1° SEM BERARDUCCI APPUNTI PROVVISORI DEL CORSO DI MAT. DISCRETA

2° SEM GAIFFI

CHILDS, ALGEBRA: UNA INTRODUZIONE CONCRETA

- LISTA TIPICA DI DOMANDE DA ESAME

30/09/2015 MDOL

NUMERI NATURALI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ INSIEME DEI NUMERI NATURALI

- SUI NUMERI NATURALI E COSE SIMILI SI POSSONO FARE RAGIONAMENTI PER INDUZIONE

- DEFINIZIONI RICORSIVE SU $\mathbb{N}$

es. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\begin{cases} 0! \\ (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}$$ RICORSIONE SEMPLICE

- DEF RICORSIVA SU UNA SERIE DI OGGETTI: REGOLA PER CALCOLARE a_n A PARTIRE DAI PRECEDENTI + REGOLA PER I CASI BASE (CHE NON HANNO PRECEDENTI)

es. SUCCESSIONE DI FIBONACCI → RICORSIONE FORTE (PIÙ CASI PRECEDENTI DEFINITI)

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = F_0 + F_1 = 1 \quad F_3 = F_2 + F_1 = 2$

- LA RICORSIONE "FUNZIONA" IN $\mathbb{N}$ PERCHÉ NON CI SONO SUCCESSIONI DECRESCENTI INFINITE DI NUMERI NATURALI

SU $\mathbb{R}$ INVECE NON FUNZIONANO

- RICORSIONE vs INDUZIONE

DEFINIRE QUALCOSA | DIMOSTRARE QUALCOSA

es. $\underbrace{n! \geq n^2}_{P(n)}$? $P(n)$ PROPOSIZIONE

FASE SPERIMENTALE

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
$n!$	1	1	2	6	24	120
$P(n)$	V	V	F	F	V	V
$(P(n) \to P(n+1))$	V	F	V	V	V	V

V V !

- SERVE UNA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE + ALCUNI CALCOLI

$\underbrace{n! \geq n^2}_{P(n)}$

CERCO DI OPERARE PER INDUZIONE $(n+1)! \geq (n+1)^2$

$(n+1)\, n! \geq (n+1)\, n^2$

IPOTESI INDUTTIVA (PER $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) $(n+1)\, n^2 > (n+1)(n+1)$

QUINDI, SE $P(n)$ È VERA, ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

$(n+1)! \geq (n+1)^2$ PER $n \geq 2$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ PER $n \geq 2$

SO CHE $P(5)$ È VERA, SO CHE $P(5) \to P(6)$ È VERA

QUINDI OTTENGO CHE $P(6)$ È VERA

$P(6) \to P(7)$ E COSÌ VIA

- UNA VOLTA SAPUTO CHE $\forall n\ P(n) \to P(n+1)$

BASTA COSTRUIRE UN CASO VERO PER CONCLUDERE $\forall n \geq K\ P(n)$

- DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

1) CASO BASE $P(a)$

2) PASSO INDUTTIVO $\forall n > a$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

PER INDUZIONE $\forall n \geq a$ $P n$

$[P(a) \text{ e } (\forall n > a, (P(n) \Rightarrow P(n+1)))] \Rightarrow [\forall n \geq a, P(n)]$

01/10/2014

0 1 2 3 4 5 6

| | | | | | | |

$R(n)$ = n è rosso

- il successore di un rosso è rosso

2) passo $\forall n\,(R(n) \Rightarrow R(n+1))$

1) base $R(4)$

$\Rightarrow \forall n \geq 4,\ R(n)$

Dimostrazione di $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(n)$: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(n+1)$: $1+2+3+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Per ipotesi induttiva supongo che $P(n)$ sia vero

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ho dimostrato il passo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Dimostro la base $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$P(1)$ è vera

$\forall n\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

per induzione $\forall n \geq 1,\ P(n)$

Somma dei primi n numeri dispari

$n=5$ $1+3+5+7+9 =$

$$(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+\dots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) =$$

$$= n(n+1) - n = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(-1) + \sum_{i=1}^{n}2i$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(i) = E(1) + E(2) + \dots + E(n)$$

$$\sum_{i=1}^{1} E(i) = E(1) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} E(i) + E(n+1)$$

- SUCCESSIONI ARITMETICHE DI PERIODO K

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \dots a_n$

(K K K K)

$a_1 - a_0 = K$

$a_2 - a_1 = K$

$a_3 - a_2 = K$

es $a_0 = 7 \qquad K = 3$

$7, 10, 13, 16, \dots$ (n-esimo Termine)

$7+0\cdot3 \qquad 7+1\cdot3 \qquad 7\cdot(n-1)3$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (7+i3) = \sum_{i=0}^{n-1} 7 + \sum_{i=0}^{n-1} i3 = 7n + \frac{3}{2}(n-1)n = \frac{3n^2+11n}{2} = \frac{n(3n+11)}{2}$$

- PROGRESSIONI GEOMETRICHE

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n \qquad K = \frac{a_{i+1}}{a_i}$ COSTANTE

es. $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^n$

Somma i primi $n+1$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \quad ; P(n)$$

BASO : $P(0) : \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1 \qquad 2^0 = 1$

PASSO : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$? per ipotesi induttiva $(2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$

$2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$ ho dimostrato il passo

$P(0)$ e $(\forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n, P(n)$

PER ESTESO

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2^i}_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = (2^{n+1}-1) + 2^{n+1} = \underbrace{2^{n+2}-1}_{\text{HO DIMOSTRATO IL PASSO}}$$

PER INDUZIONE, HO DIMOSTRATO CHE $\forall n$, $P(n)$

es. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad x \neq 1$

DIMOSTRARE PER INDUZIONE

ALTERNATIVAMENTE

$$(x-1)\sum_{i=0}^{n} x^i = x^{n+1} - 1$$

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = x^{n+1} - 1$$

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

$$-1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n = x^{n+1} - 1$$

07/10/2014

$(x+y)^n = ?$

TEOREMA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n \qquad \binom{n}{k} \text{ COEFF. BINOMIALE}$$

COME SI DIMOSTRA

N.B. ~~$\binom{n}{k}$~~ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

n						
0				1		
1			1		1	
2		1		2		1
3	1		3		3		1
4	1		4		6		4		1
K	0		1		2		3		4

$T_{n,k} = \binom{n}{k}$

$T^n_k = T_{n,k}$

1) $T^n_0 = T^n_n = 1$

2) $T^n_k = T^{n-1}_{k-1} + T^{n-1}_k \qquad n \geq 2, \ k > 0, \ k \leq n$

LEMMA: 1) e 2) VALGONO ANCHE PER I COEFF. BINOMIALI

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\quad \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} =$

$$\frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \checkmark$$

QED (QUOD ERAT DEMONSTRANDUM)

TEOREMA $\binom{n}{k} = T^n_k$

– DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE SU n

- BASE $n=0$ $\quad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1 = T^0_0$

- PASSO INDUTTIVO $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ $\quad \binom{n-1}{k} = T^{n-1}_k \ \forall k \Rightarrow \binom{n}{k} = T^n_k \ \forall k$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$ PER IPO. INDUTTIVA $= T^{n-1}_{k-1} + T^{n-1}_k = T^n_k$ PER DEF.

QUINDI, PER INDUZIONE, $P(n)$ VALE $\forall n$

TEOREMA: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} x^{n-i} y^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE SU n

BASE $(x+y)^0 = \sum_{i=0}^{0} x^{0-i} y^i \binom{n}{i} = x^0 y^0 \binom{0}{0} = 1$

PASSO INDUTTIVO $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = (x+y)(x+y)^{n-1} =$$

$$= \{\text{PER L'IPOTESI INDUTTIVA}\} \quad (x+y) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^{i+1} =$$

$$= \binom{n-1}{0} x^n + \binom{n-1}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n-1}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} x y^{n-1} +$$

$$+ \binom{n-1}{0} x^{n-1} y + \dots + \binom{n-1}{n-1} y^n =$$

$$= x^n + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right) x^{n-1} y + \dots + \left(\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2}\right) x y^{n-1} + y^n =$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

OPPURE

$$\sum_{i=0}^{n-1} E(i) = \sum_{j=1}^{n} E(j-1) \qquad \text{(CAMBIO DI VARIABILE NELLA SOMMATORIA)}$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^{i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} y^i =$$

$$= \binom{n-1}{0} x^n + \binom{n-1}{n-1} y^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} y^i\right) =$$

$$= x^n + y^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \qquad \text{Q.E.D.}$$

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5   10  10  5   1
```

$1 - 1 = 0$

$1 - 2 + 1 = 0$

$1 - 3 + 3 - 1 = 0$

$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ PERCHÉ?

PER IL BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$x = 1 \quad y = -1$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$$

LA SOMMA DI TUTTI GLI ELEMENTI DI OGNI RIGA n DEL TRIANGOLO È 2^n

$x = 1 \quad y = 1$

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

- INSIEMI

- in un insieme non conta la ripetizione o l'ordine

-

- $a \in B$ a è un elemento di B

  $A \subseteq B$ $\forall x [x \in A \Rightarrow x \in B]$

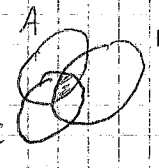
  $A \equiv B$ $\forall x \; x \in A \leftrightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

- cardinalità $|A|$ = numero di elementi contenuti in A

- unione $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

- intersezione $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

  es. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



- prodotto cartesiano $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

- distributività

  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- operazioni tra insiemi ed espressioni logiche

  $x \in (A \cap B) \cup C \rightarrow [x \in (A \cap B)] \vee (x \in C)$

  $(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$

  $(x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)$

  $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- complemento di un insieme $U^c = \overline{U} = \{x \mid x \in U\}$

UNIPI/N BERARDU

- CALCOLO COMBINATORIO

ES. TARGHE [L|L|N|N|L|L] |LETTERE| = 26 |CIFRE| = 10

NUMERO TOTALE DI TARGHE : $26^4 \cdot 10^3$

NUMERO DI TARGHE CON ALMENO UNA A e UN 7

TOTALE DI TARGHE − |(TARGHE SENZA A) ∪ (TARGHE SENZA 7)|

$= 26^4 \cdot 10^3 - (|\text{senza A}| + |\text{senza 7}| - |\text{senza A e 7}|) =$

$= 26^4 \cdot 10^3 - (25^4 \cdot 10^3 + 26^4 \cdot 9^3 - 25^4 \cdot 9^3)$

$= 26^4 10^3 - 25^4 9^3 \left(\frac{10^3}{9^3} + \frac{26^4}{25^4} - 1\right) = 26^4 (10^3 - 9^3) + 25^4 (9^3 - 10^3) =$

$= 26^4 (10^3 - 9^3) - 25^4 (10^3 - 9^3) =$

$= (10^3 - 9^3)(26^4 - 25^4)$

$= (10^3 - 9^3 + 1 \to 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10)(3$

LE TARGHE SONO STRINGHE, MA ANCHE FUNZIONI

$f : A \to B$

ES $CS43SC$ $1 \mapsto C$ $2 \mapsto S$ $3 \mapsto 4$ ... $Z \mapsto C$

$f : \{1, 2, 3, 4 \ldots 9\} \to \{A \ldots Z \ldots 0 \ldots 9\}$

f è una funzione da A (INPUTS) a B (OUTPUTS)

QUANTE SONO LE FUNZIONI $f : \{1 \ldots 7\} \to \{\text{LETTERE U CIFRE}\}$

36^7

In generale se $|A| = n$, $|B| = k$

$|\{f \mid f : A \to B\}| = k^n$

TARGHE SENZA ALCUNA RIPETIZIONE

→ SONO FUNZIONI INIETTIVE

$f : A \to B$ INIETTIVA

$(\forall x, y \in A)\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

$(\forall x, y \in A)\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

- QUANTE SONO LE FUNZIONI INIETTIVE $f: \{1,2,3\} \to \{A,B\}$? ZERO !

- QUANTE SONO LE FUNZIONI INIETTIVE $f: \{1,2,3\} \to \{A,B,C,D\}$?

  PER $f(1)$ 4 POSSI

  PER $f(2)$ 3 POSSI

  PER $f(3)$ 2 POSSI

  $\Rightarrow$ SONO $4 \cdot 3 \cdot 2$

15/10/2014

- $f: A \to B$ INIETTIVA — A: DOMINIO — B: CODOMINIO

  $\forall x, y \in A \quad fx = fy \Rightarrow x = y$

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ NON È INIETTIVA

$f(2) = f(-2) = 4$ MA $2 \neq -2$

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ È INIETTIVA

DIM. $x, y \in \mathbb{R}$ SUPPONIAMO $f(x) = f(y)$

$f(x) = f(y) \to 3x + 2 = 3y + 2 \quad 3x = 3y \quad x = y$

- UNA FUNZIONE $f: A \to B$ È UN INSIEME DI COPPIE (a, b) CON $a \in A$, $b \in B$

$f \in A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ 1) $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c$

2) $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(fa = b)$

$fa = b \wedge fa = c \Rightarrow b = c$

$\forall x, y \quad (x = y \Rightarrow fx = fy)$

- DEF. f È INIETTIVA SE

$\forall x, y \in A \quad (f(x) = f(y) \to x = y)$

- DEF $\mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A \quad fa = b\}$

- DEF $f: A \to B$ SURGETTIVA SE $B = \mathrm{Im}(f)$

$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(fa = b)$

- DEF f È BIUNIVOCA SE È INIETTIVA E SURGETTIVA

f BIUNIVOCA $\Rightarrow |A| = |B|$

- DEF f INVERSA $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$

21/10/2014

- INSIEME DELLE PARTI

$[m] = \{1, 2, \dots, m\}$

$\mathcal{P}([m]) = \{A \mid A \subseteq [m]\}$

es. $\mathcal{P}([3]) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$|\mathcal{P}([m])| = 2^m$

PER OGNI ELEMENTO DELL'INSIEME, POSSO DECIDERE SE METTERLO O MENO NEL SOTTOINSIEME DELL'INSIEME DELLE PARTI.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$

- DEF. $\mathcal{P}_k(B) = \{A \mid A \subseteq B \wedge |A| = k\}$

es. $\mathcal{P}_2([3]) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ $\quad |\mathcal{P}_2([3])| = 3 \leq 2^3$

$\mathcal{P}_3([4]) = \{\{1,2,3\}, \{5,6,8\}, \dots\}$ $\quad |\mathcal{P}_3([4])| = ?$

GLI INSIEMI $A \in \mathcal{P}_3([4])$ SONO DI DUE TIPI

1) QUELLI CHE CONTENGONO 4 $\quad |\mathcal{P}_2([3])|$
2) QUELLI CHE NON CONTENGONO 4 $\quad |\mathcal{P}_3([3])|$

$$|\mathcal{P}_3([4])| = |\mathcal{P}_2([3])| + |\mathcal{P}_3([3])|$$

IN GENERALE

$k \leq m, \quad k, m > 0$

$$|\mathcal{P}_k([m])| = |\mathcal{P}_{k-1}([m-1])| + |\mathcal{P}_k([m-1])|$$

PONIAMO $C_k^m = |\mathcal{P}_k([m])|$

$$C_k^m = C_{k-1}^{m-1} + C_k^{m-1}$$

COME IL BINOMIO $\quad \binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$

CASI BASE

$$C_0^m = 1 = \binom{m}{0} = C_m^m = \binom{m}{m}$$

PER INDUZIONE SU m

$$C_k^m = \binom{m}{k}$$

b) STRINGHE BINARIE DI LUNG. 13 CON ESATTAMENTE DUE ZERO

= POSIZIONI DI DUE "0" SU 13 POSIZIONI POSSIBILI

$= \binom{13}{2}$

C'È UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA $B_2[13]$ E LE STRINGHE BINARIE DI 13 CIFRE CON 2 ZERO

c) $|\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x+y+z = m\}| = ?$ $= \binom{m+2}{2}$

$m=3$ (0,0,3) (0,1,2) (1,1,1) (2,1,0) ...

$m=11$ (2,2,7)

POSSO CONSIDERARLA COME UNA STRINGA BINARIA

$\underbrace{11}_{2}\,0\,\underbrace{11}_{2}\,0\,\underbrace{1111111}_{7}$

$\Rightarrow$ È COME CONTARE LE STRINGHE BINARIE DI LUNG. 13 E 2 ZERI (CORRISPONDENZA BIUNIVOCA)

$= \binom{13}{2}$

d) POKER 52 CARTE $= 13 \times 4$

POLL $= \{ 2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\spadesuit, 4\clubsuit, 1\heartsuit \}$

NON ORDINATO

$|POLL| = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$

- 13: VALORI PER IL TRIS
- 4: SEMI PER IL TRIS
- 12: VALORE COPPIA
- $\binom{4}{2}$: SEMI COPPIA

22/10/2014 FOGLIO MOLA BERNARDI

ESERCIZIO 20 GUSTI DI GELATO 12 FRUTTA, 8 NOCI DI FRUTTA

a) QUANTI CON 4 GUSTI? $\binom{20}{4}$

b) 4 GUSTI CON ALMENO 2 DI FRUTTA? 2 O 3 O 4 DI FRUTTA

2 DI FRUTTA $\binom{12}{2}\binom{8}{2}$

+

3 DI FRUTTA $\binom{12}{3}\binom{8}{1}$

+

4 DI FRUTTA $\binom{12}{4}\binom{8}{0}$

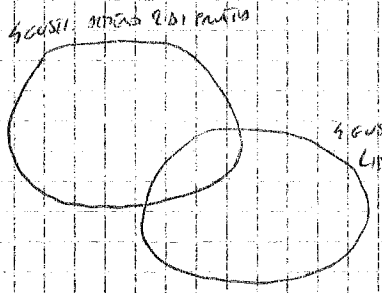
=

M

ATT.: $\binom{12}{2}\binom{18}{2}$ È CONTATO SI CONTANO DUE O PIÙ VOLTE I GELATI CON PIÙ DI 8

c) 4 GUSTI, ALMENO 2 FRUTTA, MA CON INSIEME LIMONE E FRAGOLINE

$\left[\binom{12}{2}\binom{8}{2} + \binom{12}{3}8 + \binom{12}{4}\right]$ − QUELLI CON LIMONE E FRAGOLINE $\binom{18}{2}$



= A LIM CON FRAGOLINE DA ALMENO 2 FRUTTI

LIM, FRA, FR, FR → $\binom{11}{2}$ +

LIM, FRA, FR, 7 FR → 11 · 7

$M = \binom{12}{2}\binom{8}{2} + \binom{12}{3}8 + \binom{12}{4} - \binom{11}{2} - 11 \cdot 7$

- FIBONACCI

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

- DIGRESSIONE

n^2 =	0	1	4	9	16	25	36	
$2n+1$ =	1	3	5	7	9	11		
$2n$	2	2	2	2	2			
0	0	0	0	0				

REGOLA: SE PARTIAMO DA UN POLINOMIO, LE DIFFERENZE ARRIVANO A ZERO

2^n =	1	2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	
	1	2	4	8		

REGOLA: LE DIFFERENZE DI UNA SUCC. ESPONENZIALI DA LUOGO A SE

FIB_n =	0	1	1	2	3	5	8	13	21	
	1	0	1	1	2	3	5	13		
	-1	1	0	1	1	2				

$\Rightarrow$ FIB HA UN COMPORTAMENTO SIMILE A QUELLO ESPONENZIALE

- PAR - FIBONACCI $f_0 = 0$ $f_1 = 1$ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

TENTO CON $f_n = c^n$

VOGLIO CHE c SIA TALE CHE

$$c^{n+2} = c^{n+1} + c^n \quad \forall n$$

$$c^2 - c - 1 = 0$$

$p(x) = x^2 - x - 1$ POLINOMIO CARATTERISTICO DELLA SUCC. DI FIBONACCI

RADICI DI $p(x)$ $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$

↳ α VA BENE PER UNA SUCCESSIONE SIMILE A QUELLA DI FIBONACCI, MA NON SODDISFA LE CONDIZIONI DI PARTENZA

$\Rightarrow$ PER OTTENERE IL POLINOMIO DI FIBONACCI, USO ENTRAMBE LE RADICI DI $p(x)$.

$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad (A\alpha^{n+2} + B\beta^{n+2}) = (A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1}) + (A\alpha^n + B\beta^n)$$

$$A\underbrace{(\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} - \alpha^{n})}_{=0} + B\underbrace{(\beta^{n+2} + \beta^{n+1} - \beta^{n})}_{=0} = 0$$

SEMPRE VALIDA PER COME SONO SCELTI α E β

$\Rightarrow$ SODDISFA PRE-FIB

TROVIAMO A E B PERCHÉ SODDISFINO FIBONACCI

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

$$F_0 = 0 = A\alpha^0 + B\beta^0 = A + B$$

$$F_1 = 1 = A\alpha + B\beta$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\alpha + B\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -A \qquad A(\alpha - \beta) = 1$$

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2}{4}(1+\sqrt{5}) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

ESERCIZIO

PIANTA ALTA 1 cm

SE AL GIORNO n È ALTO x

$n+1$ È ALTO $x + \frac{1}{30}x = x\left(1+\frac{1}{30}\right)$ DOPO UN ANNO > 40 cm

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^0, \left(1+\frac{1}{30}\right)^1, \left(1+\frac{1}{30}\right)^2 \dots \left(1+\frac{1}{30}\right)^n$$

DOPO UN ANNO $n = 365$

PER BERNOULLI $\left(1+\frac{1}{30}\right)^{365} \geq 1 + 365\,\frac{1}{30}$ cm NON BASTA

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^{365} \geq \left(1+\frac{1}{30}\right)^{30\cdot 12} = \left(\left(1+\frac{1}{30}\right)^{30}\right)^{12} \geq \left(1+30\cdot\frac{1}{30}\right)^{12} = 2^{12} = 40{,}96 \text{ cm}$$

ESERCIZIO

ANAGRAMMI DI ALTO: $4!$

ANAGRAMMI DI ATTILIO: DELLE LETTERE SONO UGUALI

1) PRIMA CONSIDERO TUTTI GLI ANAGRAMMI (8!) E POI TOLGO QUELLI EQUIVALENTI

$$\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

OPPURE

2) CONSIDERO MOVE POSIZIONI

$$\binom{8}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{8!\,7!\,4!\,3!}{2!\,6!\,3!\,4!\,2!\,1!} = \frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

MODI DI SCEGLIERE LE POSIZIONI DELLE A; POSIZIONI

ESERCIZIO

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\geq 8} = \{5, 6, 7, 8\}$

$f(x,y) = 3x + 5y$

INIETTIVA? $5,0 \to 3\cdot 5 + 5\cdot 0$ $\Rightarrow$ NON È INIETTIVA

$0,3 \to 3\cdot 0 + 5\cdot 3$

SURGETTIVA? $\forall m \geq 8\ (\exists x,y.\ m = 3x+5y)$

$P(m): (\exists x,y.\ m = 3x+5y)$

SUBGETTIVA?

$5 = 3 \cdot 0 + 5$

$6 = 3 \cdot 2 + 0$

$7 = ?$

$8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$

$9 = 3 \cdot 3 + 0$

$10 = 0 + 5 \cdot 2$

$11 = 3 \cdot 2 + 5$

$12 = 3 \cdot 5$

DUNQUE HO CHE P8, P9 E P10 SONO $P(n) \to P(n+3)$

(* PRINCIPIO DEL MINIMO

SE $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, ALLORA A HA UN MINIMO)

POSSIAMO USARE IL PRINCIPIO DEL MINIMO

SE PER ASSURDO LA TESI FOSSE FALSA, ESISTEREBBE IL MINIMO $n \geq 8$

CHE NON RIESCO A SCRIVERE NELLA FORMA $n = 3x + 1 \vee 5$

$n \neq 8, 9, 10$

$n \geq 11 \Rightarrow n - 3 \geq 8 \to P(n-3)$ VERA (n CON MINIMO) ASSURDO CHE $P(n+3) \to P(n)$

$\Downarrow$

VERA ANCHE $P(n)$ (!)

CONTRADDIZIONE

ESERCIZIO

QUANTE $f: [20] \to [20]$

a) ASSUMIAMO V UNO VALORE ≥ 11

CONVIENE PASSARE AL COMPLEMENTO

QUANTE NON ASSUMONO UN VALORE ≥ 11

SONO $f: [20] \to [10]$, QUINDI 10^{20}

$\to$ QUINDI SONO $20^{20} - 10^{20}$

b) ASSUMONO ESATTAMENTE UN VALORE ≥ 11

- SCELGO UN NUMERO ≥ 11 IN 10 MODI

DEVO MANDARE $[20] \to \{1, \dots, 10\} \cup \{0\}$ E POI TOGLIERE QUELLE CHE NON VANNO VA

$11^{20} - 10^{20}$

RISPOSTA: $10 \cdot [11^{20} - 10^{20}]$

ESERCIZIO 4.8 p42

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \qquad H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

SERIE ARMONICA (NON CONVERGE)

BASE $H_{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2}$ $\quad H_1 \geq 1$ $\quad 1 \geq 1$

INDUZIONE $H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{2n+1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{2n+1}{2} \qquad \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i}$$

PER IP. INDUTTIVA

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{2n}{2}$$

$$1 + \frac{n}{2} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}}_{2^n \text{ TERMINI}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq 2^n \frac{1}{2 \cdot 2^n} \geq \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO

SCACCHIERA 3×3 COLORARE IL BIANCO E NERO IN MODO CHE CI SIA ALMENO UNA REGIONE MONOCOLORE

ESERCIZIO p47

$n \geq 4$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \quad a_2 = 22 \quad a_3 = 82 \\ a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \end{cases}$$

SI PROVA $a_n = x^n$

$$x^n = 6x^{n-1} - 11x^{n-2} + 6x^{n-3}$$

$$x^3 = 6x^2 - 11x + 6$$

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \quad \text{ossia} \quad (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

$$p(3) = p(2) = p(1) = 0$$

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C \cdot 1^n$$

$100 = 7 \cdot 14 + 2$

$100 \equiv 2 \pmod 7$

$-100 = -7 \cdot 14 - 2 = -7 \cdot 15 + 5$

$-100 \equiv 5 \pmod 7$

TEOREMA $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$

$\exists!\ q, r,\quad a = b \cdot q + r \ \wedge\ 0 \le r \le b$

1) $a > 0$, $b > 0$

q è L'INTERO T.C. $b \cdot q \le a < b(q+1)$, $r = a - b \cdot q$

q ESISTE, IN QUANTO DISTANZA CON PRINCIPIO DEL MINIMO

2) $a < 0$, $b > 0$

$a = bq + r$ $\quad -a = b(-q) - r = b(-q) - b + (b - r) =$

$= b(-q-1) + r'$

055 $a \mid_{R} \frac{b}{q}$ $\quad c \mid_{R'} \frac{b}{q'}$

$a = bq + r \ \wedge\ c = bq' + r \iff b \mid a - c$

DIM $(a - c) = (bq + r) - (bq' + r) = b(q - q')$

DIM. VICEVERSA $a \mid_{R} \frac{b}{q}$ $\quad c \mid_{R'} \frac{b}{q'}$

$(a - c) = b(q - q') + (r - r')$ MA SE $a - c$ È MULTIPLO DI b

E $r, r' < b$ ALLORA $r - r' = 0$

DEFINIZIONE $a \equiv c \pmod b \iff a$ e c danno lo stesso resto quando divisi per b

$\iff (a-c)$ multiplo di b

OSS. $a \equiv c \pmod b$

$a+x \equiv c+x \pmod b$

$a \equiv c \pmod b \iff a+x \equiv c+x \pmod b$

OSS. $a \equiv c \pmod b \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ka \equiv kc \pmod b$

OSS $a \equiv 0 \ (b) \iff b \mid a$

TEO Se p è primo e $ka \equiv kb \pmod p$ allora $a \equiv b \ (p)$ se $k \not\equiv 0 \ (p)$

TEO $a \equiv c \ (b) \wedge a' \equiv c' \ (b)$

$\Rightarrow a+a' \equiv c+c' \ (b)$

DIM. $a \equiv c \ (b) \qquad a+a' \equiv c+a' \equiv c+c'$

ESERCIZIO: $a \equiv c \ (b) \wedge a' \equiv c' \ (b) \Rightarrow aa' \equiv c \cdot c' \ (b)$

- RESTO DI 1234567 mod 3 | mod 9 | mod 4 | mod 7

a) $= 7 + 6\cdot 10 + 5\cdot 10^2 + 4\cdot 10^3 + 3\cdot 10^4 + 2\cdot 10^5 + 1\cdot 10^6$

$|10 \equiv 1 \ (3)|$

$\equiv 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \equiv 7 \equiv 1 \pmod 3$

b) $1234567 \equiv 1 \pmod 9$

c) $1234567 \equiv \pmod 4$

$10^2 \equiv 0 \ (4) \qquad 10^n \equiv 0 \ (4) \quad \forall n > 2$

$1234567 = 67 + 100(12345) \equiv 67 \ (4) \equiv 3 \ (4)$

d) $1234567 \equiv \pmod 7$

$1000 \equiv -1 \ (7)$

$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i \equiv (a_0 + a_1 10 + a_2 \cdot 100) + 1000(a_3 + a_4 \cdot 10 + a_5 \cdot 100) + 1000^2 \ldots =$

$\sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} 1000^i (a_{3i} + a_{3i+1} \cdot 10 + a_{3i+2} \cdot 100)$

$1234567 = 1 \cdot 1000^2 + 234 \cdot 1000 + 567 \equiv (-1)^2 1 + 234 \cdot (-1) + 567 \quad (7)$

$= 334 \equiv 5 \ (7)$

e) $1234567 \equiv \pmod 7$

$10 \equiv -1 \ (11)$

$1234567 = 7 + 6\cdot 10 + 5\cdot 10^2 + 4\cdot 10^3 + 3\cdot 10^4 + 2\cdot 10^5 + 1\cdot 10^6$

$\equiv 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 \ (11) = 4$

es $3^{100} \bmod 10 = 8^{50} \equiv (-1)^{50} (3) = 1$

$a \equiv a' \ (c)$

$\Downarrow$

$a^n \equiv a'^n \ (c)$

EQUAZIONI IN MODULO

$143x = 77 \ (11)$ $\quad x = ?$

RADICI QUADRATE

$\sqrt{1234567} \in \mathbb{N}?$ $\quad \exists x \in \mathbb{N}, \ x^2 = 1234567$

$x^2 \equiv 1234567 \ (3)$

$x^2 \equiv 1234567 \ (4)$

$1234567 \equiv 1 \ (3)$ $\quad x^2 \equiv 1 \ (3)$

$1234567 \equiv 3 \ (4)$ $\quad x^2 \equiv 3 \ (4)$

$x = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \ (4)$

$x = 1$ $\quad x^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \ (4)$

$x = 2$ $\quad x^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \ (4)$

$x = 3$ $\quad x^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \ (4)$

Dimostrazione $\forall x \quad x^2 \neq 1234567$

se fosse quadrato

MASSIMO COMUN DIVISORE

$MCD(252, 198)$

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ $\quad 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$

$(252, 198) = 18$

$(a, b) =$ massimo intero che divide a e che b

$(0, 0) =$ non esiste! qualsiasi numero $\neq 0$ lo divide, massimo è il massimo

$(100, 0) = 100$ $\quad \forall x > 100$ non divide 100

$(-100, 0) = 100$ $\quad |100| = 100$

$MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$ $\quad MCD(a, b) > 0$ (se esiste)

$MCD(a,b) = MCD(a+b, b) = MCD(a+b, b) = MCD(a+kb, b)$

TEO $MCD(a,b) = MCD(a-b, b) = MCD(a+kb, b)$

DIM:

$MCD(a,b) = \max\{x : x|a \wedge x|b\}$

$MCD(a+kb, b) = \max\{x : x|a+kb \wedge x|b\}$

Basta dimostrare

$\{x : x|a \wedge x|b\} = \{x : x|a+kb \wedge x|b\}$

DIMOSTRO $\subseteq$

x t.c. $x|a \wedge x|b$

quindi $x|a+kb$

DIMOSTRO $\supseteq$

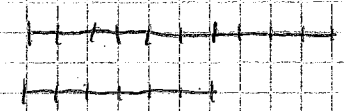
x t.c. $x|a+kb \wedge x|b$

$a+kb = cx \quad b = dx$

$a = a+kb-kb = cx - kd = x(c-kd)$

GEOMETRICAMENTE

- TROVARE L'MCD È TROVARE L'UNITÀ DI MISURA PIÙ GRANDE CHE PERMETTE DI MISURARE ENTRAMBE LE GRANDEZZE



$\Leftrightarrow$ $MCD(10,6) = MCD(10-6, 6)$

6

TEOREMA DI BEZOUT

$a, b \in \mathbb{Z}$

DEF. $CL(a,b) = \{as + bs \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}\}$

es $CL(10,6) = \{10+6, 2\cdot 10+6, -10+6, 10+2\cdot 6, \dots\}$

TEOREMA: $MCD(a,b) \in CL(a,b)$ (combinazioni lineari)

$CL^+(a,b) = CL(a,b) \cap \mathbb{Z}^{>0}$

TEOREMA: $MCD(a,b) = \min CL^+(a,b)$

- TEOREMA (BEZOUT) $MCD(a,b) \in CL(a,b)$

$MCD(a,b) = \min(CL(a,b) \cap \mathbb{Z}^{>0})$

DIM. $d = \min(CL(a,b) \cap \mathbb{Z}^{>0})$ $d = MCD(a,b)$

cioè 1) $d \mid a \wedge d \mid b$

2) d è il più grande tra i divisori

DIM. 1) Divido a per d e trovo il resto $\frac{a}{r} \mid \frac{d}{q}$

$a = dq + r$ $0 \le r < d$

d combinazione lineare $\Rightarrow d = am + bn$

$\begin{cases} a = dq + r \\ d = am + bn \end{cases}$ $r = a - dq = a - d(am + bn) =$

$a(1 - m) + b(-nq)$

r è una combinazione lineare

$r < d$

d era la più piccola $CL^+(a,b)$

$\Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow d \mid a \wedge d \mid b$

2) Mostro che d è il più grande

Prendo z t.c. $z \mid a \wedge z \mid b$

$z \le d$

In realtà basta dimostrare $z \mid d$ (perché $d > 0$, e sono $z < d$)

$z \mid a \wedge z \mid b \Rightarrow z \mid \underbrace{am + bn}_{CL(a,b)} = d$

$\Rightarrow$ abbiamo dimostrato non solo $z \le MCD(a,b)$, ma anche $z \mid MCD(a,b)$

$z \mid a \wedge z \mid b \Rightarrow z \le MCD(a,b) \wedge z \mid MCD(a,b)$

- EQUAZIONI DIOFANTEE

$\exists\, x, z$ t.c. $18 = 252x + 198w$

Sì, perché $18 = MCD(252, 198)$

$\exists\, z, w$ $\quad 17 = 252z + 198w$

se per assurdo esistesse

$18 \mid 252z + 198w = 17$ (1) → assurdo

↳ non esiste

- Per quali k esiste la soluzione di $k = 252x + 198y$

- per tutti e soli i k che sono multipli di $MCD(252, 198) = 18$

Dim:

$MCD(252, 18) = 252m + 198n$ (Bezout)

- se $k = MCD(252, 18) \cdot q \Rightarrow k = 252(mq) + 198(nq)$

- se k non è multiplo di $MCD(252, 198)$

esisterà $k = 252m + 198n$

k è una CL $(252, 198)$

ma $MCD(252, 198)$ è una CL $(252, 198)$

e k è multiplo di 252 e 198

- COME TROVARE LE SOLUZIONI

$MCD(1020, 351) = 1020x + 351y$

$MCD(1020, 351) = MCD(351, 318) = MCD(318, 33) = MCD(21, 33) = MCD(4, 18) = MCD(3, 18) =$

$MCD(3, 3) = (0, 3) = 3$

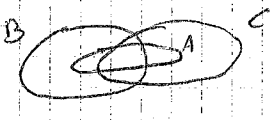
		1020	351
	1020	1	0
	351	0	1
$1020 - 2 \cdot 351$	318	1	-2
$351 - 1 \cdot 318$	33	-1	+3
$318 - 9 \cdot 33$	21	10	-29
$33 - 1 \cdot 21$	12	-11	+32
$12 - 1 \cdot 9$	9	+21	-61
$9 - 3 \cdot 3$	3	-32	93
	0	127	318

$3 = -32 \cdot 1020 + 93 \cdot 351$

$x = 127k \qquad y = 340k$

ATTENZIONE $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$?

NO: $A \supseteq (B \cup C) \not\Rightarrow A \supset B \vee A \supset C$



TEOREMA $a \mid bc \wedge MCD(a,b) = 1 \Rightarrow a \mid c$

DIM. (BEZOUT) $\Rightarrow 1 = am + bn \quad (\exists m, n)$

$\Downarrow$

$c = acm + bcn$

$\Rightarrow a \mid acm + bcn = c$

TEOREMA p PRIMO, $p \mid b \cdot c \Rightarrow p \mid b \vee p \mid c$

SE $p \nmid b \Rightarrow p \mid c$

SE $p \nmid b \Rightarrow MCD(p,b) = 1 \Rightarrow p \mid c$ ∎

↑ È 1 O P. SE È $p_1 \nmid p \mid b$

UNICITÀ SCOMPOSIZIONE IN PRIMI

$n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m} = q_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot q_k^{b_k}$ $\quad p_i, q_i$ PRIMI E DISTINTI

$p_i^{a_i} = q_j^{b_j}$ A MENO DELL'ORDINE, LA SCOMPOSIZIONE È LA STESSA

ES. $a \mid m \wedge b \mid m \Rightarrow ab \mid m$? NO

es. $2 \mid 2 \wedge 2 \mid 2$ ma $2 \cdot 2 \nmid 2$

È VERO SE $MCD(a,b) = 1$

TEOREMA $a \mid m \wedge b \mid m \wedge MCD(a,b) = 1 \Rightarrow ab \mid m$

DIM. BEZOUT $ax + by = 1 \quad \exists x, y$

$\Downarrow$

$amx + bmy = m$

$b \mid m \Rightarrow ab \mid bm \Rightarrow ab \mid amy$

$a \mid m \Rightarrow ab \mid bm \Rightarrow ab \mid bmx$

$ab \mid amy + bmx = m$