione con (4.59). Ma provare la lineare indipendenza di  $\nabla\psi_1$  e  $\nabla\psi_2$  è immediato: se fosse  $\nabla\psi_1 = \lambda\nabla\psi_2$ , infatti, dedurremmo subito

$$\lambda = \frac{(\phi_2)_\eta}{(\phi_1)_\xi}, \quad (\phi_1)_x = (\phi_2)_x,$$

mentre invece, per definizione,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  soddisfano

$$(\phi_1)_x = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (\phi_2)_x = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

In conclusione, in (4.60) possiamo dividere per il coefficiente di  $v_{\xi\eta}$ , ottenendo un'equazione della forma

$$v_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)v_\xi + \beta(\xi, \eta)v_\eta + \gamma(\xi, \eta)v = f(\xi, \eta),$$

le cui caratteristiche sono le rette  $\xi = m$  e  $\eta = n$ , con  $m, n$  costanti. Per comodità, riscriviamo questa equazione nelle incognite  $x, y$ ; il nostro problema di Cauchy sarà dunque il seguente:

$$\begin{cases} v_{xy} + \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v = f & \text{in } D, \\ v, \frac{\partial v}{\partial \nu} & \text{assegnate su } C, \end{cases} \quad (4.63)$$

ove  $\alpha, \beta, \gamma, f$  sono funzioni regolari definite su  $D$ , e  $C \subset D$  è il grafico di una funzione strettamente monotona.

Prima di affrontare questo problema col metodo di Riemann è necessaria una parentesi sugli operatori "aggiunti formali".

**Definizione 4.7.1** *Sia  $L$  un operatore differenziale definito su un aperto limitato  $D \subset \mathbb{R}^n$ , della forma*

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_iD_ju + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_iu + c(x)u,$$

con  $a_{ij} \in C^2(\overline{D})$ ,  $b_i \in C^1(\overline{D})$  e  $c \in C(\overline{D})$ .  $L$ 'aggiunto formale di  $L$  è l'operatore  $L^*$  così definito:

$$L^*[v] = \sum_{i,j=1}^n D_iD_j[a_{ij}(x)v] - \sum_{i=1}^n D_i[b_i(x)v] + c(x)v.$$

**Osservazione 4.7.2** Fra un operatore differenziale definito su  $D$  e il suo aggiunto formale intercorre la seguente relazione integrale:

$$\int_D (L[u]v - uL^*[v]) dx = \int_{\partial D} \left[ \langle b, \nu \rangle uv + \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v - u \frac{\partial v}{\partial \nu_{A^*}} \right] d\sigma, \quad (4.64)$$

ove si è posto

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u(x) \nu_i(x), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu_{A^*}}(x) = \sum_{i,j=1}^n D_i [a_{ij}(x) v(x)] \nu_j(x).$$

Questa relazione si dimostra facilmente attraverso la formula di Green.

Nel caso specifico dell'operatore differenziale

$$L[u] = u_{xy} + \alpha(x, y)u_x + \beta(x, y)u_y + \gamma(x, y)u, \quad (4.65)$$

risulta ovviamente

$$L^*[v] = v_{xy} - (\alpha v)_x - (\beta v)_y + \gamma v,$$

e si ha in particolare

$$\begin{aligned} L[u]v - uL^*[v] &= u_{xy}v - v_{xy}u + \alpha u_x v + (\alpha v)_x u + \beta u_y v + (\beta v)_y u = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha uv - v_y u) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta uv + u_x v); \end{aligned}$$

ovvero, sommando e sottraendo la quantità  $\frac{1}{2}(uv)_{xy}$ ,

$$L[u]v - uL^*[v] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}[u_y v - v_y u] + \alpha uv \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}[u_x v - v_x u] + \beta uv \right).$$

Ne segue che per l'operatore (4.65) la relazione (4.64) assume la forma

$$\begin{aligned} \int_D (L[u]v - uL^*[v]) dx &= \int_{\partial D} \left[ \left( \frac{1}{2}[u_y v - v_y u] + \alpha uv \right) \nu_x + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2}[u_x v - v_x u] + \beta uv \right) \nu_y \right] ds. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Questa formula sarà il nostro punto di partenza per calcolare la soluzione  $u$  del problema (4.63) in un generico punto  $P = (\xi, \eta) \in D$ .

Anzitutto osserviamo che la curva  $C$  su cui sono assegnati i dati iniziali è il grafico di una funzione strettamente monotona, ad esempio strettamente crescente. Se  $P \in D$  e  $P$  è non troppo lontano da  $C$ , le due caratteristiche uscenti da  $P$ , cioè  $x = \xi$  e  $y = \eta$ , incontrano la curva  $C$  in due punti (e due soli)  $P_1 = (\xi, \eta')$  e  $P_2 = (\xi', \eta)$ . Ammetteremo, per esempio, che  $P$  si trovi “al di sopra” di  $C$ , cosicché risulta  $\xi < \xi'$  e  $\eta > \eta'$ ; quando  $P$  invece sta “al di sotto” di  $C$ , si trova  $\xi > \xi'$  e  $\eta < \eta'$ . Naturalmente se, al contrario,  $C$  fosse strettamente decrescente, otterremmo, a seconda di come è situato  $P$ , due altre coppie di disuguaglianze, stavolta concordi.

Consideriamo la regione  $\Omega_P$  delimitata dai segmenti  $\Gamma_1 = P_1P$ ,  $\Gamma_2 = P_2P$  e dall'arco  $\Gamma_P$  di  $C$  di estremi  $P_1$  e  $P_2$ . Applichiamo la relazione (4.66) alla regione  $\Omega_P$ , con una generica  $v \in C^1(D)$  e con la nostra ipotetica soluzione  $u$ : poiché su  $\Gamma_1$  la normale è  $\nu = (-1, 0)$ , mentre su  $\Gamma_2$  è  $\nu = (0, 1)$ , si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_P} (L[u]v - uL^*[v]) \, dx dy = \\ & = \int_{\Gamma_P} \left[ \left( \frac{1}{2}[u_y v - v_y u] + \alpha uv \right) \nu_x + \left( \frac{1}{2}[u_x v - v_x u] + \beta uv \right) \nu_y \right] ds - \\ & - \int_{\Gamma_1} \left( \frac{1}{2}[u_y v - v_y u] + \alpha uv \right) ds + \int_{\Gamma_2} \left( \frac{1}{2}[u_x v - v_x u] + \beta uv \right) ds. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Calcoliamo gli ultimi due integrali di linea. Per quanto riguarda quello su  $\Gamma_1$ , si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \left( \frac{1}{2}[u_y v - v_y u] + \alpha uv \right) ds = \\ & = \int_{\eta'}^{\eta} \left( \frac{1}{2}[u_y(\xi, y)v(\xi, y) - v_y(\xi, y)u(\xi, y)] + \alpha(\xi, y)u(\xi, y)v(\xi, y) \right) dy = \\ & = \frac{1}{2}[u(P)v(P) - u(P_1)v(P_1)] - \int_{\eta'}^{\eta} u(\xi, y)[v_y(\xi, y) - \alpha(\xi, y)v(\xi, y)] dy, \end{aligned}$$

mentre per l'integrale su  $\Gamma_2$  risulta

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_2} \left( \frac{1}{2}[u_x v - v_x u] + \beta u v \right) ds = \\
& = \int_{\xi}^{\xi'} \left( \frac{1}{2}[u_x(x, \eta)v(x, \eta) - v_x(x, \eta)u(x, \eta)] + \beta(x, \eta)u(x, \eta)v(x, \eta) \right) dx = \\
& = \frac{1}{2}[u(P_2)v(P_2) - u(P)v(P)] - \int_{\xi}^{\xi'} u(x, \eta)[v_x(x, \eta) - \beta(x, \eta)v(x, \eta)] dx.
\end{aligned}$$

Sostituendo in (4.67), e ricordando che  $L[u] = f$ , ricaviamo l'espressione

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_P} (fv - uL^*[v]) dx dy = \\
& = \int_{\Gamma_P} \left[ \left( \frac{1}{2}[u_y v - v_y u] + \alpha u v \right) \nu_x + \left( \frac{1}{2}[u_x v - v_x u] + \beta u v \right) \nu_y \right] ds - \\
& - u(P)v(P) + \frac{1}{2}[u(P_2)v(P_2) + u(P_1)v(P_1)] + \\
& + \int_{\eta'}^{\eta} u(\xi, y)[v_y(\xi, y) - \alpha(\xi, y)v(\xi, y)] dy - \\
& - \int_{\xi}^{\xi'} u(x, \eta)[v_x(x, \eta) - \beta(x, \eta)v(x, \eta)] dx.
\end{aligned}$$

A questo punto notiamo che l'integrale su  $\Gamma_P$  è noto, perché coinvolge i valori di  $u$  e delle sue derivate su  $C$ , nonché quelli di  $v$ . Possiamo ora scegliere la funzione  $v$ , in modo da semplificare il più possibile gli integrali. Ci piacerebbe che  $v$  verificasse

$$\begin{cases} L^*[v] = v_{xy} - (\alpha v)_x - (\beta v)_y + \gamma v = 0 & \text{in } \Omega_P \\ v_y = \alpha v & \text{su } \Gamma_1 \\ v_x = \beta v & \text{su } \Gamma_2 \\ v(P) = 1, \end{cases} \quad (4.68)$$

perché in tal caso l'espressione precedente si semplificherebbe nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_P} v f \, dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma_P} \left[ \left( \frac{1}{2} [u_y v - v_y u] + \alpha u v \right) \nu_x + \left( \frac{1}{2} [u_x v - v_x u] + \beta u v \right) \nu_y \right] ds - \\ &\quad - u(P) + \frac{1}{2} [u(P_2)v(P_2) + u(P_1)v(P_1)], \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{1}{2} [u(P_2)v(P_2) + u(P_1)v(P_1)] - \int_{\Omega_P} v f \, dx dy + \\ &\quad + \int_{\Gamma_P} \left[ \left( \frac{1}{2} [u_y v - v_y u] + \alpha u v \right) \nu_x + \left( \frac{1}{2} [u_x v - v_x u] + \beta u v \right) \nu_y \right] ds. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Se riusciamo a determinare  $v$  attraverso il problema (4.68), che è detto *problema di Goursat*, allora la formula (4.69) è una rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy (4.63) in termini dei suoi dati sulla curva  $C$ , e costituisce pertanto il punto di partenza per provare l'esistenza della soluzione stessa. Se la funzione  $v$  esiste, essa si chiama *funzione di Riemann* relativa ai dati attribuiti ad  $u$  lungo  $C$ . Si noti che tale funzione dipende dal punto  $P$  fissato in partenza, che è il vertice della regione  $\Omega_P$ : quindi la funzione di Riemann in effetti dipende dalle coordinate  $(x, y) \in \Omega_P$  e anche dalle coordinate  $(\xi, \eta)$  di  $P$ ; essa deve essere dunque denominata  $v_P$  anziché  $v$ .

Occupiamoci allora dell'esistenza – per nulla scontata – della funzione di Riemann  $v_P$ , cioè della soluzione del problema (4.68).

**Teorema 4.7.3** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto connesso e sia  $(\xi, \eta)$  un punto di  $D$ . Se  $\alpha, \beta \in C^1(D)$  e  $\gamma \in C(D)$ , allora per ogni rettangolo  $R_1 = [\xi, \xi_1] \times [\eta_1, \eta] \subset D$  il problema di Goursat*

$$\begin{cases} v_{xy} - (\alpha v)_x - (\beta v)_y + \gamma v = 0 & \text{in } R_1 \\ v_y(\xi, y) = \alpha(\xi, y)v(\xi, y), & y \in [\eta_1, \eta] \\ v_x(x, \eta) = \beta(x, \eta)v(x, \eta), & x \in [\xi, \xi_1] \\ v(\xi, \eta) = 1 \end{cases} \quad (4.70)$$

ha un'unica soluzione  $v_P \in C^1(R_1)$  con  $(v_P)_{xy} \in C(R_1)$ .

**Dimostrazione** Trasformeremo il problema (4.70) in un'opportuna equazione integrale. Sia  $R \subset D$  il rettangolo di vertici  $P = (\xi, \eta)$ ,  $Q = (\xi, \eta')$ ,  $S = (\xi', \eta')$ ,  $T = (\xi', \eta)$ , con  $S = (\xi', \eta') \in R_1$ . Sia  $v$  una soluzione in  $R_1$  del problema di Goursat: allora applicando la relazione (4.66) con il rettangolo  $R$  in luogo di  $D$  e con  $u \equiv 1$ , tenendo conto che  $L[u] = \gamma$ ,  $L^*[v] = 0$  e  $u_y = u_x = 0$ , si ha:

$$\int_R \gamma v \, dx dy = \int_{\partial R} \left[ \left( -\frac{1}{2} v_y + \alpha v \right) \nu_x + \left( -\frac{1}{2} v_x + \beta v \right) \nu_y \right] ds.$$

Il bordo  $\partial R$  è costituito dai quattro segmenti  $PQ$ ,  $QS$ ,  $ST$ ,  $TP$ . Su  $PQ$  si ha  $\nu_x = -1$ ,  $\nu_y = 0$  e  $v_y = \alpha v$ , per cui l'integrando è  $-\frac{v_y}{2}$ ; su  $QS$  è  $\nu_x = 0$  e  $\nu_y = -1$ , e l'integrando vale  $\frac{v_x}{2} - \beta v$ ; su  $ST$  risulta  $\nu_x = 1$  e  $\nu_y = 0$ , con integrando pari a  $-\frac{v_y}{2} + \alpha v$ ; infine su  $TP$  troviamo  $\nu_x = 0$ ,  $\nu_y = 1$  e  $v_x = \beta v$ , da cui l'integrando è uguale a  $\frac{v_x}{2}$ . In conclusione, ricordando che  $v(P) = 1$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \int_R \gamma v \, dx dy &= \\ &- \int_{\eta'}^{\eta} \frac{v_y(\xi, y)}{2} dy + \int_{\xi}^{\xi'} \left( \frac{v_x(x, \eta')}{2} - \beta(x, \eta') v(x, \eta') \right) dx + \\ &+ \int_{\eta'}^{\eta} \left( -\frac{v_y(\xi', y)}{2} + \alpha(\xi', y) v(\xi', y) \right) dy + \int_{\xi}^{\xi'} \frac{v_x(x, \eta)}{2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} [v(P) - v(Q)] + \frac{1}{2} [v(S) - v(Q)] - \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') v(x, \eta') dx - \\ &- \frac{1}{2} [v(T) - v(S)] + \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) v(\xi', y) dy + \frac{1}{2} [v(T) - v(P)] = \\ &= -1 + v(S) - \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') v(x, \eta') dx + \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) v(\xi', y) dy, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} v(\xi', \eta') &= 1 + \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta'}^{\eta} \gamma(x, y) v(x, y) dy dx + \\ &+ \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') v(x, \eta') dx - \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) v(\xi', y) dy. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Questa relazione vale per ogni  $S = (\xi', \eta') \in R_1$  ed è soddisfatta da ogni soluzione  $v$  del problema (4.70). Viceversa, è facile verificare che ogni funzione  $v \in C(R_1)$ , verificante la (4.71), ha derivate prime continue e derivata

seconda mista continua, e soddisfa l'equazione differenziale in (4.70); inoltre facendo tendere  $S$  a  $P$ , ossia  $\xi' \rightarrow \xi$  e  $\eta' \rightarrow \eta$ , si verificano anche le condizioni ai limiti. È dunque sufficiente determinare un'unica soluzione  $v_P \in C(R_1)$  dell'equazione integrale non lineare (4.71).

Possiamo riscrivere la (4.71) nella forma  $v = T(v)$ , ove  $T : C(R_1) \rightarrow C(R_1)$  è l'operatore

$$\begin{aligned} T[v](\xi', \eta') &= 1 + \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta'}^{\eta} \gamma v \, dx dy + \\ &+ \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') v(x, \eta') \, dx - \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) v(\xi', y) \, dy, \quad (\xi', \eta') \in R_1. \end{aligned}$$

Proveremo che  $T$  è una contrazione da  $C(R_1)$  in sé allorché si munisca lo spazio  $C(R_1)$  della norma

$$\|v\|_{\lambda} = \sup_{(x,y) \in R_1} e^{-\lambda(x-\xi) - \lambda(\eta-y)} |v(x, y)| \quad \forall v \in C(R_1), \quad (4.72)$$

ove  $\lambda$  è un numero positivo da scegliere opportunamente. Questa è chiaramente una norma su  $C(R_1)$ , ed è equivalente alla norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  poiché, come si verifica facilmente,

$$\|v\|_{\lambda} \leq \|v\|_{\infty} \leq e^{\lambda(\xi_1 - \xi) + \lambda(\eta - \eta_1)} \|v\|_{\lambda} \quad \forall v \in C(R_1), \quad \forall \lambda > 0.$$

Si ha allora, per ogni  $(\xi', \eta') \in R_1$  e per ogni  $v, w \in C(R_1)$ ,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda(\xi' - \xi) - \lambda(\eta - \eta')} |T[v](\xi', \eta') - T[w](\xi', \eta')| &\leq \\ &\leq \|\gamma\|_{\infty} \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta'}^{\eta} e^{-\lambda(\xi' - x) - \lambda(y - \eta')} [e^{-\lambda(x - \xi) - \lambda(\eta - y)} |v(x, y) - w(x, y)|] \, dx dy + \\ &+ \|\beta\|_{\infty} \int_{\xi}^{\xi'} e^{-\lambda(\xi' - x) - \lambda(\eta - \eta')} [e^{-\lambda(x - \xi)} |v(x, \eta') - w(x, \eta')|] \, dx + \\ &+ \|\alpha\|_{\infty} \int_{\eta'}^{\eta} e^{-\lambda(\xi' - \xi) - \lambda(y - \eta')} [e^{-\lambda(\eta - y)} |v(\xi', y) - w(\xi', y)|] \, dy \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|v - w\|_{\lambda} [\|\gamma\|_{\infty} + \|\beta\|_{\infty} + \|\alpha\|_{\infty}], \end{aligned}$$

da cui

$$\|T[v] - T[w]\|_{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \|v - w\|_{\lambda} [\|\gamma\|_{\infty} + \|\beta\|_{\infty} + \|\alpha\|_{\infty}].$$



Se ne deduce che per  $\lambda$  sufficientemente grande l'operatore  $T$  è una contrazione nello spazio di Banach  $C(R_1)$  e quindi vi è un'unico punto fisso, ossia vi è un'unica soluzione  $v_P$  dell'equazione  $v = T[v]$ , che equivale alla (4.71). Ciò prova il teorema 4.7.3.  $\square$

**Osservazione 4.7.4** È importante sapere quanto la funzione  $v_P$  sia regolare rispetto a  $P$ . Questo si può vedere per mezzo dell'equazione integrale (4.71): siccome  $v_P$  ne è soluzione, si ha

$$\begin{aligned} v_P(\xi', \eta') &= 1 + \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta'}^{\eta} \gamma(x, y) v_P(x, y) dy dx + \\ &+ \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') v_P(x, \eta') dx - \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) v_P(\xi', y) dy; \end{aligned}$$

Se noi deriviamo formalmente rispetto a  $\xi$  e rispetto a  $\eta$  questa equazione, troviamo che le derivate  $(v_P)_{\xi}$  e  $(v_P)_{\eta}$  si ottengono come soluzioni di equazioni integrali analoghe alla precedente:

$$\begin{aligned} (v_P)_{\xi}(\xi', \eta') &= - \int_{\eta'}^{\eta} \gamma(\xi, y) v_P(\xi, y) dy + \\ &+ \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta'}^{\eta} \gamma(x, y) (v_P)_{\xi}(x, y) dy dx - \beta(\xi, \eta') v_P(\xi, \eta') + \\ &+ \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') (v_P)_{\xi}(x, \eta') dx - \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) (v_P)_{\xi}(\xi', y) dy, \\ (v_P)_{\eta}(\xi', \eta') &= \int_{\xi}^{\xi'} \gamma(x, \eta) v_P(x, \eta) dx + \\ &+ \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta'}^{\eta} \gamma(x, y) (v_P)_{\eta}(x, y) dy dx + \int_{\xi}^{\xi'} \beta(x, \eta') (v_P)_{\eta}(x, \eta') dx - \\ &- \alpha(\xi', \eta) v_P(\xi', \eta) - \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi', y) (v_P)_{\eta}(\xi', y) dy. \end{aligned}$$

Rispetto alla (4.71), è cambiato solamente il termine noto, che non è più 1 ma è, in entrambi i casi, la somma di due quantità note che coinvolgono  $v_P$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Queste due equazioni integrali si risolvono con il solito punto fisso, ed è facile provare che le loro soluzioni sono davvero le derivate parziali di  $v_P$

rispetto alle coordinate  $\xi$  e  $\eta$  di  $P$ . In definitiva, la funzione di Riemann  $v_P$  dipende in modo  $C^1$  da  $P$ ; per giunta, in modo simile si verifica che anche  $(v_P)_{\xi\eta}$  è continua.

Avendo costruito la funzione di Riemann, è facile ora provare l'esistenza della soluzione del problema (4.63).

**Corollario 4.7.5** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto connesso e siano  $\alpha, \beta \in C^1(D)$ ,  $\gamma, f \in C(D)$ . Sia inoltre  $C = \{(x, y) : x \in [a, b], y = \mu(x)\}$ , ove  $\mu \in C^1[a, b]$  è una funzione strettamente monotona tale che  $R = [a, b] \times [\min \mu, \max \mu] \subset D$ . Se  $\varphi \in C^1[a, b]$  e  $\psi \in C[a, b]$ , allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f & \text{in } R, \\ u(x, \mu(x)) = \varphi(x), & x \in [a, b], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \mu(x)) = \psi(x), & x \in [a, b], \end{cases} \quad (4.73)$$

ha soluzione unica  $u$ , tale che  $u \in C^1(R)$  e  $u_{xy} \in C(R)$ .

**Dimostrazione** Fissato un punto  $P = (\xi, \eta) \in R$ , sia  $v_P$  la soluzione del problema di Goursat (4.70). Come sappiamo, se  $u$  risolve il problema (4.73) allora  $u(P)$  si rappresenta nella forma (4.69). Si tratta di verificare che, nelle ipotesi fatte sui dati, la funzione (4.69) è davvero soluzione del problema (4.73). Ciò può essere fatto, con enorme fatica, ma in modo concettualmente facile. Occorre anzitutto parametrizzare gli insiemi  $\Omega_P$  e  $\Gamma_P$  in funzione delle coordinate  $(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} \Omega_P &= \{(x, y) : \xi \leq x \leq \mu^{-1}(\eta), \mu(x) \leq y \leq \eta\}, \\ \Gamma_P &= \{(x, \mu(x)) : \xi \leq x \leq \mu^{-1}(\eta)\}; \end{aligned}$$

dopodiché, osservato che lungo  $\Gamma_P$  si ha  $\nu = \left( \frac{\mu'(x)}{\sqrt{1+\mu'(x)^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\mu'(x)^2}} \right)$ , bisogna esplicitare la funzione (4.69):

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} [u(\mu^{-1}(\eta), \eta) v_P(\mu^{-1}(\eta), \eta) + u(\xi, \mu(\xi)) v_P(\xi, \mu(\xi))] - \\
& - \int_{\xi}^{\mu^{-1}(\eta)} \int_{\mu(x)}^{\eta} v_P(x, y) f(x, y) dy dx + \\
& + \int_{\xi}^{\mu^{-1}(\eta)} \left[ \left( \frac{1}{2} [u_y(x, \mu(x)) v_P(x, \mu(x)) - (v_P)_y(x, \mu(x)) u(x, \mu(x))] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha(x, \mu(x)) u(x, \mu(x)) v(x, \mu(x)) \right) \mu'(x) - \right. \\
& - \left( \frac{1}{2} [u_x(x, \mu(x)) v_P(x, \mu(x)) - (v_P)_x(x, \mu(x)) u(x, \mu(x))] + \right. \\
& \left. \left. + \beta(x, \mu(x)) u(x, \mu(x)) v_P(x, \mu(x)) \right) \right] dx.
\end{aligned}$$

Si deve poi osservare che nel secondo membro la  $u$  viene calcolata in punti di  $C$ , nei quali è  $u(x, \mu(x)) = \varphi(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \mu(x)) = \psi(x)$ , il che a sua volta implica

$$u_x + u_y \mu' = \varphi', \quad u_x \mu' - u_y = \psi \sqrt{1 + (\mu')^2},$$

da cui, facilmente,

$$\begin{cases} u_x(x, \mu(x)) = \frac{\psi(x) \mu'(x)}{\sqrt{1 + \mu'(x)^2}} + \frac{\varphi'(x)}{1 + \mu'(x)^2}, \\ u_y(x, \mu(x)) = -\frac{\psi(x)}{\sqrt{1 + \mu'(x)^2}} + \frac{\varphi'(x) \mu'(x)}{1 + \mu'(x)^2}. \end{cases}$$

Questi valori di  $u$ ,  $u_x$  e  $u_y$  vanno sostituiti nell'espressione di  $u(\xi, \eta)$  sopra scritta. A questo punto, è abbastanza agevole rendersi conto che le derivate  $u_\xi$ ,  $u_\eta$  e  $u_{\xi\eta}$  (le quali, si ricordi, sulla base dell'osservazione 4.7.4 coinvolgono anche le derivate  $(v_P)_\xi$ ,  $(v_P)_\eta$  e  $(v_P)_{\xi\eta}$ ) esistono e sono continue; assai più intricato, noioso e lungo è controllare, utilizzando le proprietà della funzione di Riemann  $v_P$ , che  $u(\xi, \eta)$  risolve l'equazione: non riporteremo questa verifica. Infine, le condizioni ai limiti per  $u$  e per la sua derivata normale si

verificano facendo tendere  $P$  a un generico punto  $P_0 \in C$  e osservando che di conseguenza anche  $P_1$  e  $P_2$  tendono a  $P_0$  mentre  $\Omega_P$  e  $\Gamma_P$  si riducono a  $\{P_0\}$ . Il calcolo è facile per la condizione su  $u$ , perché gli integrali spariscono mentre  $v_P(P_2)$  e  $v_P(P_1)$  tendono a  $v_{P_0}(P_0) = 1$ ; più laborioso è il controllo della condizione sulla derivata normale. Omettiamo i dettagli.  $\square$

# Bibliografia

- [1] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics, vol. II: partial differential equations*, Wiley, New York 1962.
- [2] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence 1998.
- [3] P. E. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1964.
- [4] L. L. Helms, *Introduction to potential theory*, Wiley-Interscience, New York 1964.
- [5] F. John, *Partial differential equations*, Springer, Berlin 1971.
- [6] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc., Providence 1968.
- [7] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic equations*, Birkhäuser, Basel 1995.
- [8] V. P. Michajlov, *Equazioni differenziali alle derivate parziali*, Mir, Mosca 1984.
- [9] A. N: Tichonov, A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*, Mir, Mosca 1981.
- [10] H. F Weinberger, *A first course in partial differential equations*, Blaisdell Publishing Company, New York 1965.