Stanza 216 - Mer 16

ALESSANDRO BERARDUCCI   GIOVANNI GAIFFI

www.dm.unipi.it/~berardu   ~gaiffi

Appunti provvisori / Appunti integrativi

Appunti 1° SEM (Matematica Discreta)

Appunti 2° SEM (Algebra Lineare)

LIBRI: Childs, Algebra

NUMERI NATURALI: $\emptyset, 1, 2, 3, \ldots$ 30/09/14

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ insieme dei numeri naturali

Definizioni ricorsive su $\mathbb{N}$

Es. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

Definizioni ricorsive di una successione

$a_0\, a_1\, a_2 \ldots$ di oggetti, significa dare una regola per determinare a_n a partire dai precedenti e una regola per i casi base (che non hanno precedenti).

Es. Successione di Fibonacci   Ricorsione Forte

$F_\emptyset = \emptyset$

$F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
0	1	1	2	3	5	8

richiede più di un precedente

$$\begin{aligned} F_4 &= F_3 + F_2 \\ &= (F_2 + F_1) + (F_1 + F_0) \\ &= ecc \end{aligned}$$

Perché funziona su $\mathbb{N}$ e non su $\mathbb{Z}=\{...-2,-1,\emptyset,1,2...\}$
Perché sui $\mathbb{N}$ arriviamo a una fine con lo $\emptyset$, negli altri insiemi NO.

Prendiamo i reali positivi ($\mathbb{R}^{\geq 0}$).

$$\begin{cases} G(0)=3 \\ G(x)=G\left(\frac{x}{2}\right)+1 \end{cases}$$

$\times$ $G(\frac{1}{2})$ $G(1)$

Rischio di non arrivare a $\emptyset$, quindi i $\mathbb{N}$ sono gli unici utilizzabili per l'<u>INDUZIONE</u>.

Giustificazione: non ci sono successioni infinite decrescenti $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 \ldots$ di num. naturali.

Es. $2^n = \underbrace{2\cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ volte}}$ $\begin{cases} 2^{n+1}=2^n\cdot 2 \\ 2^0=1 \end{cases}$ Ricorsione semplice

<u>RICORSIONE</u> / <u>INDUZIONE</u>
Definire qualcosa / Dimostrare qualcosa

Es. $n! \geq 2^n$?
$\underbrace{n! \; n^2}_{P(n)}$?

FASE SPERIMENTALE
$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$
$n^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
$n! = 1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

$P(n)$ è una proposizione. Può essere vera o falsa
(1) (Ø)

$P(n) = V, V, F, F, V, V \ldots$?
$P(n+1) = V, (F), V, V, V, V, V, \ldots$ veri all'infinito

- Vogliamo sapere per quali n ($n! \geq n^2$).
Serve una dimostrazione "per induzione" + calcoli

Esercizio preliminare:
Per quali n, ($n^2 \geq n+1$)? Facile, senza induzione!
$n^2 = n\cdot n \geq n\cdot 2 = n+n \geq n+1$
se $n\geq 2$ — se $n \geq 1$

Sicuro se $n\geq 2$.
$n=0,1$ <u>a mano</u>: $0^2 \not\geq 0+1$, $1^2 \not\geq 1+1$

Torniamo a $\overbrace{n! \geq n^2}^{P(n)}$?
$(n+1)! \geq (n+1)^2$? $P(n+1)$
$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

Se per caso conoscessi già $P(n)$, potrei supporre che $P(n)$ sia VERA, dimostrerei per $P(n+1)$.

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$
$\geq$
$(n+1)\, n^2$

Ho mostrato che $\overbrace{(n+1)! \geq (n+1)^2}^{P(n+1)}$ dando per buono che $\underbrace{n! \geq n^2}_{P(n)}$, cioè ho dimostrato che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
vera per $n\geq 2$

So che $P(5)$ è vera
So anche $P(5)\to P(6)$ vera
Quindi ottengo $P(6)$, vera.
Ora ho $P(6)$, ma so anche che $P(6)\to P(7) \ldots$

A	B	A → B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dimostrazione per induzione

$\boxed{P(n)}$

1) Passo base $P(a)$ Ipotesi Induttiva

2) Passo Induttivo $[\forall n \geq a \quad \boxed{P(n)} \rightarrow P(n+1)]$

Se riesco a dimostrare 1,2 concludo per induzione che $(\forall n \geq a)\ P(n)$.

07/10/14

TEOREMA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = ?$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y)$$
$$= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + (?)\, xy + (?)\, x^2y^2 + (?)\, xy^3 + y^4$$

Chi sono i (?)

TRIANGOLO DI TARTAGLIA o PASCAL

1	- 0
1 1	- 1
1 2 1	- 2
1 3 3 1	- 3
1 4 6 4 1	- 4 $\rightsquigarrow (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
1 5 10 10 5 1	- 5 $\rightsquigarrow (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Come si dimostra?

- $\sum_{i=0}^{n}$
- induzione
- $n!$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{(n-(n-k))!}_{k!}}$$

Es $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!}$

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA CON COEFFICIENTI BINOMIALI. $\rightarrow \binom{n}{k}$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

Def $T^n_k \overset{def}{=}$ il numero nella riga n posizione k da sinistra del triangolo.

Teo $T^n_k \overset{?}{=} \binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ Sperimentato $T^5_3 = \binom{5}{3} = 10$

Quale è la regola per generare i T_k^n?

① $T_0^n = 1 = T_n^n$

② $T_k^n = T_{k-1}^{n-1} + T_k^{n-1}$

Es $T_3^5 = T_2^4 + T_3^4$

$n \geq 2$

$k > 0$

$k < 0$

LEMMA

La ① e la ② sono vere anche per i binomiali

① $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$?

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{n-1!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$

$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)}{(k-1)!k(n-1-k)!}$

$= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{(k-1)!(n-1-k)!k(n-k)}$

$= \frac{(n-1)!(k+(n-k))}{}$

$= \frac{(n-1)! \cdot n}{}$

$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

QUED LEMMA

Visto che

LEMMA

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

① $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

La ② la applichiamo per $k \neq 0$ e $k \neq n$

Def

$$\begin{cases} T_k^n = T_{k-1}^{n-1} + T_k^{n-1} \\ T_0^n = T_n^n = 1 \end{cases}$$

Teo $\binom{n}{k} = T_k^n$

$P(n)$

Dim induzione su n

$\boxed{P(n)}$ dice che $\binom{n}{k} = T_k^n$ $\forall k$ come lo dimostro?

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ lemma

$= T_{k-1}^{n-1} + T_k^{n-1} \underset{\text{def}}{=} T_k^n$

ip. induttiva $P(n-1)$

Teo del binomio

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots +$$

$$+\binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

P(n)

DIM per induzione su n

Base $n=0$ $P(0)$ dice

$$(x+y)^0 = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}x^{0-i}y^i = \binom{0}{0}x^{0-0} - y^0 = 1$$

PASSO INDUTTIVO $P(n-1) \to P(n)$

Cerco di mostrare $P(n)$ $(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i\right]}_{\text{IP induttiva}} =$$

$$= x\left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i\right]$$

$$+ y\left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i\right]$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-i}y^i\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i$$

$$= \binom{n-1}{0}x^n + \binom{n-1}{1}x^{n-1}y$$

$$+\binom{n-1}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n-1}{n-1}xy^{n-1}$$

$$\binom{n-1}{0}x^{n-1}y + \binom{n-1}{1}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n$$

$$= x^n + \sum_{i=1}$$

— — —

130 studenti. 08/10

Scelgo 10 persone per andare alla lavagna.

Lo faccio in $\binom{130}{10} = \frac{130!}{10!\,120!} = \frac{130\cdot129\dots121}{10\cdot9\cdot8\dots1}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$n-(k-1)$

In tutto sono <u>k</u> termini nella produttoria

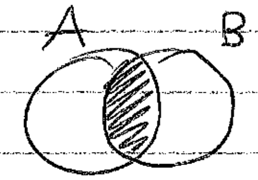
CALCOLO COMBINATORIO

Insiemi non ordinati $\{2,4,7\} = \{4,2,7\}$, invece le stringhe $247 \neq 427$.

CARDINALITÀ: n° degli elementi dell'insieme.

$A \subseteq B \quad \forall x\,[x\in A \Rightarrow x\in B]$

es. $\{2,3,4\} \subseteq \{2,3,4,5\}$



$A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$

$A = \{\{2,3\},\{3,7\},\{3,2,2\}\}$

A ha 2 elementi.

A è un insieme di insiemi.

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$P(n)$

Per induzione funziona per $n=0$.

$P(n-1) \rightarrow P(n)$

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i\right]$$

$P(n-1)$ $\quad x\sum + y\sum$

$|A|=24$ Studenti

$|B|=18$ superano il 1° test

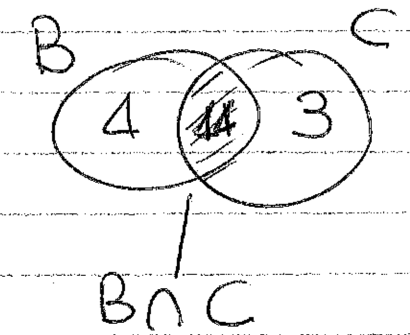
$|C|=17$ superano il 2° test

$|B\cap C|=14$ superano entrambi i test.

Quanti superano almeno un test?

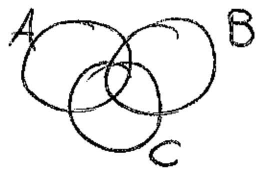
$|B\cup C|$ = superano 1° o 2°?

$|B| = n \quad |C| = k \quad |B\cup C| \leq n+k$



$$|B\cup C| = |B| + |C| - |B\cap C|$$
$$18 + 17 - 14 = 21$$

• $|A\cup B\cup C| = ?$



$A\cap B = \emptyset \Rightarrow |A\cup B| = |A| + |B|$

A e B disgiunti

Quindi

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

ESERCIZIO: Provare x 4

14/10/14

1	
1 2 1	$1-2+1=0$
1 3 3 1	$1-3+3-1=0$
1 4 6 4 1	$1-4+6-4+1=0$
1 5 10 10 5 1	$1-5+10-10+5-1=0$
1 6 15 20 15 6 1	$1-6+15-20+15-6+1=0$

Perché?

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \qquad \text{Binomio Newton}$$

$$(x+y)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} x^{6-i} y^i = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5y + \binom{6}{2}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 + \binom{6}{5}xy^5 + \binom{6}{6}y^6$$

se pongo $x=1,\ y=-1$

$$0 = (1-1)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \cancel{1^{6-i}} (-1)^i = \binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

se pongo $x=1,\ y=1$

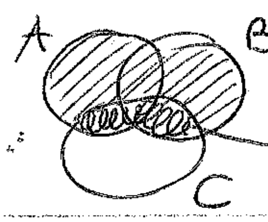
$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cancel{1^{n-i}} 1^i$$

$$\| \\ 2^n$$

es $1+6+15+20+15+6+1 = 2^6$

$(A\cup B)\cap C =$

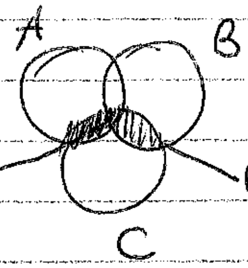
$(A\cap C)\cup(B\cap C)$



LEGGE DISTRIBUTIVA DEGLI INSIEMI

$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma \Longleftrightarrow$

$(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$



$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma\Longleftrightarrow(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$

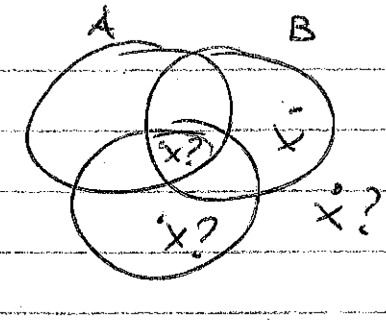
Lo dimostro con:
- le figure
- tavole di proposizioni α, β, γ

α β γ	$\alpha\wedge\beta$	$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma$	$\alpha\vee\gamma$	$\beta\vee\gamma$		$(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$
0 0 0	0	0				0
0 0 1	0	1				1
0 1 0	0	0				0
0 1 1	0	1				1
1 0 0	0	0				0
1 0 1	0	1				1
1 1 0	1	1				1
1 1 1	1	1				1

Ho scoperto che esiste una legge distributiva per le proposizioni.

Due insiemi U, V sono uguali se preso un x qualunque

$\forall x.(x\in U \Longleftrightarrow x\in V)$



Dove sta l'elemento x?
Ci sono 8 casi.

$x\in(A\cap B)\cup C$

$x\in(A\cap B)\vee(x\in C)$

$(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in C)$

$(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)$

$(x\in A\cup C)\wedge(x\in B\cup C)$

$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$

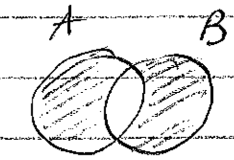
Scriviamo solo quello che ci interessa.

$\overline{A\cup B}=\bar A\cap\bar B$

Esercizio: De Morgan (dimostrare) $\overline{A\cup B}=\bar A\cap\bar B$

$U^c=\sim U=\{x \mid x\notin U\}$

$\bar{U}$



$x\in\bar U\Longleftrightarrow\sim(x\in U)\Longleftrightarrow x\notin U$

$\sim(\alpha\vee\beta)\Longleftrightarrow\sim\alpha\wedge\sim\beta$

$\sim(\alpha\wedge\beta)\Longleftrightarrow\sim\alpha\vee\sim\beta$

Ad esempio: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

Esercizio

Targhe $\boxed{L|L|N|N|N|L|L}$ $|\text{lettere}|=26$

$|\text{cifre}|=10$

Quante targhe in tutto?

26 possibilità per la 1a lettera

26 possibilità per la 2a =

10 . . .

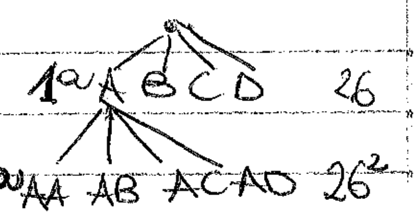
10 . . .

10 . . .

26 . . .

26 . . .

$26^4\cdot10^3$ targhe



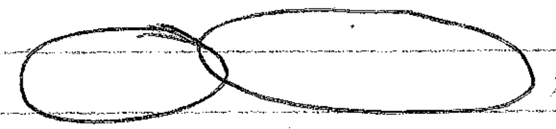
Testimone: c'era almeno una A e almeno un 7. Quante targhe hanno questa caratteristica? ⊛

~~ERRORE~~ più facile contare quelle senza A ⇒ $25^4 \cdot 10^3$

senza 7 ⇒ $26^4 \cdot 9^3$

ERRORE⊛: Tutte − (quelle senza A + senza 7)

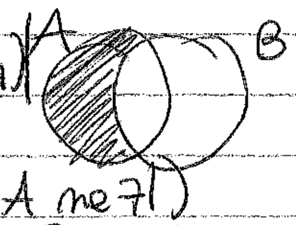
$$26^4 \cdot 10^3 - (25^4 \cdot 10^3 + 26^4 \cdot 9^3)$$



CORRETTA | Tutte \ (quelle senza A ∪ quelle senza 7) |

$A \setminus B = \{x \in A \land x \notin B\}$

= |Tutte| − |(quelle senza A) ∪ (quelle senza 7)|

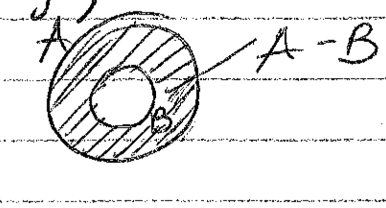


$= 26^4 \cdot 10^3 - (|\text{senza } A| + |\text{senza } 7| - |\text{senza } A \text{ né } 7|)$

$B \subseteq A$

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

$= 26^4 \cdot 10^3 - (25^4 \cdot 10^3 + 26^4 \cdot 9^3 - 25^4 \cdot 9^3)$



$|A - B| = |A| - |B|$

Le targhe sono stringhe, ma anche funzioni.

$\boxed{CJ432SC}$ $\quad f: \underbrace{\{1,2,3,4,5,6,7\}}_{\text{insieme degli input}} \to \underbrace{\{A,B,C \ldots 0,1,2\}}_{\text{insieme degli output}}$

$1 \mapsto C$
$2 \mapsto J$
$3 \mapsto 4$
$4 \mapsto 3$
$5 \mapsto 2$
$6 \mapsto S$
$7 \mapsto C$

$f(1) = C$
$f(2) = J$

ESERCIZIO

NOTAZIONE

$f: A \to B$

INPUT, OUTPUT: f è una funzione dall'insieme A all'insieme B

Quante sono le funzioni $f: \{1, \ldots, 7\} \to (\text{Lettere} \cup \text{Cifre})$?

36 possibilità per $f(1)$

36 " per $f(2)$

$1 \to A, B, C, \ldots, 0, \ldots, 7$

36^7 funzioni $f: A \to B$

QUANTI INPUT CI SONO (7)

QUANTI OUTPUT CI SONO (36)

In generale se $|A| = m$, $|B| = k$ $\quad |\{f \mid f: A \to B\}| = k^m$

$A = \{a_1 \ldots a_m\}$

$B = \{b_1 \ldots b_k\}$

$\underbrace{\overset{\text{per } a_1}{k} \cdot \overset{\text{per } a_2}{k} \cdot k \ldots \overset{\text{per } a_m}{k}}_{m \text{ volte}} = k^m$

$a_m \to b_1, \ldots, b_k$

FUNZIONE INIETTIVA — se si ottiene lo stesso output, l'input era lo stesso.

$(\forall x, y \in A) \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\equiv$

$(\forall x, y \in A) \quad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

NON CI SONO RIPETIZIONI

$\alpha \Rightarrow \beta$

$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$

Quanti sono le funzioni iniettive $f:\{1,2,3\} \to \{A,B\}$? zero

PRINCIPIO DELLA PICCIONAIA

Quante iniettive $f:\{1,2,3\} \to \{A,B,C,D\}$? $4!$

Viste come Tuple

$\boxed{A|D|C}$ = la funzione

per $f(1)$ 4 poss $\quad 4 \cdot 3 \cdot 2$

$1 \mapsto A$
$2 \mapsto D$
$3 \mapsto C$

15/10/14

$f: A \to B$ iniettiva A = dominio B = codominio

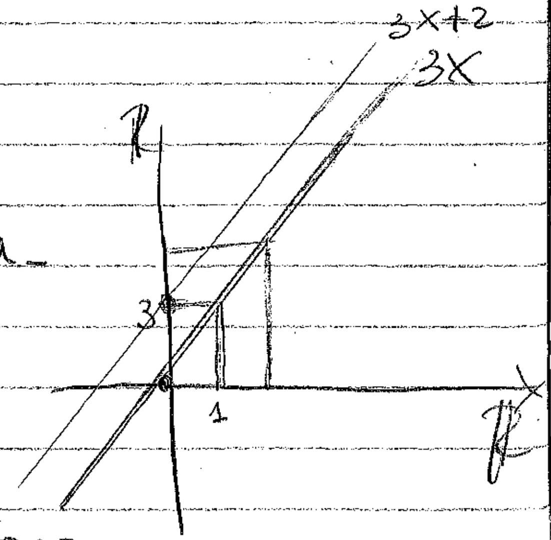
$(\forall x,y \in A)(fx = fy \to x = y)^{(*)}$ $\leftarrow$

$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ sempre anche se f non è iniettiva

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è iniettiva perchè $f(2) = 4 = f(-2)$, ma $2 \neq -2$

Esempio

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x+2$ è iniettiva



Dim

Siano x e $y \in \mathbb{R}$. Suppongo che $f(x) = f(y)$ e cerco di dimostrare che $x = y$. come?

$$fx = fy \Rightarrow 3x+2 = 3y+2$$
$$3x = 3y$$
$$x = y \quad \boxtimes$$

P	⇒	Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

con $fx = x^2$ non funziona $\qquad x \neq y \to fx \neq fy$

$fx = fy$
$x^2 = y^2$
$x = y \lor x = -y$ ...

$3^2 = y^2$, y può essere -3. NON FUNZIONA SEMPRE!

Esistono ∞ più grandi di altri.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\cap|$
$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2 \dots\}$
$\cap|$
+ piccoli di $\mathbb{Q} = \{\frac{3}{4}, \dots\}$
$\cap|$
$\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, \dots\}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$fx = 3x+2 \quad fx = x^2 \quad fx = \sin(x) \quad fx = \mathrm{arctg} \dots$

Una funzione $f: A \to B$ è un insieme di coppie (a,b) con $a \in A$, $b \in B$

$$f \subseteq A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

$\boxed{f(a) = b \Updownarrow (a,b) \in f}$

Per essere una FUNZIONE devo avere che ① $(a,b) \in f \land (a,c) \in f \Rightarrow b = c$

$f(a) = b \land f(a) = c \Rightarrow b = c$

(2) $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(fa = b)$

$\forall_{x,y}(x = y \to fx = fy)$
tutte le f
$\forall xy (fx = fy \to x = y)$
se f è iniettiva

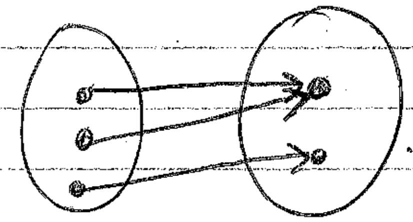
Def f è iniettiva se
$\forall x, y \in A (fx = fy \to x = y)$

Def
$Im(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A \ f(a) = b\}$

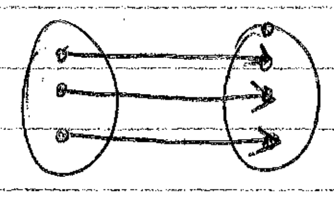
$fx = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad Im(f) = \mathbb{R}^{\geq 0} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

Def $f: A \to B$ è surgettiva se $B = Im(f)$

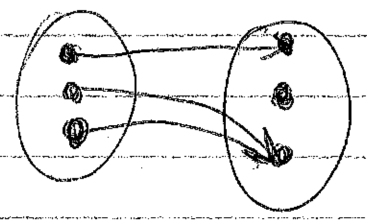
$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f a = b)$



Surgettiva, ma non iniettiva.

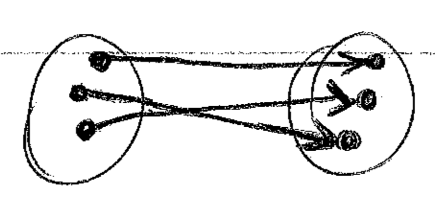


Iniettiva, non surgettiva



Nè iniettiva, nè surgettiva.

Def $f: A \to B$ è biunivoca se
è sia iniettiva che surgettiva.

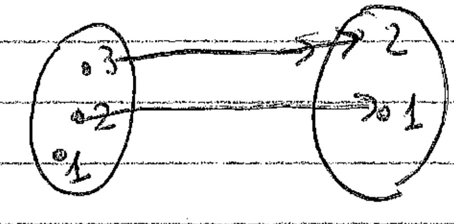


se $f: A \to B$ è biunivoca
$|A| = |B|$

$f^{-1}: B \to A \qquad f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$

Per fare l'inversa deve essere biunivoca.

Def A, B insiemi dico che $|A| = |B|$ se esiste $f: A \to B$ biunivoca.



$x \mapsto \frac{1}{x} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ funzione parziale

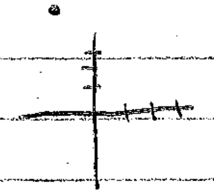
Di solito ci riferiamo a quelle totali.

$(x \mapsto \frac{1}{x}): \mathbb{R} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$

Contiamo le funzioni.

1) Quante funzioni biunivoche $f: A \to B$ esistono $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3\}$?

$f_1 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$



$f_1(1) = 1 \quad 1 \longmapsto 1$

$f_2 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$

$f_3 = \{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$

Ce ne sono $6 = 3!$

Se $|A| = |B|$ è finita ma $f: A \to B$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ surgettiva $\Leftrightarrow$ biunivoca

$|A| = k = |B|$ $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ $B = \{b_1, \dots, b_k\}$

Quante $f: A \to B$ biunivoche?
Ho k scelte per a_1.

$k-1$ — a_2
$k-2$ — a_3
$\vdots$
1 per a_k

Totale
$$k(k-1)(k-2)\dots 1 = k!$$

- - - -

$[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$f: [3] \to [5]$ iniettiva
Quante? 5 scelte per 1
4 — 2
3 — 3

$f: [3] \to [3]$ iniettiva
ce ne sono $3! = 6$

$f: [k] \to [k]$
$k!$ iniettiva

Risposta $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{(5-3)!}$

Quante iniettive $f: [k] \to [n]$?

$$\underbrace{n(n-1)\dots(n-(k-1))}_{k \text{ volte}}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))\overbrace{(n-k)\dots 1}}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Funziona se $k \leq n$,
altrimenti ce ne sono zero.

Dispense 1° sem
+
Polinomi

Funzioni surgettive $f: [3] \to [2]$
Una potrebbe essere $1 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 2$

tutte le $g: [3] \to [2]$ sono $\boxed{2^3}$

Quelle non surgettive: $1, 2, 3 \to 1$; $1, 2, 3 \to 2$
Ce ne sono $\boxed{2}$

Surgettive $2^3 - 2$

- - - -

Quante surgettive $f: [4] \to [3]$?

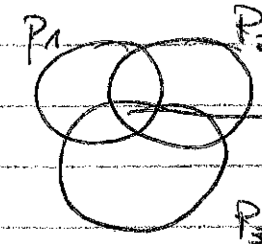
es: $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, $4 \to 3$

$1 \to 2$, $2 \to 2$, $3 \to 3$, $4 \to 3$ $\in P_1$

Chiamiamo
$P_1 = \{f \mid 1 \notin Im(f)\}$
$P_2 = \{f \mid 2 \notin Im(f)\}$
$P_3 = \{f \mid 3 \notin Im(f)\}$

$\{f \mid f: [4] \to [3]$ NON surgettive$\} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$

$$|P_1 \cup P_2 \cup P_3| = |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|$$



qui non c'è niente, non ci può essere una f che non colpisce niente

$|P_1| = |\{f: [4] \to \{2, 3\}\}| = \boxed{2^4}$

$|P_1 \cap P_2| = \{ f:[4] \to \{3\} \} = 1.$

$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - 1 - 1 - 1 = 0$

$|\text{surgettive}| = 3^4 - \underbrace{3 \cdot 2^4 - 3}_{}$

<u>Insieme</u> $\mathcal{P}(A)$ = l'insieme delle parti di A = sottoinsieme

$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{\}\}$

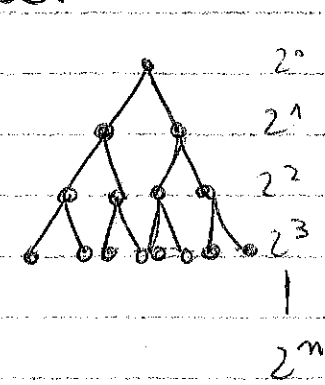
$|\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8 = 2^3$

$|\mathcal{P}([n])| = 2^n$

Quanti sono gli insiemi B tali che $B \subseteq [n] \neq \{1,2,3,\dots,n\}$?

Per "creare" B devo decidere per ciascuno $i \in \{1,2 \dots n\}$ se metterlo in B o no.
Ho 2 scelte per $i=1$ (se lo metto/non lo metto)
Ho 2 scelte per $i=2$
⋮
Ho 2 scelte per $i=n$ $\quad 2^n$ possibilità

Quindi ci sono 2^n possibili B.
cioè $|\mathcal{P}([n])| = 2^n$



<u>2a soluzione</u> Penso B come TARGA.

$B = \{2,4\}$

$\underbrace{|\emptyset|1|\emptyset|1|0|0|0 \ \dots\dots|}_{n}$

Associo a B la sua FUNZIONE CARATTERISTICA.

$f:[n] \to \{0,1\}^n$

La funz. associata a B:

$f_B(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in B \\ 1 & \text{se } i \notin B \end{cases}$

LUNEDÌ RICEVIM.

21/10/14

$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

$\mathcal{P}([n]) = \{A \mid A \subseteq [n]\}$

$|\mathcal{P}([n])| = 2^n$

$\mathcal{P}([3]) = \{A \mid A \subseteq [3]\} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{2\}, \{3\}\}$

<u>Def</u> $\mathcal{P}_k([n]) = \{A \mid A \subseteq [n] \wedge |A| = k\}$

<u>Es</u> $\mathcal{P}_2([3]) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$

$|\mathcal{P}_2([3])| = 3 \leq 2^3$

$\mathcal{P}_k(B) = \{A \mid A \subseteq B \wedge |B| = k\}$

$n=11 \quad k=3 \quad \mathcal{P}_3([11]) \ni \{1,2,3\}$ quindi?

$\ni \{5,6,8\}$

$\{\{1,2,3\}, \{5,6,8\} \dots\} \quad \{5,6,11\}$

Gli insiemi $A \in \mathcal{P}_3([11])$ sono di due tipi

1) Quelli di categoria 11 → Quanti? $|\mathcal{P}_2([10])|$

2) Quelli che non contengono 11 → quanti $|\mathcal{P}_3([10])|$

Per contare $|\mathcal{P}_3([11])| = |\mathcal{P}_2([10])| + |\mathcal{P}_3([11])|$

In generale: $k<n$

$$|\mathcal{P}_k([n])| = |\mathcal{P}_k([n-1])| + |\mathcal{P}_{k-1}([n-1])| \qquad [n] = \{1, 2, \underbrace{\dots}_{k-1}\ n\}$$

$k>0$

$n>0$

quelli che non contengono n

quelli che contengono n

$$[n] = \{\underbrace{1, 2, \dots,}_{k} \cancel{n}\}$$

$C^n_k = |\mathcal{P}_k([n])|$ $\qquad C^n_k = C^{n-1}_{k-1} + C^{n-1}_k$

come i binomiali $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 **6** 4 1

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

CASI BASE

$C^n_0 = 1 = C^n_n$ cardinalità del $\{\emptyset\}$, scatola vuota, vale 1.

$C^n_0 = |\mathcal{P}_0([n])| \qquad \mathcal{P}_0([n]) = \{A \mid A \subseteq [n] \wedge |A| = \emptyset\} = \{\emptyset\}$

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Per induzione su n

$C^n_k = \binom{n}{k}$

$|\mathcal{P}_k([n])|$ ha senso se $k \le n$

"

C^n_k **2 forme** ① $C^n_k = C^{n-1}_{k-1}$ si applica se $\emptyset < k < n$

② $C^n_0 = 1 = C^n_n$ si applica negli altri casi

Stesse formule valgono per i coefficienti binomiali

① $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\quad 0<k<n$

② $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Sia con i coeff. binomiali che con l'altro modo è la stessa cosa, e lo dimostriamo per induzione.

$\boxed{n=0}$ $C^0_0 = 1$ $\binom{0}{0}$

P(n) dice $\forall k \le n\ [C^n_k = \binom{n}{k}]$

$\boxed{n>0}$ 2 sottocasi

ip ind

$P(n-1) \to P(n)$ passo

1° sottocaso $0<k<n$

$C^n_k = C^{n-1}_{k-1} + C^{n-1}_k$

Per Ipotesi Induttiva $= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

2° sottocaso $k=0$ o $k=n$ (estremi)

$C^n_0 = 1 = C^n_n$

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Esercizi

• Quante stringhe binarie ci sono?

2^7 stringhe binarie di lunghezza 7

0110011

• Quante stringhe di lungh. 13 con solamente 2 zeri?

Devo scegliere le posizioni dei 2 zeri
13 posizioni possibili per i 2 zeri

$\binom{13}{2}$ → insieme di 13 di cui scelgo 2 elementi (posizioni)

$P_2([13])$ $13 = \{1, 2, \ldots 6 \ldots 13\}$

posizioni

$|P_2([13])| = \underbrace{13}_{\text{scelgo il } 1°} \cdot \underbrace{12}_{\text{scelgo il } 2°}$ Perché no? Solo per le coppie ordinate. (3,6) ≠ 6,3

$|P_2([13])| = \binom{13}{2} = \frac{13!}{11!\,2!} = \frac{13 \cdot 12}{2}$ $\{3,6\} = \{6,3\}$

• Es Targhe | L | L | C | C | C | L | L |
con almeno una A
Risposta quella senza A sono $25^4 \cdot 10^3$
almeno una A $26^4 \cdot 10^3 - 25^4 10^3$

2ª soluzione (sbagliata)
Supp.
A sia in 1ª posizione | A | | | | | | |
$26^3 \cdot 10^3$
altrettanto con A in 2ª posizione

| A | | | | | | |

| | A | | | | | |

$4 \cdot 26^3 \cdot 10^3$ | | | | | | | A |

ERRORE! | | | | | | A | |

Esattamente una A: $4 \cdot 25^3 \cdot 10^3$
dove la metto

$P_0([n]) = \{A \mid A \subseteq [n] \wedge |A| = 0\} = \{\emptyset\}$

$P_n([n]) = \{A \mid A \subseteq [n] \wedge |A| = n\} = \{\overbrace{\{1, \ldots, n\}}^{A}\} = \{[n]\}$

$|\{[n]\}| = 1$

Es $|\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x + y + z = n\}| = ?$

$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\boxed{n=3}$ (0,0,3)

(0,1,2)

(1,1,1)

(2,1,0)

etc

Il modo giusto di farlo è fare una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA.

$\boxed{n=11}$ $x=2;\ y=2,\ z=7$

$(2,2,7)$ $2+2+7=11$

la vedo come

$\underbrace{11}_{2}0\underbrace{11}_{2}0\underbrace{1111111}_{7}$ IDEA

Per $n=11$ è come contare le stringhe binarie di lunghezza 13 con undici "1" e due "$\emptyset$".

Sono $\binom{13}{2}$.

Es. n arbitrario? Quante (x,y,z) con $x+y+z=n$.

Soluzione: $\binom{n+2}{2}$

$\underbrace{\underbrace{111}_{x}0\underbrace{1111}_{y}0\underbrace{111}_{z}}_{n+2}$

Gli 1 sono $x+y+z=n$

Soluzione 2

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\binom{n+2}{n}$$

•Quante soluzioni di $x+y+\cancel{z}=17$?

$\underbrace{111111}_{x}\emptyset\underbrace{1111111}_{y}\emptyset\underbrace{11111111}_{z}\emptyset\underbrace{111111}_{w}$

PARTIZIONI $\binom{17+3}{3}$

Poker 52 carte = 13×4

$1,2,3,\dots\dots 10\ J\ Q\ K$ ♡ ♢ ♣ ♠

Full $\{\underline{2^{♡}}\ \underline{2^{♢}}\ \underline{2^{♣}}\ \underline{1^{♠}}\ \underline{1^{♢}}\}$

non ordinati

Quanti full?

13 valori per il tris. $13\cdot 4\cdot 12\cdot\binom{4}{2}$

valori per il TRIS — semi del TRIS — valore coppia

$$\text{Probabilità con Full}=\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}}=\frac{13\cdot 4\cdot 12\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$