/

Compitino di MD

19 Dicembre 2014

Cognome e nome: — CORREZIONE —

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere la soluzione negli appositi spazi. Per lo svolgimento si può utilizzare se necessario anche il retro del foglio. **Non verranno valutati i fogli di brutta copia.** Non si possono usare libri, appunti, o dispositivi elettronici e non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. **Scrivere il nome su ciascun foglio.**

Esercizio 1.

Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{array}{l} [i] \\ [ii] \end{array} \begin{cases} 6x \equiv 4 \pmod{8} \\ 7x \equiv 8 \pmod{26}. \end{cases}$$

Risposta: $x \equiv \boxed{42} \bmod \boxed{52}$.

Svolgimento:

Da (i) semplifico un 2: $3x \equiv 2 \pmod 4$

$\Leftrightarrow -x \equiv 2 \Leftrightarrow x \equiv 2\ (4)$ [ia]

Per il teo. cinese, [ii] equivale a

$$\begin{cases} 7x \equiv 8\ (2) \Leftrightarrow x \equiv 0\ (2) & [iia] \\ 7x \equiv 8\ (13) \Leftrightarrow 14x \equiv 16 \Leftrightarrow x \equiv 3\ (13) & [iib] \end{cases}$$

[iia] è superflua perché implicata da [ia]

$$\begin{array}{l} [ia] \\ [iib] \end{array} \begin{cases} x \equiv 2\ (4) \\ x \equiv 3\ (13) \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 42 \pmod{52}$$

per teo. cinese

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Consideriamo la seguente equazione lineare diofantea dipendente dal parametro $a \in \mathbb{Z}$:

$$231 = ax + 99y.$$

Rispondere alle seguente domande barrando la risposta giusta. Sotto ogni risposta scrivere una breve motivazione.

1. Per $a = 45$ l'equazione ha soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione: $ax+by=c$ ha sol. sse $mcd(a,b) \mid c$

   $c = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ $\quad mcd(45, 99) = 9$, no!

2. Per $a = 330$ l'equazione ha soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:
   come sopra
   $mcd(330, 99) = 33$ sì!

3. Se a divide 63 l'equazione ha sempre soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:
   Per $a = 63$ (che è un divisore di 63! O anche $a = 9$)
   $mcd(a, b) = 9$ e non funziona

4. Se a divide 132 l'equazione ha sempre soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:
   Se $a \mid 132$, $\quad mcd(a, 99) \mid mcd(132, 99) = 33$
   Quindi: $mcd(a, 99) \mid 231$!

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3.
Determinare tutte le soluzioni della congruenza $6^x \equiv 7 \bmod (11)$

Risposta: $x \equiv$ 3 mod 10.

Svolgimento:

6^0	6^1	6^2	$\boxed{6^3}$	6^4	6^5	6^6	6^7	6^8	6^9	6^{10}
1	6	$36\equiv 3$	$\boxed{3\cdot 6\equiv 7}$	?	$7\cdot 3\equiv -1$	?	?	?	?	1

questi non possono essere 1 perché $\underset{\shortparallel}{\text{ord}}(6) \mid 10$ (teo. Fermat) e neppure 7 altrimenti avrei ripetizioni prima dell'1

$\to$ (per teo. Fermat)

Le potenze di 6 si ripetono mod 10 (non 11!)

$6^3 \equiv 7$ è una soluzione elementare

Sol. generica: $x \equiv 3 \pmod{10}$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 4.
Sia $\mathbb{Z}_{19} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{18}\}$ l'anello degli interi modulo 19. Consideriamo il polinomio

$$f(x) = (x^4 + \underline{7}x^2 + \underline{1}) \in \mathbb{Z}_{19}[x].$$

Trovare un polinomio $g(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ che moltiplicato per $(\underline{9}x^2 + \underline{1}) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ dia $f(x)$, ovvero:

$$(x^4 + \underline{7}x^2 + \underline{1}) = (\underline{9}x^2 + \underline{1}) \cdot g(x).$$

Scrivere la soluzione negli appositi spazi:

$g(x) =$ $-\underline{2}x^2+\underline{1}$ $\left(= \underline{17}x^2+\underline{1}\right)$

Svolgimento:

Cerco a, b, c tali che

$$(\underline{9}x^2+1)(ax^2+bx+c) = x^4+7x^2+1$$

In particolare, confrontando i coefficienti di x^4 ho

$$\underline{9}a = \underline{1} \Rightarrow \boxed{a = -\underline{2}} \text{ (inverso di 9 mod 19)}$$

Confrontando i termini noti ho

$$c = \underline{1} \Rightarrow \boxed{c = \underline{1}}$$

Confrontando i coefficienti di x ho

$$b = \underline{0} \Rightarrow \boxed{b = \underline{0}}$$

Allora, $g(x) = ax^2+bx+c = -\underline{2}x^2+\underline{1}$

Verifico che funzioni:

$$(\underline{9}x^2+\underline{1})(-\underline{2}x^2+\underline{1}) = -\underline{18}x^4 - \underline{2}x^2 + \underline{9}x^2 + 1 = x^4 + \underline{7}x^2 + \underline{1}$$

Alternativa:

Divisione tra polinomi in $\mathbb{Z}/(19)$:

$$x^4 + 0x^3 + 7x^2 + 0x + 1 : 9x^2 + 1 = \boxed{-2x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & & -2x^2 & & \\ \hline // & // & 9x^2 & +0x & +1 \\ & & 9x^2 & +0x & +1 \\ \hline & & // & // & // \end{array}$$

$\boxed{\text{resto zero}}$

si veda l'altra versione del compito per maggiori dettagli

Compitino di MD
19 Dicembre 2014

Cognome e nome: ...—CORREZIONE—...

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere la soluzione negli appositi spazi. Per lo svolgimento si può utilizzare se necessario anche il retro del foglio. **Non verranno valutati i fogli di brutta copia.** Non si possono usare libri, appunti, o dispositivi elettronici e non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. **Scrivere il nome su ciascun foglio.**

Esercizio 1.
Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{array}{l} [i] \\ [ii] \end{array} \begin{cases} 7x \equiv 12 \pmod{33} \\ 6x \equiv 9 \pmod{27}. \end{cases}$$

Risposta: $x \equiv \boxed{96} \bmod \boxed{99}$.

Svolgimento:

Da [ii] semplifico un 3:

$2x \equiv 3 \pmod 9 \Rightarrow x \equiv 6 \pmod 9$ [ia]

[i] equivale a

$$\begin{cases} 7x \equiv 12\ (3) \longrightarrow x \equiv 0\ (3) & [iia] \\ 7x \equiv 12\ (11) \longrightarrow x \equiv 8\ (11) & [iib] \end{cases}$$

[iia] è implicata da [ia]

$$\begin{array}{l} [ia] \\ [iib] \end{array} \begin{cases} x \equiv 6\ (9) \\ x \equiv 8\ (11) \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 96 \pmod{99}$$

(questi sono entrambi −3)

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Consideriamo la seguente equazione lineare diofantea dipendente dal parametro $a \in \mathbb{Z}$:

$$231 = ax + 99y.$$

Rispondere alle seguente domande barrando la risposta giusta. Sotto ogni risposta scrivere una breve motivazione.

1. Per $a = 66$ l'equazione ha soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:

   $33 = \text{mcd}(66, 99) \mid 231$

2. Per $a = 90$ l'equazione ha soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:

   $9 = \text{mcd}(90, 99) \nmid 231$

3. Se a divide 165 l'equazione ha sempre soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:

   $\text{mcd}(a, 99) \mid \text{mcd}(165, 99) = 33$, e $33 \mid 231$.

4. Se a divide 90 l'equazione ha sempre soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$, $\boxed{\text{Falso}}$.
   Motivazione:

   Per $a = 90$

   $\text{mcd}(90, 99) = 9 \nmid 231$

   (l'abbiamo fatto al punto 2!)

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3.

Determinare tutte le soluzioni della congruenza $6^x \equiv 3 \bmod (11)$

Risposta: $x \equiv \boxed{2} \bmod \boxed{10}$.

Svolgimento:

Tabella come nell'altra versione

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 4.
Sia $\mathbb{Z}_{19} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{18}\}$ l'anello degli interi modulo 19. Consideriamo il polinomio

$$f(x) = (x^4 + \underline{9}x^2 + \underline{5}) \in \mathbb{Z}_{19}[x].$$

Trovare un polinomio $g(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ che moltiplicato per $(\underline{3}x^2 + \underline{1}) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ dia $f(x)$, ovvero:

$$(x^4 + \underline{9}x^2 + \underline{5}) = (\underline{3}x^2 + \underline{1}) \cdot g(x).$$

Scrivere la soluzione negli appositi spazi:

$g(x) =$ ...... $\underline{13}x^2 + \underline{5}$ $\left(= \underline{-6}x^2 + \underline{5} \right)$ ......

Svolgimento:

Cerco a, b, c

$$(\underline{3}x^2+\underline{1})(ax^2+bx+c) = x^4 + \underline{7}x^2 + \underline{5}$$

Confronto coeff. x^4

$$\underline{3}a = \underline{1} \Rightarrow a = \underline{-6}$$

confronto termini noti

$$c = \underline{5}$$

confronto coeff. x

$$b = \underline{0}$$

Verifico

$$(\underline{3}x^2+\underline{1})(\underline{-6}x^2+\underline{5}) = \underline{-18}x^4 \underline{-6}x^2 + \underline{15}x^2 + \underline{5} = x^4 + \underline{9}x^2 + \underline{5}$$

Alternativa: Divisione in $\mathbb{Z}/(19)$

$$x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 0x + 5 : 3x^2 + 1 = -6x^2 + 5$$

$$\begin{array}{cccc}
x^4 & & -6x^2 & \\
\hline
// & // & 15x^2 & +5 \\
 & & 15x^2 & +5 \\
\hline
 & & // & 0
\end{array}$$