24/11/2008

FO(LFP) = FIRST ORDER + LEAST FIXED POINT

ES.: CHIUSURA TRANSITIVA E^* DI $E \subset V$ SODDISFA A UN'EQ. DI P. FISSO:

$E^*(x,y) \iff x=y \vee \exists z[E(x,z) \wedge E^*(z,y)]$ (GRAFO $G=(V,E)$)

NOTAZIONI: $E^* = LFP_{\varphi,R,x,y}$, $\varphi \equiv [x=y \vee \exists z(E(x,z) \wedge R(z,y))]$

$f: \wp(V^2) \to \wp(V^2)$, $f(R) = R'$: $R'(x,y) \iff [x=y \vee \exists z: E(x,z) \wedge R(z,y)]$

E' CRESCENTE, QUINDI: $\emptyset \subset f(\emptyset) \subset \ldots \subset \underbrace{f^r(\emptyset) = f^{r+1}(\emptyset)}_{"E^*}$, $r \le n^2$, $n = |V|$

VOGLIAMO DIMOSTRARE: $FO_{\le}(LFP) = PTIME$

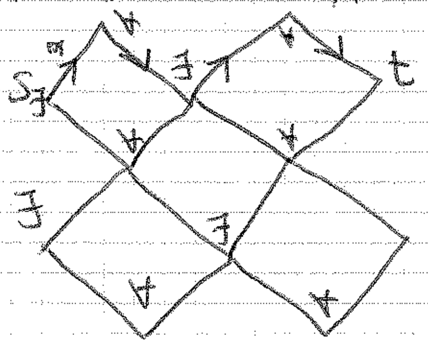
σ LINGUAGGIO I ORDINE, $S \subset \{\sigma\text{-STRUTTURE}\}$; DATA A S-STRUTTURA ORDINATA, SI PUO' CODIFICARE CON UNA STRINGA BINARIA, $bin(A)$:

$Dom(A) = n$ $(\{0,\ldots,n-1\})$; $R \subset n^2$; $R \in 2^{n^2}$ $(c \in n = 2^{\log n})$

ALLORA, AD OGNI $\varphi \in FO(LFP)$ ASSOCIO UNA $T \in PTIME$ (E VICEVERSA) T.C. $A \models \varphi \iff T(bin\, A)\downarrow$.

GRAFO ALTERNANTE

PROBLEMA REACH: $\sigma = (E^2, s, t)$, $G = (V, E, s, t) \in REACH \iff$
$\iff E^*(s,t)$, DOVE $E^* = LFP_{\varphi,R,x,y} \in FO(LFP)$; OSSIA, $REACH =$
$= Mod(\varphi)$, PER QUALCHE $\varphi \in FO(LFP)$. CIO' CATTURA IL CONCETTO DI NON DETERMINISMO. VEDIAMO IL CONCETTO DI ALTERNANZA.



; $REACH_{ALT} \subset \sigma$-STRUTTURE, CON

$\sigma = (E^2, s, t, G^1_\forall, G^1_\exists)$.

DEFINIAMO LA CHIUSURA ALTERNANTE:

$E^{ALT}(x,y)$ E' LA PIU' PICCOLA RELAZIONE T.C.

1) $E^{ALT}(x,x)$;

2) $G_\exists(x) \wedge \exists z$ T.C. $(E(x,z) \wedge E^{ALT}(z,y)) \Rightarrow E^{ALT}(x,y)$;

3) $G_\forall(x) \wedge \forall z(E(x,z) \to E^{ALT}(z,y)) \Rightarrow E^{ALT}(x,y)$

$[\wedge \exists z: E(x,z)])$ (PER NON QUANTIFICARE A VUOTO)

ALLORA, $REACH^{ALT} \Leftrightarrow E^{ALT}(s,t)$. E' DEFINIBILE IN FO(LFP)?

Da un $x \in G_\forall$ accetta se tutti i vicini accettano e esiste almeno un vicino

$E^{ALT}(x,y) \Leftrightarrow x=y \vee [\exists z(E(x,z) \wedge E^{ALT}(z,y)) \wedge G_\forall(x) \rightarrow \forall z [E(x,z) \rightarrow E^{ALT}(z,y)]]$. CONSIDERO ORA LA FORMULA:

$R'(x,y)$: $R' = \varphi(R,x,y) \Leftrightarrow \{x=y \vee [\exists z(E(x,z) \wedge R(z,y)) \wedge$
$\wedge G_\forall(x) \rightarrow \forall z(E(x,z) \rightarrow R(z,y))]\} = \varphi$. DA' UNA FUNZIONE:

$f: P(V^2) \rightarrow P(V^2)$, $f(R) = R'$ MONOTONA $\Rightarrow$ HA PUNTO FISSO. PERCIO':

$LFP_{\varphi,R,x,y} = E^{ALT} \in FO(LFP)$.

AltReach e' in FO(LFP)

OSS.: φ PUO' ANCHE NON ESSERE DEL PRIMO ORDINE: E SI PUO' OTTENERE COME LFP DI QUALCOS'ALTRO, OSSIA SI PUO' ITERARE IL PUNTO FISSO.

ORA DIMOSTRIAMO CHE PTIME = FO(LFP)

AD OGNI T CORRISPONDE φ

OSSIA, $\forall$ ~~MACCHINA~~ T.C. $T(bin\,A) \Leftrightarrow A \models \varphi$ (φ σ-FORMULA CON $\leq$, $+$, $\cdot$, BIT)

$\subseteq$: IDEA: $REACH^{ALT}$ E' PTIME-COMPLETO

($S \leq_p S'$ SE $\exists f \in$ PTIME T.C. $w \in S \Leftrightarrow f(w) \in S'$)

E QUI SI PUO' PORRE $S' = REACH^{ALT}$.

INOLTRE, $REACH^{ALT}$ E' PTIME-COMPLETO PER FO-RIDUZIONI.

$\supseteq$: IDEA: IL LFP SI CALCOLA ITERANDO UNA f CRESCENTE,

$f: P(A^k) \rightarrow P(A^k)$ AL MASSIMO n^k VOLTE, $n = |A|$, QUINDI POLINOMIAL

INOLTRE OSSERVIAMO CHE PTIME = A LOG SPACE, CHE CI SERVE PER DIMOSTRARE REACHE PTIME.

DETTAGLI: FO $\subset$ NL ($\subset$ AL = PTIME); OSSIA, $\forall \varphi \in$ FO,

$\exists T_\varphi \in$ PTIME T.C. $T_\varphi(bin\,A) \Leftrightarrow A \models \varphi$.

CASO BASE: $\sigma = (E^2, s, t)$, $\varphi \equiv E(s,t)$;

IN $A(V, E, s, t)$: $E \subseteq V^2$; ALLORA $bin(A) = \overset{n^2}{bin(E)}\, \overset{\log n}{bin(s)}\, \overset{\log n}{bin(t)}$; DOVE

$bin(E) \in 2^{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$
$\|$
$\langle b_0, \dots, b_{n^2-1} \rangle$ ED $E(a,b) \Leftrightarrow b_{a\cdot n+b} = 1$

DATA $\varphi \in E(s,t)$, VOGLIO UNA $T \in PTIME$ T.C. $\forall A$ σ-STRUTTURA, $A=(V,E,s,t)$
$A \models \varphi \Leftrightarrow T(bin(A))\downarrow$. IN REALTÀ, ADDIRITTURA SI TROVA $T \in LOGSPACE$
$\Updownarrow$ (DATI a,b, MI SPOSTO DI $a\cdot n+b$ E VERIFICO SE IL BIT È 1...)
$E^A(s^A,t^A)$

POI, SE HO UNA COMB. BOOLEANA DI PEZZI ELEMENTARI, COSTRUISCO LE LORO T E POI LE METTO INSIEME. LA COSA COMPLICATA SONO I QUANTIFICATORI:

$\varphi = \exists x\, \vartheta(x)$, $\sigma = \langle E^2, s, t \rangle$ **FO incluso LSpace** [Imm. p46]

VOGLIO T_φ. INNANZITUTTO, SO COSTRUIRE $T_{\vartheta(c)}$ SU UN LINGUAGGIO $\sigma' = \langle E^2, s, t, c \rangle$. LO FACCIO IN LOGSPACE $\subset$ PTIME.

INPUT: $bin(A) = bin(E,s,t)$ ($|A| = n$); CICLO SU TUTTI I VALORI DI $x \in A$, QUINDI x È UNA STRINGA BINARIA LUNGA $\log n$. AD OGNI PASSO CHIAMO $T_{\vartheta(c)}$ SU INPUT $bin(A)^\frown x = bin(B)$ (CON $B \in \sigma'$).

SE $T_{\vartheta(c)}(bin(A)^\frown x)\downarrow$ ALLORA $T_{\exists x \vartheta x}(bin(A))\downarrow$, ALTRIMENTI PASSO A $x+1$ (BINARIO).

IDEM PER $\forall x \vartheta x$. CIÒ DIMOSTRA: FO $\subset$ LOGSPACE $\subset$ PTIME

~~ORA~~ VEDREMO: FO(LFP) $\subset$ PTIME, CIOÈ:

: DATA $\varphi \in FO(LFP)$, TROVARE $T_\varphi \in PTIME$ T.C. $\forall A \in \sigma$,
$A \models \varphi \Leftrightarrow T_\varphi(bin(A))\downarrow$.

ES.: $\sigma = \langle E, s, t \rangle$; PRENDIAMO $\varphi = E(s,t)$, MA COSÌ $\varphi \in FO$.

SE $\varphi = E^*(s,t)$, SAPPIAMO CHE PER PASSARE DA E A E^* DEFINIAMO: SE $E^* = E^n$ (DOVE $f^n(\emptyset) = f^{n+1}(\emptyset)$), $E^n(x,y) \Leftrightarrow$ (VADO DA x A y IN MENO DI n PASSI).

HIERARCHY THEOREM 28/4/2008

$TIME(f(n)) \subsetneq TIME((f(n))^3)$

Hierarchy Thm.

DA QUESTO SI PUÒ DIMOSTRARE: $P \subset EXP$.

MdT A PIÙ STRINGHE: (K, Σ, δ, s)

K = STATI;
Σ = ALFABETO;
$\delta: K \times \Sigma^n \rightarrow (K \cup \{h, \text{"SI"}, \text{"NO"}\}) \times (\Sigma \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\})^n$, s = STATO INIZIALE, h = STATO FINALE
PROGRAMMA

COME SI SIMULA UNA MdT A PIÙ NASTRI CON UNA MdT A UN NASTRO?
[F.C. HENNIE, R.E. STEARNS, "TWO-TAPE SIMULATIONS OF MULTITAPE TURING MACHINES", J. ACM 13.4, PP. 533-546, 1966]

IN REALTÀ IL LIMITE È: $TIME(f(n)) \subsetneq TIME(f(n)\,g(n))$ CON $g(n) > \log(n)$

$M(x) \Rightarrow M': \triangleright x \triangleleft \underbrace{\triangleright \triangleleft \; \triangleright\triangleleft \dots \triangleright \triangleleft}_{K \text{ BLOCCHI}} \triangleleft$ (K = NUM. NASTRI)

INIZIO NASTRO, FINE NASTRO, FINE DESCRIZIONE

CI SONO K BLOCCHI CIASCUNO AL PIÙ $n+2$, $+1$: LA LUNGH. DELLA PRESENTAZIONE È $K(n+2)+1$, AL PIÙ

ALFABETO DI M': $\Sigma' = \Sigma \cup \underline{\Sigma} \cup \{\triangleright, \triangleleft, \triangleleft', \sqcup\}$

QUESTO PORTA A UN TEMPO $T = 4(K(f(n)+2)+1) + K(2K(f(n)+2)+1)$ RISPETTO ALL'INPUT SU UN SINGOLO ~~PASSO~~ PASSO OSSIA $T \cdot f(n)$ ~~SU N NASTRI~~ IN TOTALE.

CIÒ DÀ UN TEMPO $\simeq 2K^2 f^2(n)$, CHE PERÒ SI PUÒ CONSIDERARE $O(f(n))$.

LINEAR SPEED-UP: SE HO UNA MACCHINA M DI TEMPO $f(n)$, SI PUÒ EMULARE CON UNA M' DI TEMPO $\varepsilon f(n) + n + 2 + \lceil \frac{\varepsilon}{6} \rceil n$ $(\forall \varepsilon > 0)$.

(SCRITTURA: $n+2$; SPOSTAMENTI E LETTURE: TUTTO IL RESTO)

IN REALTÀ, CIÒ CHE SI DIMOSTRA È: $TIME(f(n)) \subsetneq TIME((f(2n+1))^3)$.

LEMMA 1: $H_f \notin TIME(f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$.

LEMMA 2: $H_f \in TIME((f(n))^3)$.

H_f È UNA DESC. MODIFICATA DEL LINGUAGGIO HALTING H:

$H = \{(M; x) : M$ TERMINA SU INPUT x ACCETTANDO$\}$.

~~DIM.~~ $D(M) = \neg H(M,M)$; $D(D) \Leftrightarrow \neg H(D,D) \Leftrightarrow \neg D(D)\downarrow$, ASSURDO.

$H_f = \{ (M, x) :$ $M(x)$ TERMINA ACCETTANDO IN TEMPO $f(n)$ $\}$. DA CUI:
$n = |M| + |x|$

H NON E' CALCOLABILE, H_f SI'.

DIM. LEMMA 1: COME SOPRA, SE $D(M) = \neg H_f(M,M)$, ALLORA
$D(D) \Leftrightarrow \neg H_f(D,D) \Leftrightarrow D(D)\downarrow_f$; ASSURDO. $\boxed{\text{OK}}$

DIM. LEMMA 2: COSTRUIAMO UNA MdT UNIVERSALE

INPUT: (M, x) ; OUTPUT: $M(x)$ SE SI ARRESTA IN MENO DI $f(n)$.

LA MACCHINA HA 4 NASTRI:

$\triangleright \ulcorner M \urcorner , \ulcorner x \urcorner$ $\rightarrow$ CODIFICA DI

$\triangleright S, \alpha_1, \ldots, \alpha_K$

$\triangleright \ulcorner M \urcorner$

$\triangleright \sqcup^{f(\ulcorner x \urcorner)}$

A OGNI PASSO SCANDISCE L'INPUT AVANTI E INDIETRO E RIPORTA LE INFORMAZIONI SU x. POI SCANDISCE M IN CERCA DI REGOLE CHE CORRISPONDANO ALLA POSIZIONE INIZIALE E DOPO OGNI PASSO CANCELLA UNO DEI SIMBOLI DELL'ULTIMO ~~NASTRO~~ NASTRO

IN TOTALE, OGNI PASSO SI SIMULA IN: $l_M K_M^2 f(|x|) \leq l_M K_M^2 f(n) \leq$

(l_M = LUNGH. CODIFICA DI UNO STATO)

$\leq (\log(n))^3 f(n) \leq O(f^2(n))$ $\boxed{\text{OK}}$ E QUINDI IL TOTALE DEI PASSI SI SIMULA IN $O(f^3(n))$.

ORA, $TIME(f(n)) \not\ni H_{f(2n+1)}$ MA $H_{f(2n+1)} \in TIME((f(2n+1))^3)$ E QUESTO DA' SUBITO LO HIERARCHY THEOREM. $\boxed{\text{OK}}$

<u>COROLL.</u>: $TIME(2^n) \supseteq P$
$\not\cap$
$TIME((2^{2n+1})^3) = TIME(2^{6n+3}) \subseteq EXP$; DA CUI, $P \subsetneq EXP$.

PER LO SPAZIO, VALE: $SPACE(n) \subset SPACE(f(n) \log f(n))$

PSPACE $\subset$ EXPTIME NON SI SA SE STRETTA.

2/5/2008

TEOR.: PTIME = FO(LFP)

DATA σ SEGNATURA (= LINGUAGGIO DEL 1° ORDINE; = SIMBOLI DI REL. E COSTANTE), UNA σ-STRUTTURA A; SE $N \in$ PTIME-MACCHINA DI TURING; $\exists\, \varphi \in FO(LFP)_\sigma$ T.C. $N(bin(A))\downarrow \iff A \models \varphi$ E VICEVERSA.

DIM.: AVEVAMO DIMOSTRATO CHE FO $\subset$ P (IN REALTÀ, FO $\subset$ LOGSPACE $\subset$ P), OSSIA, DATO σ E DATA φ CHIUSA $\in$ FO, $\exists$ N $\in$ L-TM T.C. $N(bin\,A)\downarrow \iff A \models \varphi$.

ORA DIMOSTRIAMO CHE FO(LFP) $\subset$ P: FISSATA σ, DATA $\varphi \in FO(LFP)_\sigma$, $\exists\, M \in$ P-MT T.C. $\forall$ σ-STRUTTURA A, $A \models \varphi \iff M(bin\,A)\downarrow$.
$M = M_\varphi$ E VERRÀ COSTRUITA PER INDUZIONE SU φ. IL CASO INTERESSANTE È QUANDO $\varphi = LFP_{R,\vec{x},\psi}(\vec{S})$.

ES.: $E^*(x,y) \iff x=y \vee \exists z\,[E(x,z) \wedge E^*(z,y)]$; ESISTE COMUNQUE LA MINIMA RELAZIONE CHE SODDISFA QUESTA CONDIZIONE.
SE $\varphi \equiv [x=y \vee \exists z[E(x,z) \wedge R(z,y)]] = \varphi(R,x,y)$,
$E^* = LFP_{R,x,y,\varphi}$; NON È UNA FORMULA.

FISSATA σ-STRUTTURA A (AD ES. $A = (|A|, E)$) E DATA $R \subset A^2$, HA SENSO CALCOLARE $R' \subset A^2$. $R_0 = \emptyset$, $R_{i+1} = R'_i$; $\exists\, r$ T.C. $R_r = R_{r+1} = LFP_{R,x,y}\,A$ (DOVE $R' = \varphi(R,x,y)$) $r \le n^k$, k = ARITÀ DI R.

FO(LFP) incluso in P

(RIFERIMENTI: FOCL: IMMERMAN PAG. 46; FO(LFP) $\subset$ P: IMMERMAN PAG. 60)

SUPPONIAMO DI AVERE UN LINGUAGGIO CON COSTANTI;
$\varphi = LFP_{R,\vec{x},\varphi}(\vec{t})$; COSTRUIAMO M_φ: $M_\varphi(bin\,A)\downarrow \iff A \models \varphi$.
NEL CASO E^*, ~~$M(bin(E,t_0,t_1))$~~ $A = (|A|, E, t_0, t_1)$;
$bin(A) = bin(E)\ bin(t_0)\ bin(t_1)$; $M(bin\,A)\downarrow \iff A \models LFP_{R,\vec{x},\varphi}(\vec{t}) \iff$
LUNGHEZZE $\rightarrow$ n^2 $\quad \log n \quad \log n$

$\iff E^*(t_0, t_1)$.

SUL NASTRO DI INPUT ABBIAMO $bin(A)$; SUL NASTRO DI LAVORO, ALL'INIZIO ABBIAMO $bin(\emptyset)$; AD OGNI PASSAGGIO ABBIAMO $bin(R)$, $R \subset n^k$, QUINDI $R \in 2^{n^k}$. SU UN ALTRO NASTRO, CALCOLIAMO $bin(R')$, CON $R'(\vec{x}) = \varphi(\vec{R}, \vec{x})$. COME LO CALCOLIAMO? SUPPONIAMO PER SEMPLICITÀ $K=2$ ($R \in 2^{n^2}$), QUINDI $bin(R)_{a \cdot n + b} = 1 \iff R(a,b)$.

ALLORA $R'(x,y) \Leftrightarrow \varphi(R,x,y)$. VOGLIAMO CHE $bin(R')_{a n^m b} \Leftrightarrow R'(a,b)$.

PER INDUZIONE, $\exists T_\varphi$ CON $\varphi \in \sigma'$-FORMULA, $\sigma' = \sigma \cup \{c_0, c_1, R\}$

E SI HA $bin(R')_{a n^m b} = 1 \Leftrightarrow T_\varphi(bin\, R, bin\, a, bin\, b)$. CICLIAMO SU TUTTE LE COPPIE (a,b) (SONO n^2), SCRIVIAMO $bin\, R$, $bin\, a$, $bin\, b$ E CONTROLLIAMO R', ABBIAMO COSÌ UNA FUNZIONE $R \to R'$. CANCELLIAMO R E RINOMINIAMO R' E ITERIAMO FINCHÉ NON TROVIAMO UN PUNTO FISSO. ALLA FINE CONTROLLIAMO SE R VALE PER s_0, s_1 E SI FA ANDANDO A CONTROLLARE ~~TE POSTI~~ SE ~~MEMORIZZATO~~ IL BIT AL POSTO $s_0 n^k + s_1$ È 0 O 1 E ABBIAMO FINITO. $\boxed{OK}$ $\boxed{P \subseteq FO(LFP)}$

ORA DIMOSTRIAMO $\cancel{FO(LFP) \subseteq P}$. SI FA IN DUE PASSAGGI:

$P \leq_{fo} REACH_{ALT} \in FO(LFP)$ E $REACH_{ALT}$ È P-COMPLETO.

SFRUTTIAMO IL FATTO CHE $P = ALOGSPACE = \bigcup_c ASPACE(c \log n)$.

$REACH_{ALT}$: (IMMERMAN PAG. 53):

$G = (V, E^{(2)}, A^{(1)}_{IN}, s, t)$, $A = G_\forall, G_\exists$. $REACH_{ALT} = LFP_{R,x,y,\varphi}$: $\varphi(R,x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y \vee [G_\exists(x) \wedge \exists z(E(x,z) \wedge R(z,y))] \vee [G_\forall(x) \wedge \forall z(E(x,z) \to R(z,y)) \wedge \underbrace{\exists z\, E(x,z)}_{\text{NON SI QUANTIFICA A VUOTO}}]$

QUINDI $REACH_{ALT}(x,y) \Leftrightarrow \varphi(REACH_{ALT}(x,y))$.

OSS.: $REACH_{ALT} \in P$, ANZI, $REACH_{ALT}$ È LINEARE.

[$REACH_{ALT} \in P$: $\exists M \in PTIME$: $M(bin\, G)\downarrow \Leftrightarrow REACH_{ALT}(s,t)$]

ALGORITMO (IMMERMAN PAG. 54): LAVORIAMO CON UNA QUEUE = CODA. INPUT: G.

CODA := $\emptyset$, MARK(t)

INSERT(t)

WHILE CODA $\neq \emptyset$ DO — marco i nodi x : $E_{alt}(x,t)$

{ RIMUOVI IL PRIMO ELEMENTO x DALLA CODA;

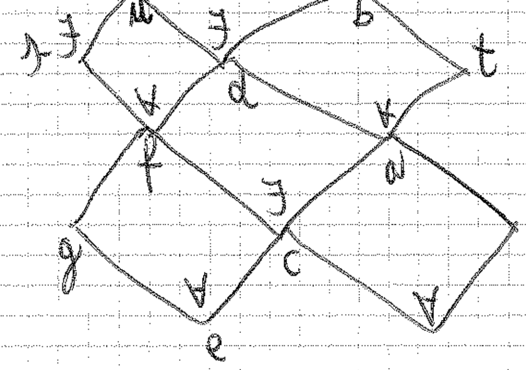
FOR y: $E(y,x)$ DO [E y NON MARCATO]

{ RIMUOVI IL LATO (y,x)

IF $G_\exists(y) \vee y$ NON HA ARCHI USCENTI, THEN {MARK(y), INSERT y}}}

IF s È MARCATO, THEN ACCETTA, (ELSE RIFIUTA). END.

e :



{ a NON SI INSERISCE PERCHE' NON SUPERA IL TEST: b SI. }

b ~~t~~   b VIENE MARCATO

d ~~b~~   (d E' $\exists$, QUINDI SUPERA IL TEST ED E' MARCATO)

u ~~d~~   (u PASSA IL TEST ED E' MARCATO, f NO)

s ~~u~~

~~s~~   (FINE)

I NODI x MARCATI SONO TUTTI E SOLI QUELLI TALI CHE (~~[illegible]~~) REACH (x, t)

b : FACILE;   c : UN PO' MENO, MA SI FA.

Alternating Reach is linear time on a RAM

$$E_a(x,y) \leftrightarrow x = y \vee \exists z \left[E(x,z) \wedge E_a(z,y) \wedge G_\forall(x) \to \forall z \left(E(x,z) \to E_a(z,y) \right) \right]$$

```
Declare Queue Q.
Make Q := Empty ; mark(t) ; insert t in Q
while Q ≠ ∅ do
    { remove first element x from Q ;

        for each unmarked y such that E(y,x) do
        { delete edge (y,x) ;
          if G∃(y) or y has no outgoing edges
          then mark(y) ; insert y in Q  }

    }
if s is marked accept else reject
```

SO(LFP) = EXPTIME

5/5/2008

LINGUAGGIO $L = \{c_1, \dots, c_n, E_1^{\mu_1}, \dots, E_s^{\mu_s}\}$ (COSTANTI)

VARIABILI RELAZIONI R_1^k; HANNO UNA ARITÀ FISSATA E POSSONO ESSERE QUANTIFICATE: $\forall R_1^k(\dots)$.

ES.: DEFINIZIONE SUI NUMERI NATURALI DEL PRINCIPIO D'INDUZIONE:

$$\forall R^1 \{R^1(0) \wedge \forall x (R^1(x) \rightarrow R^1(Sx)) \rightarrow \forall x R^1(x)\}.$$

ES.: REACH $\in$ SO [OSS.: FO(LFP) $\subset$ SO] DA CUI: P $\subseteq$ SO

$L = \{E^2, s, t\}$ (RELAZIONI DEFINENTI IL GRAFO)

$$\forall R^2 [[\forall x,y,z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \wedge \forall x,y\, E(x,y) \rightarrow R(x,y)] \rightarrow R(s,t)] \Leftrightarrow E^*(s,t)$$ (CHIUSURA TRANSITIVA DI E)

POSSIAMO ORA DEFINIRE $LFP_{\varphi,x,R}(\vec{t})$, CON R VARIABILE RELAZIONALE:

$$LFP_{\varphi,x,R}(\vec{t}) \Leftrightarrow \forall S(\varphi(S) = S \wedge S(\vec{t}))$$

OSS.: $SO = PH = \bigcup_{k,l} ATIME\text{-}ALT(n^k, l)$ (l = NUM. FISSATO DI ALTERNANZE DI QUANTIFICATORI).

OSS.:
$$FO(LFP) = P \subseteq PH = SO \subset SO(LFP) = EXPTIME$$

OSS.: $NP = \exists SO$; $NP^{MON} = \exists R^1(SO)$ (I GRAFI SCONNESSI STANNO IN NP^{MON} MA NON IN $co\text{-}NP^{MON}$)

$\neq$

$co\text{-}NP^{MON} = \forall R^1(SO)$.

È APERTO IL PROBLEMA SE NP = co NP; SE FOSSERO DIVERSI, AVREMMO P $\neq$ NP.

COSTRUIAMO ORA L'LFP PER IL 2° ORDINE:

$$LFP^2_{\varphi,x,y,R,G}$$

DOVE $G^l(R_1, R_2, \dots, x_1, x_2, \dots, x_s)$ = RELAZIONE FRA RELAZIONI.

ES.: CONTENIMENTO FRA RELAZIONI:

$$\subseteq(R_1, R_2) \Leftrightarrow \forall \vec{x} (R_1(\vec{x}) \rightarrow R_2(\vec{x}))$$

$\varphi(R_1^k, R_2^k, \varphi) \Leftrightarrow (R_1^k = R_2^k) \vee (\exists R_3^k$ t.c. $\varphi(R_1^k, R_3^k) \wedge G(R_3^k, R_2^k))$,

ES: SIA $\varphi(R_1^k, R_2^k, G) \Leftrightarrow$;

VOGLIAMO TROVARE IL ~~MINIMO~~ G PER CUI CIÒ ACCADE; QUESTO SARÀ $LFP_{\varphi, R_1, R_2, G}$

$\boxed{SO(LFP) \subseteq EXPTIME}$: SE HO UNA φ DEL 2° ORDINE, VOGLIO COSTRUIRE UNA MACCHINA CHE DICA SE È VERA.

φ PUÒ ESSERE:

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\neg\varphi_1$, $\exists x\, \varphi_1(x)$, $\forall x\, \varphi_1(x)$.

SI PROCEDE PER INDUZIONE: SUPPONIAMO DI AVERE M_φ CHE VERIFICA φ IN UN LINGUAGGIO ESTESO $L' = L \cup \{c\}$ IN CUI x È UNA COSTANTE. CICLIAMO SU n VALORI.

SE $\varphi = \exists R_1^k\, \varphi_1(R_1^k)$, ANCHE QUI SUPPONIAMO DI AVERE M_φ IN $L' = \{R^k\} \cup L$ E CICLIAMO SU 2^{n^k} VALORI. LA PARTE DELICATA È LFP.

$\varphi = LFP_{\varphi, \vec{R}, \vec{x}, G}(\vec{P}, \vec{C})$, CON $\vec{P}, \vec{C}$ COSTANTI DI RELAZIONE.

SUPPONIAMO PER COMODITÀ $G = G(R_1^k, \dots, R_l^k)$; $|bin\, G| = 2^{n^k l}$. OGNI VOLTA CHE UNA PARTICOLARE l-UPLA DI RELAZIONI VERIFICA G, METTIAMO "1" NEL BIT CORRISPONDENTE. SE OGNI R_i VIENE RAPPRESENTATA DA UN NUMERO $0 \le n_i < 2^{n^k}$, IL CORRISPONDENTE BIT È

$$n_1 + n_2 2^{n^k} + n_3 2^{2n^k} + \dots + n_l 2^{(l-1)n^k}.$$

LAVORIAMO IN $L' = L \cup \{F^l\}$; CALCOLIAMO $\varphi(\vec{x}, \vec{R}, G)$;

QUANTO CI VUOLE A ENUMERARE TUTTE LE FUNZIONI $\varphi(\vec{x}, \vec{R}, F^l) \to F^{l'}$? PER CALCOLARNE UNA IMPIEGHIAMO 2^{n^k}. PER CALCOLARE LFP, OGNI VOLTA CHE CALCOLIAMO UN'ITERAZIONE LA CONFRONTIAMO CON LA VECCHIA; SE È UGUALE CI FERMIAMO. POICHÉ LA STRINGA È LUNGA 2^{ln^k}, AL MASSIMO IMPIEGHIAMO TEMPO $2^{2^{ln^k}}$. RESTANO LE FORMULE ATOMICHE: PRESE $R_i = R_i(c_1, \dots, c_k)$ CON SOLO COSTANTI, $G(R_1, \dots, R_l)$ SI CALCOLA ANCORA IN EXPTIME COME SOPRA (SI RAPPRESENTANO COME $2^{n^k}, 2^{2n^k}, \dots, 2^{(l-1)n^k}$). QUINDI $M_\varphi \in$ EXPTIME.

SO(LFP) ⊇ EXPTIME SFRUTTIAMO IL FATTO CHE EXPTIME = APSPACE.

SE $M \in ASPACE(n^k)$, USA UN NASTRO LUNGO AL PIÙ n^k, QUINDI LE SUE CONFIGURAZIONI SONO $2^{n^k} \cdot \#STATI \cdot \underbrace{n^k}_{\text{POSIZIONE DELLA TESTINA}} \cong 2^{n^{k+1}}$. AL SECONDO ORDINE

LO SI PUÒ ESPRIMERE COME RELAZIONE: UNO STATO DELLA MACCHINA È UNA RELAZIONE $(k+\cancel{3})$-ARIA. ($k+t$ NON MOLTO GRANDE) VOGLIAMO COSTRUIRE UNA φ CHE CI DICA CHE $C_1 \vdash^M C_2$. C_1 RAPPRESENTA LA POSIZIONE $n_1 + n_2 \cdot n + \dots + n_k \cdot n^{k-1}$.

$C_1(n_1, \dots, n_k, \sigma, q, p, p')$: ~~CON CONTENUTO~~ POSIZIONE DEL NASTRO, SIMBOLO IN QUELLA POSIZIONE, STATO, POSIZIONE DELLE TESTINE SUI NASTRI DI INPUT E DI LAVORO. $\sigma \in \{0,1\}$, $q \in \{0, \dots, \#STATI\}$, $0 \le p, p' \le n^k$.

A QUESTO PUNTO, SCRIVENDO LA RELAZIONE DI PASSAGGIO $\vdash^M$, SAPPIAMO SE SI PUÒ PASSARE DA C_i A C_j, $\forall i, j$:

ALLORA, $\varphi(C_1^{2k}, C_2^{2k}, G) \iff C_1 = C_2 \vee (q_\forall(C_1) \wedge \forall C_3^{2k} (C_1 \vdash^M C_3 \Rightarrow G(C_3, C_2)))$
$\vee (q_\exists(C_1) \wedge \exists C_3^{2k} (C_1 \vdash^M C_3 \wedge G(C_3, C_2)))$.

G COMPARE POSITIVAMENTE $\Rightarrow$ POSSIAMO FARNE L'$LFP_{\varphi, C_1, C_2, G}(C_1', C_2')$.

A QUESTO PUNTO, M ACCETTA $\iff LFP_{\varphi, C_1, C_2, G}(C_0, C_F)$, E SIAMO ARRIVATI

A DIRE CHE $\forall M \, \exists \varphi \, \forall A \; M(bin\, A) \iff A \models \varphi$.

DEFINIZIONE DI $\vdash^M$: $C_1 \vdash^M C_2$ SE $\bigvee$ DI CASI:

○ $\delta: (\underset{\text{INPUT}}{w}, \underset{\text{LAVORO}}{b}, \underset{\text{STATO}}{q}) \rightarrow (q', (SX, DX), b')$ ○ … ALTRI CASI.

…/2008

FINE DIM. $P = FO(LFP)$

TEOR. FAGIN: $SO\exists = NP$

TEOR.: $NP^{MON} \neq CO\text{-}NP^{MON}$

DIM. $P \subseteq FO(LFP)$: 1) – $P = ALOGSPACE = ASPACE(\log n)$;
2) – $REACH_{ALT} \in P$ (IMMERMAN PAG. 54);
3) – $REACH_{ALT} \in FO(LFP)$; (IMMERMAN PAG. 59)
4) – $P \leq_{FO} REACH_{ALT}$. (QUESTO VA FATTO) (IMMERMAN PAG. 51) O QUASI

3): $\varphi(R,x,y) \equiv x = y \vee [G_{\exists}(x) \wedge \exists z [E(x,z) \wedge R(z,y)]]$
$\vee [G_{\forall}(x) \wedge \forall z [E(x,z) \wedge R(z,y)]$
$\wedge \cancel{\vee} \exists z\, E(x,z)]$;

VOGLIAMO LA MINIMA R T.C. $R(x,y) \Leftrightarrow \varphi(R,x,y)$. ALLORA $R = E_{ALT}$.
$R = LFP(\varphi_{R,x,y})$, QUINDI, $\underset{G}{\underset{\shortparallel}{LFP}}_{\varphi,R,x,y}(s,t) \in FO(LFP)$.

4): NELL'IMMERMAN SI DIMOSTRA $NL \leq_{FO} REACH$, CON DIMOSTRAZIONE ESSENZIALMENTE UGUALE.
SI SFRUTTA IL FATTO CHE $P = ALOGSPACE$. SIA $N \in ASPACE(c \cdot \log$
FISSO $\sigma = \langle R_1^{a_1}, \dots, R_r^{a_r}, c_1, \dots, c_s \rangle$; ALLORA VOGLIAMO DIRE CHE
$\forall$ σ-STRUTTURA A, $N(bin\,A)\downarrow \Leftrightarrow I(A) \in REACH_{ALT}$, CON
$I(A) = G(V, G^1_{\forall}, G^1_{\exists}, E^2, s, t)$, PONIAMO
$V = A^{1+a+c}$, DOVE c = COSTANTE CHE COMPARE IN "$c \cdot \log n$",
$a = \max_i \{a_i\}$. ALLORA L'IDEA E' CHE $I(A)$ = GRAFO DELLE CONFIGURAZIONI DI N SU INPUT $bin\,A$ E SICCOME N E' ALT, SARA' UN GRAFO ALTERNANTE. SUPPONIAMO CHE $|A| = n$ E $A = \{0, \dots, n-1\}$
UNA ID (ISTANTANEOUS DESCRIPTION) E' UNA $(1+a+c)$-UPLA
$I = \langle p, r_1, \dots, r_a, w_1, \dots, w_c \rangle \in V$ DOVE:
$\vec{w} = (w_1, \dots, w_c) \in n^c = 2^{c \log n}$ CODIFICA IL CONTENUTO DEL NASTRO DI LAVORO DI N.
$R_i \subset n^a$ E QUINDI $R_i \in 2^{n^a}$ $\forall i$, $\vec{r} \in n^a$ E QUINDI $2^{a \log n}$.

OSS.: NON SI PUO' CODIFICARE L'INPUT, PERCHE' E' TROPPO LUNGO ($n > \log n$): CODIFICHIAMO LA POSIZIONE DELLA TESTINA SULL'INPUT, SE $r = 1$,
POICHE' $R \subset n^a$ $\Rightarrow R \in 2^{n^a}$. IN QUESTO CASO SPECIALE,
$|bin\,R| = n^a$

L'INPUT E' UNA STRINGA $\leq 2^{n^\omega}$, MA LA POSIZIONE E' UN NUMERO DI LUNGHEZZA $n^\omega = 2^{\omega \log n}$. ORA, PONIAMO $p = \langle i,$ STATO, POS. NASTRO LAVORO, $\forall / \exists \rangle$

CON $i \leq r$ INDICA SU QUALE R_i STA LA TESTINA DI INPUT

p CODIFICA: QUALE R_i STIAMO LEGGENDO, LO STATO DI N, LA POSIZIONE DELLA TESTINA SUL NASTRO DI LAVORO (CHE HA LUNGHEZZA LOGARITMICA: $c \log n \leq m$) E SE LO STATO E' $\forall$ O $\exists$.

E SIA LA FUNZIONE DI TRANSIZIONE DI N; $E(ID, ID') \Leftrightarrow ID \vdash_N ID'$

$G_\exists(ID) = G_\exists(\langle p_1, p_2, p_3, p_4, \vec{r}, \vec{w} \rangle) \Leftrightarrow (p_4 = 0)$;

$G_\forall(ID) = G_\forall \qquad \Leftrightarrow (p_4 \neq 0)$.

s = CONFIG. INIZIALE SU INPUT ($bin\ A$): $\vec{p} = \vec{r} = \vec{w} = 0$;

t = CONFIG. FINALE: $\vec{p} = \vec{r} = \vec{w} = MAX$.

OSS.: $E(ID, ID')$ DIPENDE DA N MA NON DA A.

ES.: $\sigma = \langle R^2 \rangle$; $N: \langle q, b, v \rangle \xrightarrow{\delta} q', v', x, y$

b: INPUT 0,1; v: LAVORO 0,1; x: SPOST. INPUT; y: SPOST. LAVORO

$\langle \vec{p}, r_1, r_2, \vec{w} \rangle \qquad \langle \vec{p}', r_1', r_2', \vec{w}' \rangle$

ALLORA, $ID \vdash_\delta ID'$ QUANDO? IL PROBLEMA E': COME SI CONOSCE L'INPUT, NON ESSENDO CODIFICATO?

$bin(A) = bin(R) \in 2^{n^2}$; $|bin(R)| = n^2$; $(bin(R))_{a n + b} = 1 \Leftrightarrow R(a, b)$

ALLORA SI PASSA DA ID A ID' QUANDO δ E' APPLICABILE, CIOE' $(b = 0 \wedge \neg R(r_1, r_2)) \vee$
$\vee (b = 1 \wedge R(r_1, r_2))$. DOVREMMO AVER DIMOSTRATO (MODULO DETTAGLI) CHE: TEOR.: DATA $N \in ASPACE(c \log n)$, DATO

$\sigma = \langle R_1^{a_1}, \dots, R_r^{a_r}, c_1, \dots, c_s \rangle$, PONENDO $K = 1 + a + c$, $\exists$ UNA QUERY K-ARIA I (OSSIA $\exists$ FORMULE $\langle E, G_\forall, G_\exists, \alpha, \omega \rangle = I$, CON $E(ID, ID') = E(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K)$, $\alpha(x_1, \dots, x_K)$, IDEM ω) T.C. DATA A, QUESTE FORMULE DEFINISCONO $I(A) = \langle A^K, E^A, G_\forall^A, G_\exists^A, \alpha^A, \omega^A \rangle$ E $I(A) \in REACH_{ALT} \Leftrightarrow N(bin(A))\downarrow$. $\boxed{OK}$

SI DA' PER ACQUISITO CHE $A \mapsto I(A)$ E' POLINOMIALE (SI BASA SU $FO \subseteq L \subseteq P$). QUINDI, $\underline{P = FO(LFP)}$. $\boxed{OK}$

29/10/14

$$ID = \langle P_1, P_2, P_3, P_4, r_1, \dots, r_a, \overbrace{w_1, \dots, w_c}^{\in n^c = 2^{c\log(n)}} \rangle$$

$$E(ID, ID') \equiv \bigvee_R C_R(ID, ID')$$

Suppose R is $\langle \overset{\exists}{q}, b, v \rangle \mapsto \langle \overset{\forall}{q'}, v', s, s' \rangle$

b simbolo letto sul nastro di input $\in \{0,1\}$
v simbolo letto sul nastro di lavoro $\in$
s spostamento sul nastro di input $\in \{\leftarrow, \cdot, \rightarrow\} = \{0,1,2\}$
s' spostamento sul nastro di lavoro $\in \{\leftarrow, \cdot, \rightarrow\} = \{0,1,2\}$
q, q' stati

$P_1 = i$ = indice del simbolo di relazione $\in \{1, \dots, r\}$
$P_2 = q$ = stato
$P_3 = p$ = posizione sul nastro di lavoro $\in \{0, \dots, n-1\}$
$P_4 = b = \forall / \exists \in \{0,1\}$

if $\begin{cases} b=0, \\ v=1 \\ s=\leftarrow \\ s'=\rightarrow \end{cases}$ $\Big|$ $C_R(ID, ID') \equiv (P_1 = i \wedge P_2 = q \wedge \neg R_i(r_1, \dots, r_{a_i}) \wedge$

$$BIT((w_1 + n w_2 + \dots + n^{c-1} w_c), P_3) \rightarrow$$

$$P_3' = P_3 + 1 \wedge$$

COR. FAGIN: $NP = SO\exists$, IN PARTICOLARE, $P \subseteq (NP) \subseteq SO\exists$.

ESEMPI: $SAT \in SO\exists$; $3\text{-}COL \in SO\exists$ }:

$\sigma = \langle E^{(2)} \rangle$ LINGUAGGIO DEI GRAFI; VOGLIAMO $\varphi \in SO\exists$ T.C.

$A \models \varphi \Leftrightarrow A \grave{E}$ 3-COL.

$\varphi = \exists R^1, Y^1, B^1 : \forall x$

$[Rx \vee Yx \vee Bx] \wedge \forall y \, [E(x,y) \rightarrow \neg(Rx \wedge Ry) \wedge$

$\wedge \neg(Yx \wedge Yy) \wedge \neg(Bx \wedge By)]$. OSS.: MANCA L'IPOTESI CHE OGNI VERTICE ABBIA UN UNICO COLORE, MA CIÒ NON ALTERA LA SITUAZIONE.

PER QUANTO RIGUARDA SAT: SUPPONIAMO DI AVERE FORME NORMALI CONGIUNTIVE E CHE IL NUM. DI VARIABILI SIA UGUALE AL NUM. DELLE CLAUSOLE.

$A = (n, P^2, N^2)$ DOVE $P(a,b)$ = LA VAR. b COMPARE POSITIVAMENTE NELLA CLAUSOLA a; $N(a,b)$ NEGATIVAMENTE.

$A \in SAT \Leftrightarrow A \models \exists S^{(1)} [\forall x \exists y ((P(x,y) \wedge S(y)) \vee (N(x,y) \wedge \neg S(y)))]$.

(OSSIA: $A \models \varphi$, $\varphi \in SO\exists$) (x = CLAUSOLA, y = VARIABILE)

CLIQUE: $(G,K) \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow$ G HA UN SOTTOGRAFO COMPLETO DI CARD. K. (ESERCIZIO: CLIQUE $\in SO\exists$). $G = (V,E)$.

OSSIA: $\exists$ PERMUTAZIONE T.C. I PRIMI K VERTICI SONO UNA CLIQUE.

$\exists f$ (MIGR. f ~~[illegible]~~) $\wedge \, \forall i,j < K \; E(f(i), f(j))$.

[illegible]

$P = FO(LFP)$
$\cap$
$NP = SO\text{-}\exists$

dim. diretta che Reach e' ESO

COROLL.: REACH $\in \exists$-SO

DIM.: E' FACILE VEDERE CHE REACH $\in \forall$-SO:

SE E^* = CH. TRANS. DI $E \Rightarrow E^*(s,t) \Leftrightarrow \underline{\underline{\forall}} R \supseteq E$ TRANS. $R(s,t)$;

CON L'$\exists$, SI PUÒ DIRE: (POSTO $G = (V, E, s, t)$)

$E^*(a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists R^2, S^1$ [R ORDINE LINEARE SU $S \wedge S(a) \wedge S(b) \wedge \forall x ($
$(Sx \rightarrow E(x, succ^R(x)))]$ DOVE SUCC E':

$y = succ^R(x) \Leftrightarrow R(x,y) \wedge \forall z \neg (R(x,z) \wedge R(z,y))$. $\boxed{OK}$

PROBLEMA APERTO: $\exists SO = \forall SO$? SE $P = NP$, SAREBBE VERO
(E' EQUIVALENTE A $NP = CO\text{-}NP$).
E' PERÒ VERA: $\exists SO^{MON} \neq \forall SO^{MON}$.

LA DIMOSTRAZIONE NON FUNZIONA PER GRAFI INFINITI.

ESO incuso in NP

TEOR. FAGIN: $\exists$-SO = NP (IMMERMAN PAG. 115).

DIM.: LA PARTE FACILE E' $\exists$-SO $\subset$ NP. SFRUTTIAMO IL FATTO GIÀ NOTO
CHE FO $\subset$ LOGSPACE $\subset$ P.

SIA $\Phi = \exists R_1^{r_1} \dots R_k^{r_k} \psi \in \exists$-SO IN $\sigma = (S_1, \dots, S_\ell, c_1, \dots, c_s)$

DEVO COSTRUIRE UNA MdT $N \in NTIME(p(n))$ T.C.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow$ POLINOMIO

$\forall A$ σ-STRUTTURA, $N(bin(A))\downarrow \Leftrightarrow A \models \Phi$.

SIA CARD$(A) = n$; N NON DET. SCRIVE K STRINGHE BINARIE DI
LUNGHEZZA $n^{r_1}, \dots, n^{r_k}$, CIOÈ $bin(R_1), \dots, bin(R_k)$.

POI SCRIVENDO CONSECUTIVAMENTE $bin(A)\, bin(R_1) \dots bin(R_k) = bin(B)$
DOVE $B = (A, R_1, \dots, R_k)$ E' UNA σ'-STRUTTURA, CON
$\sigma' = \sigma \cup \{R_1, \dots, R_k\}$. QUESTA STRUTTURA LA DÀ IN PASTO AD UNA
MACCHINA LOGSPACE. BISOGNA ORA VERIFICARE SE $B \models \psi$, SE SÌ ACCETTA,
SE NO, RIFIUTA RISPETTO A QUELLA SUCC. NON DETERMINISTICA.

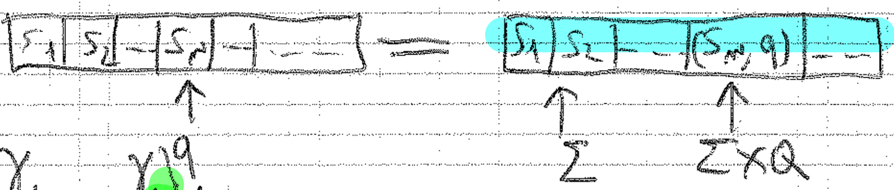
CHIARAMENTE, $A \models \Phi \Leftrightarrow \exists B$ SIFFATTO CHE VERIFICA $\psi \Leftrightarrow$ QUALCHE
COMPUTAZIONE NON DETERMINISTICA LE SCRIVE.

NP $\subseteq \exists$-SO; SIA $N \in$ NTIME$(n^k - 1)$; VOGLIAMO $\Phi \in \exists$-SO T.C. $\forall A$ σ-STRUTTURA $N(\mathrm{bin}(A))\downarrow \iff A \models \Phi$.

NP incluso ESO

SARÀ $\Phi = \exists$ (CONFIGURAZIONE ACCETTANTE).

UTILIZZIAMO UN TRUCCO:



SIA $\Gamma = \Sigma \cup (\Sigma \times Q) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$.

$\Phi_N = \left(\exists C_1^{2k} \dots C_g^{2k} \Delta^{k}\right) \varphi$. CI SONO $g+1$ QUANTIFICATORI $\exists$.

~~[illegible]~~ $(C_1, \dots, C_g, \Delta)$ CODIFICA UNA COMPUTAZIONE NEL MODO SEGUENTE: $C_i(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k) \iff$ LA CELLA $s_1 + s_2 n + \dots + s_k n^{k-1}$ AL TEMPO $t_1 + t_2 n + \dots + t_k n^{k-1} = \vec{t}$ CONTIENE IL SIMBOLO γ_i. SUPPONIAMO ORA CHE N FACCIA AL PIÙ SCELTE BINARIE; ALLORA, $\Delta(t_1, \dots, t_k) \iff$ AL TEMPO ~~[illegible]~~ $\vec{t}$ HO SCELTO "0".

CALCOLO DI φ: φ ESPRIME IL FATTO CHE $(\vec{C}, \Delta)$ È UNA N-COMPUTAZIONE LECITA.

$\sigma = (E^{(2)}, R^{(1)})$, $A = (n, E^A, R^A)$; $\mathrm{bin}(A) = \mathrm{bin}(E)\,\mathrm{bin}(R)$ CON $E \subseteq n^2$ (OSSIA $E \in 2^{n^2}$); $(\mathrm{bin}\,E)_{a n + b} = 1 \iff E(a, b)$.

φ DICE:

- L'INPUT È CORRETTAMENTE CODIFICATO, OSSIA: AL TEMPO "0" SUL NASTRO DI INPUT C'È LA STRINGA CORRETTA.

ES.: $E(2,3)\, R(5) \Rightarrow C_1(2, 3, 0, \vec{0}) \land C_1(\underbrace{5, 0, 1}_{\text{celle } n^2+5}, \vec{0})$, OSSIA IN POS. $2 + 3n$ C'È SCRITTO "1", IDEM IN POS. 5 DI ~~[illegible]~~ $\mathrm{bin}(R)$ $(n^2 + 5)$.

IN GENERALE, $\forall a, b, c$, $E(a, b)\, R(c) \Rightarrow C_1(a, b, 0, \vec{0}) \land C_1(c, 0, 1, \vec{0})$.

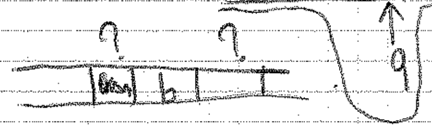
- $(C_1, \dots, C_k, \Delta)$ È UNA COMPUTAZIONE CORRETTA.

$\langle a_{-1}, a_0, a_1, \delta \rangle \xrightarrow{N} b$, CON $a_i, b \in \Gamma$, $\delta \in \{0, 1\}$ SIGNIFICA:

SE N SI TROVA IN

, FACENDO LA SCELTA NON DET. δ,

ANDRÀ IN



ALTRIMENTI DETTO: $\forall t \forall s$,

$$\bigwedge_{\langle a_{-1}, a_0, a_1, \delta\rangle \xrightarrow{N} b} \left(\neg^{\delta} \Delta(\vec{t}) \lor \neg C_{a_{-1}}(\vec{s} - 1, \vec{t}) \lor \neg C_{a_0}(\vec{s}, \vec{t}) \lor \neg C_{a_1}(\vec{s} + 1, \vec{t}) \lor C_b(\vec{s}, \vec{t} + 1)\right),$$

DOVE:

$\neg^{\delta} = \begin{cases} \neg \text{ SE } \delta = 0 \\ \text{NON ESISTE SE } \delta = 1 \end{cases}$ E $\vec{S}-1$ = "SPAZIO PRECEDENTE A $\vec{S}$" $\neg^0 P = \neg P$
$\neg^1 P = P$

POI: $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$ È EQUIVALENTE A $(A \wedge B \wedge C) \to D$, QUINDI LA SCRITTURA DICE CHE b È IMPLICATO DA a_{-1}, a_0, a_1. STESSA COSA CON Δ: UNA VOLTA SCELTO δ, LA SCELTA È DETERMINISTICA.

- L'OUTPUT È ACCETTANTE: $C_{\langle q_{FINALE}, 1 \rangle}(\vec{0}, \overrightarrow{MAX})$ (NELLO STATO FINALE C'È IL SIMBOLO DI ACCETTAZIONE).

A QUESTO PUNTO, TUTTO FUNZIONA: SE $\Phi = \exists C_1, \dots, C_g \Delta \psi$, $\forall A$, $\forall C_1^A, \dots, C_g^A, \Delta$ SU A, $(C_1, \dots, C_g, \Delta) \models \psi \iff$ $(C_1, \dots, C_g, \Delta)$ CODIFICA UNA COMPUTAZIONE ~~ACCETTANTE~~ DI $N(bin(A))$.

$\boxed{OK}$

COROLL.: $P \subset \exists SO\text{-HORN}$, DOVE "HORN" È UNA DISGIUNZIONE DI PEZZI DI CUI AL MASSIMO UNO NON NEGATO. (HORN: $A \wedge B \wedge C \to D$; NON-HORN: $A \wedge B \wedge C \to D \vee E$)

OSS.: $\exists SO$ È CHIUSO PER QUANTIFICAZIONI DEL I ORDINE:

$\forall x \exists R \varphi$ SI PUÒ ROVESCIARE FACENDO $\exists(SO)$.

INOLTRE, $NP \subset (\exists \vec{R} \forall x \wedge (\text{COSE SENZA QUANTIFICATORI}))$.

ESERC.: $\forall x \exists R^{(2)} \varphi(R, x)$; RISCRIVERLA COL QUANTIFICATORE $\exists$ ALL'ESTERNO.

ASSIOMA DELLA SCELTA: $(\forall x \exists y\, R(x,y)) \iff \exists f \forall x\, R(x, f(x))$.

SI INTRODUCE UNA Q^3 T.C. $Q(x,y,z) = R_x(y,z)$

QUINDI, $\exists Q \forall x\, \varphi(Q(x,\cdot,\cdot), x)$.

TEOREMA DI TRAKHTENBROT 12/5/20..

FINSAT NON E' RICORSIVO.

FINSAT non e' decidibile

CON LA STESSA TECNICA, SI PUÒ DIMOSTRARE: SAT E' NP-COMPLETO.

MdT: S (STATI); A (ALFABETO FINITO); $S \ni \bar{S}$ (INIZIALE); $* \notin A$ (SPAZIO VUOTO); $A_* = A \cup \{*\}$;

MdT δ: $S \times A_* \dashrightarrow S \times A_* \times \{-1; 0; 1\}$ (F. PARZIALE)

$f: \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N}$ E' <u>CALCOLATA</u> DA δ SE $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ VIENE ACCETTATO DA δ COME INPUT, IL CALCOLO HA TERMINE E IN OUTPUT C'E' $f(\vec{n})$.

ESSENDO S, A_* FINITI, SI PUÒ PENSARE $S, A_* \subset \mathbb{N}$ E QUINDI ASSOCIARE A δ UN NATURALE: $\varphi^{(k)}_{\#\delta}$. IL TEOR. DICE: $U(x,y) = \varphi^{(1)}_x(y)$ E' CALCOLABILE.

OSSIA: $\exists U$ MdT UNIVERSALE CHE PRENDE UNA MdT x E UN INPUT y E CALCOLA $\varphi^{(1)}_x(y)$.

DEF.: $A \subset \mathbb{N}$ E' DECIDIBILE (O RICORSIVO) SE $\chi_A: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ E' CALCOLABILE; SEMIDECIDIBILE (RIC. ENUMERABILE) SE A E' IL DOMINIO DI $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ PARZIALE CALCOLABILE.

TEOR.: A DECIDIBILE $\iff$ A E $\mathbb{N} \setminus A$ SEMIDECIDIBILI (POST).

$K = \{e \in \mathbb{N} : \varphi^{(1)}_e(e)\downarrow\}$ E' RIC. ENUM. MA NON RICORSIVO; INFATTI $K = \operatorname{dom} \tilde{U}$, $\tilde{U}(x) = U(x,x)$ E $\mathbb{N} \setminus K$ NON E' SEMIDECIDIBILE, PERCHÉ SE ESISTESSE $\varphi: \mathbb{N} \setminus K = \operatorname{dom} \varphi_e$, $e \in \mathbb{N} \setminus K \iff \varphi_e(e)\downarrow \iff e \in K$.

SI HA: $RE \supsetneq RIC \subsetneq CO\text{-}RE$

DEF.: $A \leq_m B$ SE $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CALC. T.C. $f^{-1}(B) = A$;

$A \leq_m B$: B RIC. $\Rightarrow$ A RIC; B RE $\Rightarrow$ A RE; $A \leq_m B \iff {}^cA \leq_m {}^cB$.

OSS.: $A \not\leq_m {}^cA$.

A RE $\Rightarrow$ $A = \operatorname{dom} \varphi^{(1)}_e$; $x \in A \iff \varphi^{(1)}_e(x)\downarrow \iff \varphi_{s(x)}(s(x))\downarrow \iff s(x) \in K$. COSTRUIAMO $\varphi^{(1)}_{s(x)}(x) = f(x,y) = \varphi^{(1)}_e(x)$. QUINDI K E' RE-COMPLETO.

OSS.: TRAKHTENBROT $\iff$ $K \leq_m$ FINSAT.

DIM: $M_\delta(M_\delta)\downarrow \iff \varphi_\delta \in$ FINSAT, E' EQUIVALENTE ALL'ENUNCIATO DEL TEOREMA

SIA $L = \{<^{(2)}, Q_s^{(1)}, P^{(2)}, M_\omega^{(2)}\}$; GLI ASSIOMI SONO:

$A_{x_<}$: E' UN ORDINE STRETTO TOTALE, Ax_Q: $\bigwedge_{s\in S}\left(Q_s(x)\to \bigwedge_{s'\in S\setminus\{s\}} \neg Q_{s'}(x)\right)$

DOVE $Q_s(x)$ = AL TEMPO x C'E' LO STATO S;

$Q(x) = \bigvee_{s\in S} Q_s(x)$ (x E' UN ISTANTE DI TEMPO);

INOLTRE, $(Q(x)\wedge Q(y)\wedge x<z<y)\to Q(z)$.

$P(x,y)$: AL TEMPO x LA TESTINA E' IN POSIZIONE y;

A_{x_P}: $P(x,y)\to Q(x)$, $Q(x)\to \exists y(P(x,y)\wedge \forall z(P(x,z)\to z=y))$.

$M_\omega(x,y)$: AL TEMPO x IN POS. y C'E' ω; $M_*(x,y) = \bigwedge_{\omega\in A}\neg M_\omega(x,y)$.

A_{x_M}: $\bigvee_{\omega\in A} M_\omega(x,y)\to Q(x)$; $\bigwedge_{\omega\in A}\left(M_\omega(x,y)\to\bigwedge_{b\in A\setminus\{\omega\}}\neg M_b(x,y)\right)$.

DEFINIAMO ORA UNA PRECOMPUTAZIONE DI δ:

$$PRE_\delta: \bigwedge_{(s,\omega,s',\omega',d)\in\delta}\Big(C(x,y)\wedge P(x,z)\wedge P(y,w)\wedge Q_s(x)\wedge M_\omega(x,z) \to \big(M_{\omega'}(y,z)\wedge$$

$$\wedge Q_{s'}(y)\wedge C_d(z,w)\wedge \big(v\neq z\Rightarrow\bigwedge_{b\in A_*}(M_b(x,v)\to M_b(y,v))\big)\big)\Big),$$

DOVE: $C(x,y) = x<y \wedge \neg(\exists z: x<z<y)$;

$$C_d(x,y) = \begin{cases} C(x,y) & \text{SE } d=1 \\ x=y & \text{SE } d=0 \\ C(y,x) & \text{SE } d=-1 \end{cases}$$

DEFINIAMO ORA: $min_Q(x)\equiv Q(x)\wedge\forall y(y<x\to\neg Q(y))$;

max_Q = (IDEM); ALLORA:

$min_Q(x)\to Q_{\bar{s}}(x)$;

$$\bigwedge_{(s,\omega)\in dom\,\delta}\neg(max_Q(x)\wedge Q_s(x)\wedge P(x,y)\wedge M_\omega(x,y))$$

INOLTRE, SE $STR_t(x)$ = AL TEMPO x C'E' LA STRINGA t, SI HA:

$min_Q(x)\to STR_t(x)$; $MAX_Q(x)\to BINSTR(x)$ (DOVE BINSTR E' UN ALTRO

ASSIOMA DA DEFINIRE). QUINDI ABBIAMO OTTENUTO UN MODELLO FINITO T.C.

SE TERMINA $\iff$ [illegible]

DIM. SAT È NP-COMPLETO: L LINGUAGGIO, C COSTANTI (FINITO); TRASFORMIAMO I QUANTIFICATORI IN $\bigvee$ E $\bigwedge$.

FUNZIONE L-FORMULE $\longrightarrow$ LUC-FORMULE T.C.:

$$\varphi \mapsto \varphi^*$$

$\varphi^* = \varphi$ SE φ È ATOMICO; $(\neg\varphi)^* = \neg(\varphi^*)$;

$(\forall x\, \varphi(x))^* = \bigwedge_{c \in C} (\varphi(c))^*$; $(\exists x\, \varphi(x))^* = \bigvee_{c \in C} (\varphi(c))^*$. INOLTRE,

$\forall x \left(\bigvee_{c \in C} x = c\right) \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi^*$.

ALTRA FUNZIONE: LUC-FORMULE SENZA QUANTIFICATORI $\longrightarrow$ FORMULE PROPOSIZIONALI T.C.

$R^{(k)}(c_1, \dots, c_k) \mapsto X_{R, c_1, \dots, c_k}$; "$c_1 = c_2$" $\mapsto \begin{cases} \text{TAUTOLOGIA SE } c_1 = c_2 \\ \text{CONTRADDIZIONE SE } c_1 \neq c_2 \end{cases}$

L-ENUNCIATI $\Rightarrow$ FORMULE PROP. T.C. φ HA UN MODELLO DI CARD. $|C| \Leftrightarrow$

$$\varphi \mapsto \varphi^c$$

$\Leftrightarrow \varphi$ HA UN MODELLO PROPOSIZIONALE.

<u>ES.</u>: $\forall x \forall y\, R(x,y) \longrightarrow (X_{\cancel{R},0,0} \vee X_{0,1}) \wedge (X_{1,0} \vee X_{1,1})$.
$C = \{0, 1\}$;

SIA ORA $W \subseteq \mathbb{N}$ NP, OSSIA, $\exists\, \delta$ MdT E POLINOMIO P T.C. $\forall n$

$n \in W \Leftrightarrow (\exists s)(|s| < p(|n|)) \wedge \varphi^{(2)}_\delta(n, s)\downarrow_{\leq P(|n|)} = 1$.

~~[illegible]~~ : DATA $\forall$ COMP$_\delta$ (QUELLA DEFINITA NELLA DIM. PRECEDENTE, ESTESA A COPPIE (δ, INPUT)) : TRASFORMIAMO L'INPUT IN UNA FORMULA PROP.

$n \mapsto (\text{COMP}_\delta \wedge \text{INPUT}(n, \text{BINARIA}) \wedge \text{OUTPUT}_1)^{C_n}$ CON $|C_n| = P(|n|)$.

$\boxed{\text{OK}}$

<u>OSS.</u>: SI DIMOSTRA CHE ANCHE NEL LINGUAGGIO DEI GRAFI FINSAT È INDECIDIBILE.

15/5/2008

ABBIAMO VISTO: $NP = \exists SO$

QUINDI: $co\text{-}NP = \forall SO$

ES.: GRAFI 3-COLORABILI (V, E) = MODELLI $\left(\begin{array}{c}\exists A^1, B^1, C^1 \\ ECC.\end{array}\right)$. E

NOTIAMO CHE $P = NP \Rightarrow NP = co\text{-}NP$, DA CUI, $NP \neq co\text{-}NP \Rightarrow P \neq NP$.

DIMOSTREREMO CHE $NP^{MON} \neq co\text{-}NP^{MON}$, DOVE

$NP^{MON} = (\exists^M \text{PREDICATI UNARI})\ FO$.

ES.: {GRAFI SCONNESSI} SI PUÒ VEDERE COME MODELLI $(\exists A^1, B^1:$

$(\forall x\, Ax \underset{\uparrow}{\vee} Bx)(\exists x Ax \wedge \exists x Bx)(\forall x y\, Ax \wedge By \rightarrow \neg E(x,y)))$; STA IN NP^{MON}

XOR

PER CERTO $P = co\text{-}NP$ E $P \subset NP \Rightarrow P \subset (NP \cap co\text{-}NP)$.

INVECE, $P \not\subset NP^{MON} \cap co\text{-}NP^{MON}$.

Grafo connesso e' ESO ma non monadico

$\{\text{GRAFI CONNESSI}\} \in FO(LFP) = P \subset NP\ (\forall x, y, E^*(x,y))$; SICCOME

(FAGIN) $NP = \exists SO$, SI PUÒ ESPRIMERE COME $\exists \ldots$.

UN GRAFO E' CONNESSO SE ESISTE UNO SPANNING TREE CHE COPRE TUTTI I VERTICI, OSSIA UN ORDINE PARZIALE:

$\exists R^{(2)}$ ORD. PARZ. STRETTO: CON UNICO MINIMO $\forall x y\, R(x,y) \wedge \neg \exists z (R(x,z) \wedge R(z,x)) \rightarrow$

$\rightarrow E(x,y))$ ~~...~~. funziona per grafi finiti.

GIOCHI DI EHRENFEUCHT-FRAISSÉ

TEOR.: $A \equiv_m B$ $(\overset{DEF}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in FO$, $\text{RANGO}(\varphi) \leq m$, $A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi) \Leftrightarrow$

FISSATO UN VOCABOLARIO τ

$\Leftrightarrow A \sim_m B$ (CIOE' IL GIOCATORE "$\exists$" VINCE IL GIOCO A m MOSSE).

COME SI DIMOSTRA CHE {GRAFI CONNESSI} $\notin \exists SO^{MON}$?

PER ASSURDO, SIA $\text{Mod}(\exists P_1^1, \ldots, P_n^1\, \varphi) = \{\text{GRAFI CONNESSI}\}$, DOVE

$\varphi \in FO$; PER UN TEOREMA, SI POSSONO PORTARE ALL'INIZIO TUTTI I QUANTIFICATORI DEL 2° ORDINE. COSTRUIAMO 2 STRUTTURE A, B IN $\tau' = \{E^{(2)}, P_1, \ldots, P_n\}$

PENSABILI COME GRAFI COLORATI CON 2^n COLORI. SIA $m = \text{RANGO}(\varphi)$;

L'IDEA E' TROVARE A CONNESSO, B SCONNESSO MA $A \equiv_m B$.

INFATTI: $A = (A, E^A, P_1^A, \ldots, P_n^A)$, $B = (B, E^B, P_1^B, \ldots, P_n^B)$;

(A, E^A) CONNESSO E $(A, E^A) \models \exists P_1, \ldots, P_n, \varphi$; SCELGO $P_i^A \subset A$:

$(A, E^A, P_1^A, \ldots, P_n^A) \models \varphi$; COSTRUIAMO UNA NUOVA STRUTTURA

$(B, E^B, P_1^B, \dots, P_n^B) \equiv_m (A, E^A, P_1^A, \dots, P_n^A)$ MA SCONNESSA. ALLORA $(B, E^B, P_i^B) \models \varphi) \Rightarrow (B, E) \models \exists P_i, \varphi$ MA QUESTO È IL MODELLO DEI GRAFI CONNESSI, QUINDI SI HA UN ASSURDO.

A POSSIAMO SCEGLIERLO NOI; ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ SIA $l \gg m$; (A, E^A) GRAFO CICLICO CON $l+1$ NODI (OSSIA: $E(i, i+1)$ PER $0 \le i \le l-1$ E $E(l, 0)$); SIA $(B,E) \models \exists P_1, \dots, P_n \varphi$; QUINDI $\exists P_1^A, \dots, P_n^A \subset A : (A, E^A, P_i^A) \models \varphi$.

PER $x \in A$, $d \in \mathbb{N}$, DEFINIAMO LA PALLA DI CENTRO x E RAGGIO d: $B_d(x) \subset A$.

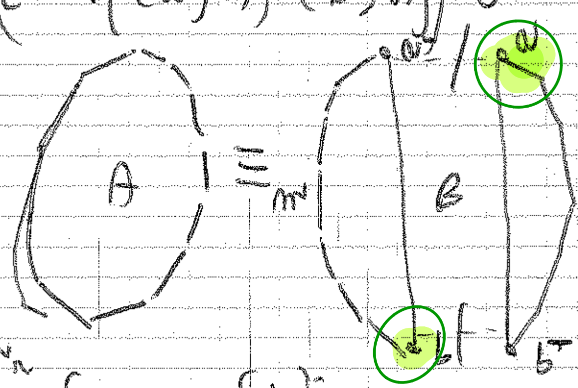
SE C'È UN'ALTRA STRUTTURA B, E^B, P_i^B, $y \in B$, ANALOGAMENTE SI CONSIDERA $B_d(y) \subset B$. DICIAMO CHE $A, x \sim_d B, y \underset{DEF}{\iff} \exists$ ISOMORFISMO FRA $B_d(x) \to B_d(y)$: $x \mapsto y$.

SE $l \gg m$, ESISTONO $a, b \in A$: $B_m(a) \simeq B_m(b)$ E $B_m(a) \cap B_m(b) = \emptyset$

INFATTI $|B_m(a)| = 2m+1$ E ABBIAMO AL PIÙ $2^{n(2m+1)}$ COLORAZIONI DISTINTE SU DI ESSA; PER l ABB. GRANDE, NE TROVO DUE ISOMORFE.

"SPEZZIAMO" A IN CORRISPONDENZA DI a E b:

$B = (B, E^B)$: $|B| = |A|$, $E^B = (E^A \setminus \{(a^-, a), (b^-, b)\}) \cup \{(a^-, b), (b^-, a)\}$.



DEF.: A τ-STRUTTURA, $\tau = (R_1^{m_1}, \dots, R_n^{m_n}, c_1, \dots, c_k)$; IL GRAFO ASSOCIATO È $G_A = (|A|, E^A)$ DEFINITO COSÌ: (GRAFO DI GAIFMAN)

$E^A = \{(a, b), a \ne b : \exists R_i^{m_i} \exists d_1, \dots, d_{m_i} : R(d_1, \dots, d_{m_i})$ E $a, b \in \{d_1, \dots, d_{m_i}$

G_A È NON ORIENTATO (E È SIMMETRICO).

$A = (V, R^2)$ CON R: $R(a,b) \Leftrightarrow R(b,a) \wedge \neg R(a,a) \Rightarrow G_A = A$.

DATI $x \in A$, $d \in \mathbb{N}$, $N_d(x) = \{y \in A : d_{G_A}(x, y) \le d\} \subset G_A$.

B τ-STRUTTURA, $y \in B$, ~~[illegible]~~ $N_d(y)^B \cong N_d(x)^A$ CON UN ISOM. RISPETT.

SI DICE CHE x E y HANNO LO STESSO d-TIPO DI GAIFMAN: $A, x \underset{d}{\sim} B, y$.

TEOR. (HANF, IMMERMAN PAG. 100): COND. SUFF PERCHÉ $A \equiv_r B$ È CHE $\forall$ ~~tipo~~ 2^r-TIPO DI GAIFMAN t, A, B HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI DI TIPO t.

DIM.: LA STRATEGIA PER IL SECONDO GIOCATORE ("$\exists$") È DI MANTENERE IL SEGUENTE INVARIANTE: DOPO LA MOSSA m-ESIMA, (il gioco dura r mosse) $(A, a_1, \dots, a_m)$, $(B, b_1, \dots, b_m)$, "$\forall$" SCEGLIE AD ES. a_{m+1} DA A; "$\exists$" CERCA UN $b_{m+1} \in B$ T.C. $(A, a_1, \dots, a_{m+1})$ E $(B, b_1, \dots, b_{m+1})$ ABBIANO LO STESSO NUM. DI ELEM. DI TIPO DI GAIFMAN 2^{r-m}.

b_{m+1} È SCELTO DELLO STESSO 2^{r-m}-TIPO DI a_{m+1} RISP. A $(B\{b_1, \dots, b_m\})$, $(A, a_1, \dots, a_m)$. ~~QUESTO È VERO~~ PER IPOTESI INDUTTIVA

$(A, a_1, \dots, a_m) \overset{2^{r-m}}{\sim} (B, b_1, \dots, b_m)$; BISOGNA DIMOSTRARE

$(A, a_1, \dots, a_{m+1}) \overset{2^{r-m-1}}{\sim} (B, b_1, \dots, b_{m+1})$. SE v È UN EL. A DISTANZA 2^{r-m-1} DA a_{m+1}, $N_{2^{r-m-1}}(v) \subset N_{2^{r-m}}(a_{m+1})$; PER ISOMORFISMO, SU $B\{b_1, \dots, b_m\}$,

QUESTA PALLA PICCOLA CORRISPONDE A UNA ANALOGA V IN B. AGGIUNGENDO a_{m+1} E b_{m+1} AI LINGUAGGI, BISOGNA DIMOSTRARE CHE C'È UN ISOMORFISMO CHE CONSERVA I TIPI E T.C. $a_{m+1} \mapsto b_{m+1}$. LO VEDIAMO DOMANI.

DIM. DIVERSA (FLUM). 26/5/2008

INVECE DI RAGGIO 2^m, SI CONSIDERANO INTORNI DI RAGGIO 3^m. $\ast$

RICORDIAMO: DIMOSTRARE {GRAFI CONNESSI} $\neq$ MODELLI $(\exists P_1, \dots, P_n, \varphi)$, P_i RELAZIONI UNARIE, φ 1° ORDINE IN $\tau = \{E^2, P_1, \dots, P_n\}$.

PER ASSURDO, VALGA L'UGUAGLIANZA.
SIA $m = \text{rango}(\varphi)$, $l \gg m$; $G_l = (V_l, E_l)$, CICLICO DI LUNGH. $l+1$: $V_l = \{0, \dots, l\}$, $E_l(i, i+1)_{0 \le i \le l-1}$, $E_l(l, 0)$, T.C. $G_l \models \exists P_1, \dots, P_n, \varphi$; QUINDI $\exists P_1^A, \dots, P_n^A \subset V_l$: $A := (V_l, E_l, P_1^A, \dots, P_n^A) \models \varphi$.

Definiamo il grafo sconnesso B

DEFINIAMO $B := (V_l, E^B, P_1^B, \dots, P_n^B)$, CON $P_i^B = P_i^A$ $\forall i$.

DEFINIREMO E T.C. B SIA SCONNESSO.

PER $d \in \mathbb{N}$, $V_l \supseteq N_d(x)^A$ = I VERTICI A DISTANZA $\le d$ DA x.

CARD$(N_d(x)^A) = 2d+1$ SE $e' < l$. ANALOGAMENTE, $N_d(x)^B$.

VOGLIAMO DEFINIRE E^B T.C. $A \equiv_m B$. A QUEL PUNTO $B \models \varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow (V_l, E_l) \models \ast$; ASSURDO.

SCEGLIAMO l: $\exists a \neq b$ IN A: $N_{3^m}(a)^A \cong N_{3^m}(b)^A$ E $N_{3^m}(a)^A \cap N_{3^m}(b)^A = \emptyset$. (QUI A È UN QUALSIASI $(l+1)$-CICLO CON 2^n COLORI). POI FISSIAMO IL GRAFO (G_l, E_l) E POI LO COLORA (IN QUANTO $(G_l, E_l) \models \exists P_1, \dots, P_n \varphi$).

SCELTI a, b, DEFINIAMO $E^B := (E_l \setminus \{(a^-, a), (b^-, b)\}) \cup \{(a^-, b), (b^-, a)\}$.

Definiamo A m-similar B

$\forall$ TIPO t DI ISOMORFISMO DI PALLE DI RAGGIO 3^m COLORATE CON 2^n COLORI, CI SONO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI DI TIPO t IN A E IN B

OSSIA: $A \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B$ ("m" VUOL DIRE "RAGGIO 3^m"). $m' < m \Rightarrow A \overset{G}{\underset{m'}{\sim}} B$.

ORA, $A, a_1, \dots, a_k \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B, b_1, \dots, b_k \underset{DEF}{\Leftrightarrow}$:

$\boxed{k=0}$: VEDI SOPRA; d

K GENERICO: 1) $\exists$ ISOMORFISMO $f: N_{3^m}(a_1)^A \cup \dots \cup N_{3^m}(a_k)^A \mapsto$

$\mapsto N_{3^m}(b_1)^B \cup \dots \cup N_{3^m}(b_k)^B$ } T.C. $a_i \mapsto b_i$ $\forall i$;

2) $A \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B$

Teorema: DIMOSTRIAMO $\overset{G}{\underset{m}{\sim}} \Rightarrow \equiv_m$ (PROPRIETÀ DEL "VA' E VIENI"). E' SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE $\overset{G}{\underset{m}{\sim}}$ GODE DELLA PROPRIETÀ:

LEMMA: $A, a_1, \dots, a_k \overset{G}{\underset{m+1}{\sim}} B, b_1, \dots, b_k \Rightarrow \forall a \in A, \exists b \in B$:

$A, a_1, \dots, a_k, a \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B, b_1, \dots, b_k, b$ E $\forall b \in B, \exists a \in A$: IDEM.

COROL: $\overset{G}{\underset{m}{\sim}} \Rightarrow \equiv_m$.

E SICCOME PER K=0 VALEVA $A \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B$, ABBIAMO $A \equiv_m B$.

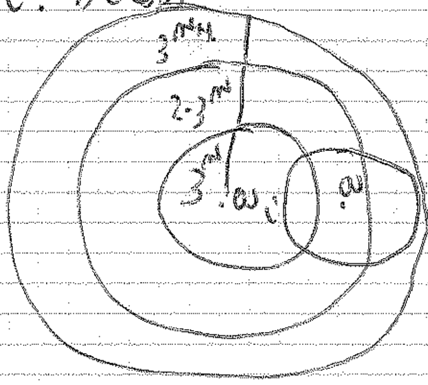
LEMMA $\Rightarrow$ COROL: E' UN VECCHIO TEOREMA DEI GIOCHI DI E-F.

OSS: $A, a_1, \dots, a_k \overset{G}{\underset{0}{\sim}} B, b_1, \dots, b_k \Rightarrow \{a_1, \dots, a_k\} \cong \{b_1, \dots, b_k\}$.

DIM. LEMMA: DATO $a \in A$, SCEGLIAMO $b \in B$.

CASO 1: $a \in N_{2\cdot 3^m}(a_i)$ PER QUALCHE i. ALLORA

$N_{3^m}(a) \subset \bigcup_{i \le k} N_{3^{m+1}}(a_i)$.



$N_{3^m}(a) \subset dom(f)$; ALLORA SI PRENDE $b = f(a)$ E IL NUOVO ISOMORFISMO E' LA RESTRIZIONE DEL VECCHIO.

CASO 2: $a \notin \bigcup_{i \le k} N_{2\cdot 3^m}(a_i)$ }. ALLORA

$N_{3^m}(a)$ E' DISGIUNTA DA $N_{3^m}(a_i)$ $\forall i$. SE t E' UN TIPO DI 3^m-PALLA, NOTIAMO CHE CI SONO LO STESSO NUMERO DI EL. DI TIPO t IN $\bigcup_i N_{2\cdot 3^m}(a_i)^A$ E $\bigcup_i N_{2\cdot 3^m}(b_i)^B$. VISTO CHE $a \notin \bigcup_i N_{2\cdot 3^m}(a_i)^A$ DEVE ESISTERE $b \in B$ CON $N_{3^m}(b)^B \overset{g}{\cong} N_{3^m}(a)^A$,

$b \notin \bigcup_i N_{2\cdot 3^m}(b_i)^B$. ALLORA $A, a_1, \dots, a_k, a \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B, b_1, \dots, b_k, b$:

$dom f \cap dom g \neq \emptyset$, MA $dom f|_{3^m} \cap dom g = \emptyset$, QUINDI SI

POSSONO UNIRE f E g PER CREARE IL NUOVO ISOMORFISMO. $\boxed{OK}$

OSS: IMPLICITAMENTE NOI ABBIAMO DIMOSTRATO ANCHE IL TEOR. DI ~~GAIFMAN~~ HANF!

GENERALIZZANDO IL CONCETTO DI DISTANZA A STRUTTURE QUALSIASI,

$A, a_1, \dots, a_k \overset{G}{\underset{m}{\sim}} B, b_1, \dots, b_k$ GODE DEL "VA' E VIENI".

(2.4.1 FLUM) τ LINGUAGGIO RELAZIONALE, A, B τ-STRUTTURE, $m \in \mathbb{N}$; PER OGNI TIPO t DI 3^m-PALLA A, B HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI DI TIPO $t \Rightarrow A \equiv_m B$ (L'IPOTESI SI PUÒ INDEBOLIRE IN: A E B HANNO UN NUM. DI TIPI $\geq m \cdot e$, e = MAX. CARD. DI UNA 3^m-PALLA).

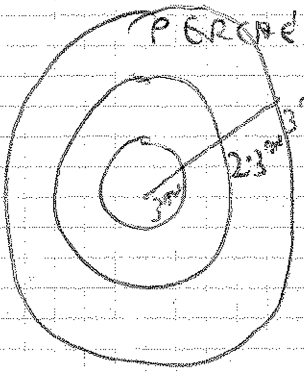
SAPPIAMO CHE NSPACE$(f(n)) \subset$ ASPACE$(f(n)) \subset$ DSPACE$(f(n)^2) \subset$ $\subset$ CO-NSPACE$(f(n)^2)$. SI PUÒ DIMOSTRARE IL TEOR. DI IMMERMAN: NSPACE = CO-NSPACE.

$\shortparallel$

FO(CH. TRANSITIVA) $\subset$ FO(LFP)

[illegible]

GRAFI CONNESSI NON SONO ESPRIMIBILI COME MONADICI DEL II ORDINE: EBBINGHAUS, PROP. 2.4.5 PAG. 29. 22/5/2008



PERCHÉ SERVONO PALLE DI RAGGIO 3^{m+1}?

UNA PALLA DI RAGGIO 3^m O STA IN UNA PALLA DI RAGGIO 3^{m+1} O È DISGIUNTA DA QUELLA DI RAGGIO 3^m. A SECONDA DEI CASI, IL SECONDO GIOCATORE HA MODO DI PRESERVARE LE RELAZIONI.

RIPASSO GENERALE

GIOCHI DI EHRENFEUCHT-FRAÏSSÉ

τ VOCABOLARIO = {RELAZIONI, FUNZIONI, COSTANTI} (SIMBOLI)

$A \equiv B$ (τ-STRUTTURE)

SE $\forall$ τ-FORMULA CHIUSA φ, $A \models \varphi \iff B \models \varphi$. ($A \equiv_\varphi B$).

ES.: $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, <)$; $\mathbb{Z}+\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}\times\{0\} \cup \mathbb{Z}\times\{1\}, \overset{\text{lex inverso}}{<})$

$((z,0) < (z',1)\ \forall z,z')$. ALLORA $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ (MA NON SONO ISOMORFE).

OSS.: $A \equiv B \iff \forall m\ A \equiv_m B$, DOVE $A \equiv_m B$ SIGNIFICA

$\forall \varphi$ FORMULA DI RANGO $\leq m$, $A \equiv_\varphi B$.

TEOR. E.F.: $A \equiv_m B \iff A \sim_m B$.

OSS.: $\Leftarrow$ FUNZIONA ANCHE SE τ È UN LINGUAGGIO CON FUNZIONI, $\Rightarrow$ NO.

DEF.: $A, a_1, \dots, a_m \sim_0 B, b_1, \dots, b_m$ SE

$\langle a_1, \dots, a_m\rangle^A \cong \langle b_1, \dots, b_m\rangle^B$ E L'ISOMORFISMO MANDA a_i IN b_i.

SE CI SONO SOLO RELAZIONI IN τ, $\langle a_1, \dots, a_m\rangle^A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

L'ISOMORFISMO, SE ESISTE, È UNICO.

$A, a_1, \dots, a_m \sim_{k+1} B, b_1, \dots, b_m$ SE $\forall a \in A, \exists b \in B$:

$A, a_1, \dots, a_m, a \sim_k B, b_1, \dots, b_m, b$ E $\forall b \in B, \exists a \in A$: (IDEM).

QUINDI, IL CASO K CON m PARAMETRI È EQUIVALENTE A $K-1$ CON $m+1$ PARAMETRI ... FINO ALLA 0-EQUIVALENZA CON $K+m$ PARAMETRI.

DIMOSTRIAMO CHE $A \sim_K B \Rightarrow A \equiv_K B$ (O IDEM CON PARAMETRI).

SIA $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ DI RANGO $\le K$; SI PUÒ PENSARE COME FORMULA IN τ E VARIABILI x_i O IN $\tau' = \tau \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ SENZA VARIABILI.

SUPPONIAMO CHE $A, a_1, \dots, a_n \sim_K B, b_1, \dots, b_n$.

$K=0$: $\langle a_i \rangle^A \cong \langle b_i \rangle^B$; ~~ISOMORFISMO~~ $\forall R(\bar{x}_i) \in \tau$ FORMULA ATOMICA (O RELAZIONE), $R^A(a_i) \Leftrightarrow R^B(b_i)$ ECC. CHE IMPLICA ~~VUOL DIRE~~ PRESERVARE LE FORMULE DI RANGO 0.

$K>0$: INDUZIONE. K-EQUIVALENZA: $\forall a \in A \exists b \in B (\forall b \in B, \exists a \in A)$:
$A, a_1, \dots, a_n, a \sim_{K-1} B, b_1, \dots, b_n, b \overset{\text{(IP. INDUT.)}}{\Longrightarrow}$ VERIFICANO LE STESSE FORMULE DI RANGO $\le K-1$. SIA $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ DI RANGO K.

CASO DIFFICILE: $\varphi(x_i) = \exists y\, \theta(x_i, y)$. SIANO $A, a_i \models \exists y\, \theta(x_i, y)$
$\Rightarrow$ OSSIA $A \models \exists y\, \theta(a_i, y) \Rightarrow \exists a \in A: A \models \theta(a_i, a)$; ALLORA $\exists b$:
$A, a_i, a \sim_{K-1} B, b_i, b$; PER IP. IND. SONO ANCHE $\equiv_{K-1}$ E POICHÉ
$A, a_i, a \models \theta(a_i, a)$, ALLORA $B \models \theta(b_i, b)$, CHE È $B \models \exists y\, \theta(b_i, y)$. $\boxed{\text{OK}}$
(I CASI $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\neg \varphi$, VANNO PER INDUZIONE SUI CONNETTIVI)

OSS.: NON ABBIAMO USATO TUTTE LE PROPRIETÀ DELLE STRUTTURE;

VALE ANCHE CHE $\overset{*}{\sim}_K \Rightarrow \equiv_K$, DOVE $\overset{*}{\sim}_K$ VERIFICA:
1) $\overset{K}{\sim}_0 \Rightarrow$ ISOMORFISMO; 2) $A, \vec{a} \sim_{K+1} B, \vec{b} \Rightarrow (\forall a \exists b, \forall b \exists a)$:
$A, \vec{a}, a \overset{*}{\sim}_K B, \vec{b}, b$ (PROPRIETÀ DEL VA-E-VIENI)
(3) $\overset{*}{\sim}_K \Rightarrow \overset{*}{\sim}_0$ }: È AUTOMATICO?). DA CUI:

TEOR.: SE $\exists \left(\overset{*}{\sim}\right)_K$ CHE GODE DI 1, 2, ALLORA $A \overset{*}{\sim}_K B \Rightarrow A \equiv_K B$.

POI VEDIAMO: $A \equiv_K B \Rightarrow A \sim_K B \Rightarrow A \overset{*}{\sim}_K B$ (CON $\overset{*}{\sim}_K = \sim_K$)

OSS.: $\overset{*}{\sim}_K \Rightarrow$ IL 2° GIOCATORE HA UNA STRATEGIA PER RESISTERE K MOSSE.

DEF.: $A, \vec{a} \overset{*}{\sim}_\infty B, \vec{b}$ SE $\forall a \in A \exists b \in B$ (E VICEVERSA): $A, \vec{a}, a \overset{*}{\sim}_\infty B, \vec{b}, b$

$A \sim_\infty B \Leftrightarrow A \sim_K B \ \forall K$

SI PUÒ DEFINIRE: $A \underset{\omega}{\sim} B$ SE $A \underset{\alpha}{\sim} B$ $\forall \alpha$ ORDINALE.

ESERC: È EFFETTIVAMENTE UNA ∞-EQUIVALENZA

D'ORA IN POI, τ È UN LINGUAGGIO SENZA FUNZIONI.

TEOR: FISSATI K ED n, CI SONO UN NUMERO FINITO $C(K,n)$ DI CLASSI DI EQUIVALENZA DI FORMULE CON n VARIABILI E RANGO $\leq K$.

$(\varphi(x_i) \Leftrightarrow \psi(x_i)$ SE $\forall$ [redacted] $A, \vec{a}$, [redacted]: $A \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow A \models \psi(\vec{a}))$

STIMA: $C(K+1, n) \leq 2^{C(K, n+1)}$; INOLTRE, $C(0,n) < \aleph_0$.

$C = [A, a_1, \dots, a_n]_{K,n} = \{B, b_1, \dots, b_n : B, b_i \equiv_n A, a_i\}$

$C(K,n) = |\text{CLASSI}_{K,n}|$ (CLASSI DI STRUTTURE).

DATA UNA CLASSE C, (ES. $C = [A, \vec{a}_n]_K$), $\exists\, \varphi_C(\vec{x}_i)$:

$B, \vec{b}_i \models \varphi_C \Leftrightarrow B, \vec{b}_i \in C$.

DIM: DATA C, VOGLIAMO φ_C. OSSERVIAMO: $B, \vec{b} \in C \Leftrightarrow B, \vec{b} \equiv_K A, \vec{a}$.

$K=0$: $\varphi_C(\vec{x}) = \bigwedge\limits_{\substack{\varphi \text{ ATOMICA} \\ A, \vec{a} \models \varphi(\vec{x})}} \varphi(\vec{x}) \wedge \bigwedge\limits_{\substack{\varphi \text{ ATOMICA} \\ A, \vec{a} \not\models \varphi(\vec{x})}} \neg \varphi(\vec{x})$. $B, \vec{b} \models \varphi_C \Leftrightarrow B, \vec{b} \equiv_0 A, \vec{a}$.

DA CUI: $C(0,n) \leq 2^{\#\{\text{ATOMICHE CON } n \text{ VARIABILI}\}}$.

$K > 0$: $\forall\, b \in B, \exists\, a \in A$ .... SI FA DOMANI.

BISOGNA VERIFICARE CHE LE $\sim_k$ SONO IN NUM. FINITO. 23/5/2008

$(A,\vec{a}) \sim^k (B,\vec{b})$; $C = [A,\vec{a}]_{k,n} = [B,\vec{b}]_{k,n} \in C(k,n) < \aleph_0$

INOLTRE, $|C(k+1,n)| \le 2^{|C(k,n+1)|}$.

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $C(0,n)$ E' FINITO (UNA CLASSE DI EQUIVALENZA E' DETERMINATA DA UN SOTTOINSIEME DELLE FORMULE ATOMICHE).

INOLTRE, DATA $C \in C(k,n)$, $\exists\ \varphi_C(x_1,\dots,x_n)$:
$(B,\vec{b}) \models \varphi_C(\vec{x}) \iff [B,b] \in C$.

- $k=0$: $\displaystyle \varphi_C(\vec{x}) = \bigwedge_{\substack{\varphi \text{ ATOMICA} \\ (A,\vec{a})\models\varphi}} \varphi(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{\substack{\varphi \text{ ATOMICA} \\ (A,\vec{a})\not\models\varphi}} \neg\varphi(\vec{x})$.

- $k>0$: $B,\vec{b} \sim_k A,\vec{a}$ VUOL DIRE: $\forall a \in A, \exists b \in B$ (E VICEVERSA) T.C. $B,\vec{b},b \sim_{k-1} A,\vec{a},a$.

SIA $H = [A,\vec{a},a] \in SUCC([A,\vec{a}])$ (DEF DI SUCCESSORE);
SIA $[B,\vec{b}] \in C$; ALLORA $[B,\vec{b}] \models \varphi_C(\vec{x})$.

$\displaystyle \varphi_C(\vec{x}) := \bigwedge_{H\in succ(C)} \exists x_{n+1}\, \varphi_H(\vec{x}, x_{n+1}) \wedge \forall x_{n+1} \bigvee_{H \in succ(C)} \varphi_H(\vec{x}, x_{n+1})$, CON

$H \in C(k-1,n+1)$ $\forall$ SCELTA DI UN SOTTOINSIEME DI $C(k-1,n+1)$

HO UNA φ_C CANDIDATA, QUINDI HO AL PIU' $2^{C(k-1,n+1)}$, DA CUI:

$|C(k,n)| \le 2^{|C(k-1,n+1)|}$. $\boxed{OK}$

~~ALLORA~~: SE $\overset{*}{\sim}_k$ GODE DEL VA E VIENI, ALLORA

$\overset{*}{\sim}_k \Rightarrow \equiv_k$ E QUINDI $\overset{*}{\sim}_k \Rightarrow \equiv_k$. MANCA: $\equiv_k \Rightarrow \sim_k$.

SIANO $A,\vec{a} \equiv_k B,\vec{b}$; SIA $C = [A,\vec{a}]_{/\sim_k}$;

ALLORA $A,\vec{a} \models \varphi_C(\vec{x})$ (PERCHE' ESPRIME IL VA E VIENI PER K MOSSE)

QUINDI $B,\vec{b} \models \varphi_C(\vec{x})$ (PERCHE' HA RANGO K), MA ALLORA

$B,\vec{b} \sim_k A,\vec{a}$. $\boxed{OK}$.

OSS.: RESTA DA DIMOSTRARE CHE CI SONO UN NUM. FINITO DI FORMULE DI RANGO $\le k$ A MENO DI EQUIVALENZA.

DIM.: DATA $\theta(x)$, $\theta(x) \Leftrightarrow \bigvee_{c \in C(k,m)} \varphi_c(x)$ E QUINDI CI SONO SOLO UN NUM. FINITO DI θ DI RANGO K, ~~ESATTAMENTE~~. $\varphi_c \Rightarrow \theta$ $\boxed{OK}$

Giochi per FO

COR.: $K \subset \tau$-STRUTTURE; $K \notin FO \Leftrightarrow \forall m, \exists A \in K, B \notin K, A \sim_m B$.

(OSSIA: $K \in FO \} \Leftrightarrow \exists m$: K E' $\sim_m$-CHIUSO)

VALE UN COROLLARIO SIMILE PER NP.

DIM.: $K = Mod(\varphi) \Rightarrow K$ E' $\sim_m$-CHIUSO, $m = RANGO(\varphi)$.

VICEVERSA, K $\sim_m$-CHIUSO $\Rightarrow K \subset \bigcup_{A \in K} Mod(\varphi_{[A]_{\sim_m}}) = $ "ψ"

il minimo insieme di questa forma che include K

$\forall B \notin K$ $B \models \neg\varphi_{[A]}$

$= Mod\left(\bigvee_{A \in K} \varphi_{[A]_{\sim_m}}\right)$ DOBBIAMO VERIFICARE CHE $Mod\left(\bigvee_{A \in K} \varphi_{[A]_{\sim_m}}\right) \subset K$:

$B \models \psi \Rightarrow \exists A \in K: B \models \varphi_{[A]_{\sim_m}} \Rightarrow B \sim_m A \in K \Rightarrow B \in K$. $\boxed{OK}$

TEOR.: (8.5 PAG. 127, AJTAI-FAGIN, IMMERMAN) ⊛ $(NP \neq CO\text{-}NP)$

DIM.: CLIQUE E' NP-COMPLETO $\Rightarrow \neg CLIQUE \in CO\text{-}NP$ E BASTA DIMOSTRARE CHE $\neg CLIQUE \notin NP$.

RICORDIAMO CHE $NP = \exists SO$: $K \in NP \Leftrightarrow K = MOD(\exists R_i, \varphi)$, $\varphi \in FO$.

Giochi per ESO monadico

$K \notin NP \Leftrightarrow$ "$\exists$" vince $\Leftrightarrow$

(for every $(\underbrace{\exists C_1 \dots C_c}_{c})\underbrace{\varphi}_{m} \in ESO$ $)(\exists A \in K)(\exists B \notin K)(A \sim_{\exists c \varphi} B)$

→ $\forall$ SCEGLIE $c, m \in \mathbb{N}$;

→ $\exists$ SCEGLIE $A \in K$;

→ $\forall$ SCEGLIE c RELAZIONI UNARIE, $C_1^A, \dots, C_c^A \subset A$;

→ $\exists$ SCEGLIE $B \notin K$ E $C_1^B, \dots, C_c^B$ UNARIE $\subset B$ E CERCA DI MOSTRARE $(B, C_1^B, \dots, C_c^B) \sim_m (A, C_1^A, \dots, C_c^A)$.

↳ IN REGALTA' CERCA DI DIMOSTRARE $\equiv_m$, PER POTER UTILIZZARE UNA $\sim_m$.

⊛ TEOR.: $K \notin \exists^{MON} SO \Leftrightarrow \exists$ VINCE.

DIM.: ($\Leftarrow$) PER ASSURDO, SIA $K = Mod((\exists R_1, \dots, R_c)\varphi)$, RANGO$(\varphi) = \cancel{k}$ m; SUPPONIAMO CHE $\forall$ GIOCHI c, m; ~~ALLA FINE ABBIAMO LE DUE STRUTTURE~~ POI $\exists$ GIOCA $A \in K$ ($A \models \exists R_i : \varphi$); $\forall$ PUO' GIOCARE $C_i^A \subset A$ T.C. $(A, C_i^A) \models \varphi$; $\exists$ PRODUCE $B, C_i^B \sim_m A, C_i^A$, ALLORA $B, C_i^B \models \varphi$, MA ALLORA $B \models \exists R_i : \varphi$, QUINDI $B \in K$, ASSURDO.

OSS.: ($\Leftarrow$) SE SI DIMOSTRA CHE $\neg SAT \notin NP$, ALLORA $NP \neq CONP$ (E QUINDI $P \neq NP$). ~~MA~~ RIMANDATO.

Ajtai Fagin Metodology thm (Immerman p127)

<u>TEO</u>: $K \notin M\text{-}\Sigma^1_1 \Leftrightarrow$ "$\exists$" vince. (vedi Regole gioco pag. prima).

($\Rightarrow$): Supponiamo che $K \in M\text{-}\Sigma^1_1$. Sia $\exists R_1 \dots R_c \varphi$ con $RQ(\varphi) = m$ la formula che lo testimonia. "$\forall$" sceglie m, c.
"$\exists$" sceglie $A \in K$.
"$\forall$" sceglie relazioni $R_1 \dots R_c$ su A taliche $A \models \varphi(\vec{R})$.
"$\exists$" sceglie $B \notin K$ e relazioni $R'_1 \dots R'_c$ su B e vorrebbe
$(B, R'_1 \dots R'_c) \underset{m}{\sim} (A, R_1, \dots, R_c)$.
Se lo fosse $B \models \exists \vec{R} \varphi$ e quindi $B \in K$.
Quindi "$\exists$" perde e "$\forall$" vince.

($\Leftarrow$): Immerman p128. Suppongo $K \notin M\text{-}\Sigma^1_1$.
Sia Φ un insieme finito massimale di formule di $RQ = m$ in $\sigma = \tau \cup \{R_1 \dots R_c\}$ a due a due non equivalenti.
Sia $\exists \Phi$ l'insieme delle formule della forma $\exists R_1 \dots R_c \varphi$ con $\varphi \in \Phi$.
Sia $\Gamma = \{\gamma : \gamma \in \exists\Phi \ \& \ \forall B \notin K \ \ B \models \neg\gamma\}$ e $\psi = \bigvee \Gamma$
Per ipotesi $K \neq Mod(\psi)$.
Ma ovviamente $Mod(\psi) \subset K$.
"$\exists$" può giocare $A \in K$ con $A \not\models \psi$.
"$\forall$" gioca relazioni $R_1 \dots R_c$ su A.
Consideriamo $\varphi_0 \in FO$ completa di $RQ = m$ t.c. $(A, R_1 \dots R_c) \models \varphi_0$
Poiché $A \not\models \psi$ e $\psi = \bigvee\Gamma$ abbiamo $\exists R_1 \dots R_c \varphi_0 \notin \Gamma$.
Quindi:
"$\exists$" può scegliere $B \in K$ tale che $B \models \exists R_1 \dots R_c \varphi_0$ e $R_1 \dots R_c$ relazioni su B: $(B, R_1 \dots R_c) \models \varphi_0$.
Essendo φ_0 completa $(B, R_1 \dots R_c) \underset{m}{\sim} (A, R_1 \dots R_c)$ e "$\exists$" vince.

SO = PH

26/5/2008

Oracoli

MdT ORACOLARI: STATI PARTICOLARI: $q_{ORACOLARE}, q_{SI}, q_{NO}$

NASTRO ORACOLARE $B \subseteq \Sigma^*$

$B: \Sigma^* \xrightarrow{B} \{0,1\}$

DATI C_1, C_2 CLASSI DI COMPLESSITÀ, $C_2^{C_1} = \bigcup_{B \in C_2} C_1^B \supseteq C_2$

(PUÒ NON ESSERE STRETTA: $NP^P = NP$)

PH

DEF.: PH; $\Sigma_0^p = PTIME$; $\Sigma_{i+1}^p = NP^{\Sigma_i^p}$; $PH = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i^p$.

Δ; $\Delta_0 = PTIME$; $\Delta_{i+1}^p = P^{\Sigma_i^p}$; $\Delta = \bigcup_i \Delta_i^p$.

Π; $\Pi_0 = PTIME$; $\Pi_{i+1}^p = CO\text{-}NP^{\Sigma_i^p}$ $\Pi = \bigcup_i \Pi_i$.

OSS.: $\Pi_{i+1}^p = CO\text{-}(NP^{\Sigma_i^p}) = CO\text{-}\Sigma_{i+1}^p$

È EVIDENTE CHE $NP \subseteq PH$: $P \to NP^P = NP \to NP^{NP} = NP$ ...

OSS.: SE ESISTE UN PROBLEMA PH-COMPLETO ALLORA Σ_i^p SI STABILIZZA.

SE $P = NP$ O $NP = CO\text{-}NP$, ALLORA $PH = \Sigma_0^p = P$.

DEF.: $\Sigma_k^{SO} = \{(\exists R_1)(\forall R_2) \ldots (Q_k R_k)\varphi\}$ (K ALTERNANZE FRA $\exists$ E $\forall$)

$\varphi \in FO$

$\exists SO = \Sigma_1^{SO}$.

ATIME-ALT$[n^{O(1)}, k]$ = MdT ALTERNANTI CHE LAVORANO IN TEMPO POLINOMIALE CON MAX. K ALTERNANZE.

TEOR.: τ VOCABOLARIO, $S = \{\tau\text{-STRUTTURE}\}$, $\forall k \geq 1$, SONO EQUIVALENTI:

1) $S = MOD[\Phi]$, $\Phi \in \Sigma_k^{SO}$;
2) $S = \{x : \exists y_1 : |y_1| \leq |x|^c ; \forall y_2 : |y_2| \leq |x|^c \ldots Q_k y_k\ |y_k| \leq |x|^c\ R(x, y)\}$;
3) $S \in$ ATIME-ALT$[n^{O(1)}, k]$;
4) $S \in \Sigma_k^p$.

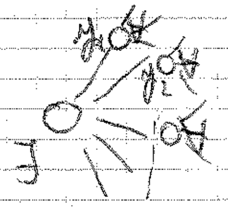
PH corrisponde a una gerarchia di formule del 2° ordine.

DIM.: 1)⇒2): $\exists R_1 \forall R_2 \dots Q_K R_K \varphi$; SIA $A \in J : A \models \Phi$;

$\Vert\Phi$

Σ^P_1 = ...

2)⇒3)



ECC. - - -

Q_K

E' UN CAMMINO ALTERNANTE CHE PORTA ALLA SOLUZIONE.

$\Sigma_K^{SO} = \Sigma_K^{poly}$ il caso $k=1$ è il teo di Fagin.

qui non ser ... oli.

3)⇒1) (FAGIN: $NP \subseteq \exists SO$)

4.) ⟺ 2): CASO SEMPLICE: SIA $A \in NP^{NP}$, SCRIVIAMO "$x \in A$" IN FORMA "$\exists\forall\varphi$": L'IDEA E' CHE FISSATO L'INPUT L'ORACOLO VIENE USATO SOLO UN NUM. FINITO DI VOLTE:

$$(M^B(x))\downarrow \iff \exists f \left(f \subset_{FINITA} B \wedge M^f(x)\downarrow\right) \iff$$

$$\iff \exists f \exists c_f \left(f \subset_{FINITO} B \wedge \varphi_A(c,x,f)\right) \dots$$

$f \subset_{FINITO} B$ SI RISCRIVE: $\forall u \in dom\, f\ (f(u)=0 \Rightarrow \forall w\ M_B(u)\uparrow w) \wedge$

$\wedge (f(u)=1 \Rightarrow \exists z : M_B(u)\downarrow z)$. CI SONO PERO' TROPPI QUANTIFICATORI. SI RISCRIVE COSI':

DEF: $M_B(u)\uparrow w \iff w$ è una computazione non accettante di M_B su input u

? vedi pag. successiva

$\exists (z(u))_{u \in dom f} : \forall u \forall w \left(f(u)=1 \Rightarrow M_B(u)\downarrow z(u)\right) \wedge$

$\wedge \left(f(u)=0 \Rightarrow M_B(u)\uparrow z(u)\right)$. CONTROLLIAMO LE LUNGHEZZE:

$|u| \le |x|^c$ PERCHE' COMPARE SUL NASTRO ORACOLARE.

TEOR. GENERALE: $L \subseteq \Sigma^*$, $i \ge 1$; $L \in \Sigma_i^P \iff \exists R$

$\{(x,y) : (x,y) \in R\} \in \Pi_{i-1}^P$ E $L = \{x : \exists y\, (x,y) \in R\}$.

COROLL.: $L \in \Pi_i^P \iff \exists R \in \Sigma_{i-1}^P$ E $L = \{x : \forall y\, (x,y) \in R\}$.

$\underbrace{\bigcup_{k} ATIME(n^{O(1)}, k)}_{PH} \subseteq ATIME(n^{O(1)}) =$

$= DSPACE(n^{O(1)})$.

DA QUESTO DERIVA 4)⟺2). $\boxed{OK}$

E DA QUESTO DERIVA: $SO = PH$.

$SO \subseteq PH$

DIM. INDUZIONE: $i \ge 1$: $NP^{\Sigma_{i-1}^P}$ COSTRUIAMO LA MdT CORRISPONDENTE TRAMITE 2).

PASSO: ~~$L \in \Sigma_i$~~ $x \in L$, $L \in NP^{\Sigma_{i-1}^P}$: C'E' UNA MACCHINA M^K CON

$K \in \Sigma_{i-1}^P$, $z \in M^K \iff \exists w : (z,w) \in$ SKDC' ... POLINOMIALE (Π_i^P). $\boxed{OK}$

Teo: $NP^{NP} = \Sigma_2^{poly}$

Dim: Sia $A \in NP^{NP}$. Codifichiamo "$x \in A$" nella forma "$\exists\forall$".

Sia $B \in NP$ tale che $x \in A \Leftrightarrow M^B(x)\downarrow$

dove M^B è una macchina di Turing con oracolo B e "$\downarrow$" significa "accette in tempo polynomiale" (con fissato polinomio). Vedo B come funzione a valori $\{0,1\}$.

$$M^B(x)\downarrow \iff (\exists f)(\exists \text{ computazione } c)\big(\psi(c,x,f) \wedge f \subset B\big)$$

dove ψ è in PTIME e tutti i quantificatori sono poly-bounded.

Rimane da esprimere $f \subset B$ in forma "$\exists\forall$".

Siccome $B \in NP$ ho

$$u \in B \Leftrightarrow \exists w \;\; \theta(u,w)$$

con θ in PTIME (e quantificatori poly-bounded).

$$f \subset B \Leftrightarrow \exists \left(z(u)_{u \in \mathrm{dom}(f)}\right)(\forall u \in \mathrm{dom}\, f) \begin{bmatrix} fu = 1 \Rightarrow \theta(u, z(u)) \\ \wedge \; fu = 0 \Rightarrow \forall w \; \neg\theta(u,w) \end{bmatrix}.$$

TEO: $PH_K = \Sigma_K^{poly}$

Dim: Come prima salvo che "$u \in B$" è Σ_{K-1}^{poly}

quindi θ è Π_{K-2}^{poly} e

$$\text{"} f \subset B \text{" è } \exists^P \forall^P \Sigma_{K-1}^P = \Sigma_K^P.$$

29/5/2008

$A, \vec{a} \sim_m B, \vec{b}$: $A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$ $rk(\varphi) \leq m$;

$A \sim_m^k B$: $A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$ CON # VARIABILI $(\varphi) \leq K$.

~~NP = ∃~~

FAGIN : $NP = \exists SO = \exists SO_{\leq}$; $P = FO(LFP)$

INCLUSIONI: $P \subset NP \subset A$ E $A \subset P$ CON UN ESPONENZIALE

SAVIC : $ASPACE(s(n)) \subset DSPACE(s(n)^2)$ $(s(n) \geq \log(n))$

(FINE DEL TEOR. DI AYTAI-FAGIN (METHODOLOGY THEOREM, PAG. 127 IMMERMAN))

COSA VUOL DIRE "$FO(LFP) \subset \exists SO$, CON $\leq$"?

DATA $C \subset \tau$-STRUTTURE, $\exists \varphi \in SO$, $C = Mod(\varphi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{ bin(A)_{\leq} : A \in C \} \in NP$.

SIA DUNQUE $C = \{ (A, \leq) : (A, \leq) \models \varphi \}$, $\varphi \in FO_{\leq}(LFP)$.

ALLORA, $(A, \leq) \models \varphi \Leftrightarrow \exists R$ ORDINE T.C. $(A, R) \models \varphi$.

PROBLEMA APERTO : ESPRIMERE ALGORITMI TRAMITE STRUTTURE CHE NON FACCIANO RIFERIMENTO ALL'ORDINE.

($P = FO(LFP)$ RICHIEDE UN ORDINE, MENTRE $NP = \exists SO$ NO)

AYTAI-FAGIN :

$C \subset STRUTT(\tau)$; $C \stackrel{?}{=} Mod(\exists \underbrace{C_1, \dots, C_c}_{UNARI} \underbrace{\varphi}_{FO})$ $\leftarrow \exists^{MON} SO$;

$C \notin \exists^{MON} SO \Leftrightarrow$ "$\exists$" VINCE IL SEGUENTE GIOCO DI E.F.:

- $\forall$ SCEGLIE c, m;
- $\exists$ SCEGLIE $A \in C$;
- $\forall$ SCEGLIE $C_1^A, \dots, C_c^A \subset A$;
- $\exists$ SCEGLIE $B \notin C$, $C_1, \dots, C_c \subset B$ E CERCA DI MOSTRARE CHE $(B, \vec{C}^B) \sim_m (A, \vec{C}^A)$.

ABBIAMO VISTO: $\exists$ VINCE $\Rightarrow C \notin \exists^{MON} SO$.

VICEVERSA: $C \notin \exists^{MON} SO$;

- $\forall$ SCEGLIE c, m; SIA $S_{m,c}$ = INSIEME FINITO MASSIMALE DI FORMULE NON EQUIVALENTI DELLA FORMA $\exists C_1, \dots, C_c, \varphi$, CON $rk(\varphi) \leq m$ E φ COMPLETA, OSSIA: $\forall \psi$, $rk(\psi) \leq m$, $\varphi \vdash \psi \vee \varphi \vdash \neg \psi$.

ES.: DATA A, $\exists\, \varphi_{[A]}$ CON $\mathrm{rk}(\varphi_{[A]}) \le m$ T.C. $B \models \varphi(A) \iff B \underset{m}{\sim} A$;
$\varphi_{[A]}$ È COMPLETA.

SIA $T = \{ \Phi \in S_{m,C} : \forall B \notin C,\ B \models \neg \Phi \}$; $\left(\bigvee_{\Phi \in T} \Phi\right) \in S_{m,C}$;
$\exists A \in C : A \models \neg\left(\bigvee_{\Phi\in T} \Phi\right)$, ALTRIMENTI $\left(\bigvee_{\Phi \in T}\Phi\right)$ ~~ASSIO~~ ASSIOMATIZZEREBBE C:

$C = \mathrm{Mod}\left(\bigvee_{\Phi \in T} \Phi\right)$. ALLORA $\exists$ SCEGLIE A;

$\forall$ SCEGLIE $c_1, \dots, c_c \in A$;

$\exists$ CONSIDERA $(A, \vec{c}^A) = A'$; ESISTE $\varphi_{[A']}$ CON RANGO $\le m$;
$A \models \exists \vec{c}\, \varphi_{[A']}$; ALLORA $[\exists \vec{c}\, \varphi_{[A']} \notin T]$. INFATTI, $\forall \Phi \in T$, $A \models \neg \Phi$.
DUNQUE $\exists B \notin C : B \models \exists \vec{c}\, \varphi_{[A']}$: $\exists$ SCEGLIE B E $\vec{c}^B$ T.C.
$B, \vec{c}^B \models \varphi_{[A']}$. MA ALLORA $B, \vec{c}^B \underset{m}{\sim} A' = A, \vec{c}^A$. $\boxed{OK}$

TEOR.: SAT È NP-COMPLETO. ($\Leftarrow$ FAGIN)

DIM.: OSSIA, $NP \le_p SAT$. SIA $M \in$ N-TURING MACHINE, $\cancel{A}$ $\mathcal{B}$ $=$
$= \{x : M(x)\downarrow\}$; DIMOSTRIAMO $x \in \cancel{\mathcal{B}}\ \mathcal{B} \iff f(x) \in SAT$, CON $f(x)$ FORMULA
DIPENDENTE DA x. (PAG. 119 IMMERMAN)

SIA $\mathcal{B} \in NP$; PER FAGIN, $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}(\Phi)$. $\mathcal{B} \subset \tau$-STRUTTURE.

NELLA DIM. DI FAGIN, $\Phi = \exists \underbrace{S_1^{a_1}, \dots, S_g^{a_k}}_{2K\text{-ARIE}}\ \underset{K\text{-ARIA}}{\Delta^K}\ \forall x_1, \dots, x_t\ \varphi(\vec{x})$.

$\mathcal{B} := \mathrm{Mod}(\Phi)$. (un tipico problema NP).

DATA A τ-STRUTTURA, $|A| = n$, DOBBIAMO DEFINIRE ~~...~~ $\mathcal{B}$ FORMULA PROPOSIZIONALE $\gamma(A)$
T.C. $A \in \mathcal{B} \iff \gamma(A) \in SAT$.

$\gamma(A)$ HA COME VARIABILI PROPOSIZIONALI: $C_i(e_1, \dots, e_{2K})$, ~~DOVE~~
$\Delta(e_1, \dots, e_K)$, ~~$e_i \in n$~~ $R(\vec{e}_k)$, $e_i \in n$, $R \in \tau$.

DEFINIAMO MEGLIO: $\psi = \bigwedge_{J=1} \bigvee R_J(\vec{x})$. ORA, $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \models \exists \vec{c}^{2K}, \Delta^K, \forall \vec{x}$
$\bigwedge_J R_J(\vec{x})$. ALLORA $\gamma(A) = \bigwedge_{e_1, \dots, e_t \in n} \bigwedge_J \bigvee R_J(\vec{e})$; PER COSTRUZIONE,
OGNI VALUTAZIONE DI γ È SAT. $\boxed{OK}$

SAT è NP-Completo

Dim: Sia $\mathcal{B} \in NP$. Per il teorema di Fagin esiste una formula della forma
$\exists S_1 \dots S_r \, \forall x_1 \dots x_k \, \varphi(x_1 \dots x_k)$
con φ senza quantificatori, tale che

$$\mathcal{B} = Mod(\exists \bar{S} \, \forall \bar{x} \, \varphi).$$

Ora:

$$A \models \exists S_1 \dots S_r \, \forall x_1 \dots x_k \, \varphi(x_1 \dots x_k) \qquad (|A| = n)$$

$$\iff \exists S_1 \subset n^{a_1}, \dots, S_r \subset n^{a_r} \bigwedge_{0 \leq a_1 \dots a_k < n} \varphi(a_1, \dots a_k)$$

$$\iff \bigwedge_{0 \leq a_1 \dots a_k < n} \varphi(a_1, \dots a_k) \in SAT$$

con $\varphi \in FO(S_1, \dots, S_r, R_1, \dots, R_t)$.

La vedo come formula proposizionale nelle variabili $S_i(\vec{a})$, $R_j(\vec{a})$

La funzione

$$A \mapsto \gamma(A) := \bigwedge_{0 \leq \bar{a} < n} \varphi(\bar{a})$$

riduce $\mathcal{B}$ a SAT. $\square$

30/5/2008

$ATIME(t(n)) \subseteq DSPACE(t(n))$;

2) ~~ATIME~~ ASPACE $(s(n)) \subseteq DTIME(O(1)^{s(n)})$.

QUAL E' LA COMPLESSITA' DETERMINISTICA DI VARIE FORME DI ALTERNATING REACHABILITY?

GRAFO: $G=(V, E^2, A^1; s; t)$; $\tau = \{E, A, s, t\}$.

A ↓ VERTICI UNIVERSALI

$REACH_{ALT} \subseteq \tau$-STRUTTURE, $REACH_{ALT} = \{G : E_{ALT}(s,t)\}$.

E_{ALT} SI DEFINISCE COSI':

1) $\forall x\, E_{ALT}(x,x)$;

2) $\neg A(x) \wedge \exists z\, ((E(x,z) \wedge E_{ALT}(z,y)) \rightarrow E_{ALT}(x,y))$

3) $A(x) \wedge \forall z\, ((E(x,z) \rightarrow E_{ALT}(z,y)) \rightarrow E_{ALT}(x,y)) \wedge \exists z\, (E(x,z))$.

PROBLEMA: TROVARE ALGORITMI EFFICIENTI PER ~~risolvere~~ DIRE SE G STA IN $REACH_{ALT}$.

TEOR.: $REACH_{ALT} \in DTIME(n)$, $n = |G|$.

DIM.: Q=QUEUE — SI PARTE DA t E SI VA A RITROSO

Q := ∅;
MARK(t); INSERISCO t IN Q.
WHILE Q ≠ ∅ DO
  RIMUOVO IL PRIMO EL. x DI Q
  FOR y NON MARCATO T.C. E(y,x)
    CANCELLO (y,x)
    IF ¬A(y) O y NON HA ARCHI USCENTI
      MARK(y); INSERISCO y IN Q
    END IF
  END FOR
  SE s E' MARCATO ACCETTO; SE NO, NO.
END WHILE; END.

AFFERMAZIONE: x VIENE MARCATO $\Leftrightarrow E_{ALT}(x,t)$.

ALTRO ALGORITMO: GRAFI CON RAMIFICAZIONE ≤ 2

SI LAVORA CON UNA ~~STACK~~ PILA INVECE CHE UNA CODA.

L'IDEA È CHE SE NELLA PILA C'È UNA CERTA STRINGA, SI È SUL NODO IN CUI SI ARRIVA SCEGLIENDO I NODI CORRISPONDENTI A QUELLA STRINGA.

INOLTRE SI MANTIENE IN MEMORIA ANCHE UNA RISPOSTA $R \in \{SÌ, NO, ?\}$

$S = (C_1, \dots, C_{n-1}^{\forall}, C_n)$; $R = NO \Rightarrow$ AGGIORNIAMO COME

$S := (C_1, \dots, C_{n-1})$, $R = NO$.

$S = (C_1, \dots, C_{n-1}^{\exists}, 0)$, $R = NO \Rightarrow$ AGGIORNIAMO COME

$S = (C_1, \dots, C_{n-1}, 1)$, $R = ?$.

$S = (C_1, \dots, C_{n-1}, 1)$ $R \neq ? \Rightarrow$ AGGIORNIAMO COME

$S = (C_1, \dots, C_{n-1}, 1)$, R IMMUTATA

$S = (C_1, \dots, C_n)$, $R = ? \Rightarrow S := (C_0, \dots, C_n, 0)$, $R = ?$ $\boxed{OK}$

TEOR.: $ATIME(t(n)) \subset DSPACE(t(n))$.

DIM.: $M \in ATIME(t(n))$; w INPUT, $|w| = n$;

$G_w = (V, E, A, s, t)$; $V \ni ID = $ <CONT. NASTRI, STATO, POSIZ. TESTINE>; $|ID| = t(n) + \text{COSTANTE} + \log(t(n)) = O(t(n))$.

$\vec{s} = \langle \vec{w}, \text{STATO INIZIALE } 1 \rangle$. $M(w)\downarrow \iff E_{ALT}^{G_w}(s_w, t)$;

CIÒ SI CONTROLLA CON L'ALGORITMO DELLA PILA

OSS.: NON SI PUÒ TENERE TUTTO IL GRAFO IN MEMORIA, PERCHÉ LA SUA GRANDEZZA È ESPONENZIALE: $|G_w| = O(1)^{t(n)}$.

DIMOSTRIAMO CHE $|STACK| \leq TIME = t(n)$. ALLA FINE PER ESPANDERE CI SI METTE TEMPO $t(n)$, QUINDI SPAZIO $t(n)$. $\boxed{OK}$

TEOR.: $ASPACE(t(n)) \subset DTIME\left(O(1)^{t(n)}\right)$.

DIM.: $|STACK| \leq TIME \leq O(1)^{t(n)}$. OSSERVIAMO CHE LA COPPIA <STACK, RISPOSTA> NON SI RIPETE ... $\boxed{OK}$

OSS.: SI SUPPONE SEMPRE $S(n) \geq \log(n)$.

TEOR.: NSPACE$(S(n)) \subset$ ATIME$(S(n)^2)$ $(\subset$ DSPACE$(S(n)^2))$.

DIM.: $M \in$ NSPACE$(S(n))$ - TM; W INPUT, $|W| = n$;

VOGLIAMO SAPERE SE $M(W)\downarrow$ TRAMITE UNA MACCHINA ALTERNANTE.

G_W = GRAFO DELLE COMPUTAZIONI $= (V, E, s, t)$ CON TUTTI I NODI $\exists$.

ROUTINE: $P(d, x, y) \iff E^*$ (DA x SI RAGGIUNGE y IN MENO DI 2^d PASSI)

x, y = CONFIGURAZIONI $\langle$MEMORIA, STATO, POSIZIONE$_{n}\rangle$.

OSS.: $P(d+1, x, y) \iff \exists z \; (P(d, x, z) \underbrace{\wedge}_{\text{"}\forall\text{"}} P(d, z, y))$.

UNA ATM PUÒ CALCOLARE $P(d+1, x, y)$ COME: SE IN $\exists$, PRENDI z; SE IN $\forall$, SCEGLI LA STRADA DA PRENDERE (OSSIA RIPARTE CON $P(d, x, z)$ O $P(d, z, y)$).

SE $T(d)$ = TEMPO PER CALCOLARE $P(d, x, y)$, ALLORA

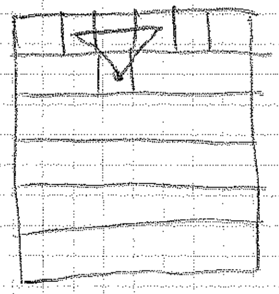
$T(d+1) = O(S(n)) + T(d)$. ALLA FINE, $M(W)\downarrow \iff P(c \cdot S(n), s_W, t)$

SI HA ~~QUINDI~~ $T(d) = d \cdot S(n)$, MA POICHÉ SI PARTE DA $d = S(n)$, SI HA $T(S(n)) = S(n)^2$. $\boxed{\text{OK}}$

TEOR.: DTIME$(K^{S(n)}) \subset$ ASPACE$(S(n))$.

DIM.: $M \in$ DTIME$(K^{S(n)})$, INPUT W, $|W| = n$;

G_W = MATRICE $K^{S(n)} \times K^{S(n)}$, DOVE IN POS. (t, p) C'È IL SIMBOLO AL TEMPO t IN POSIZIONE p. "SIMBOLO" È O IL SIMBOLO DEL NASTRO O LA COPPIA "$\langle$SIMBOLO, STATO$\rangle$" (SE NECESSARIO).



IL CONTENUTO DI UNA CELLA È DETERMINATO DALLE 3 CELLE CHE LE STANNO "SOPRA".

$C(t, p, a)$ = AL TEMPO t IN POS. p C'È a;

$C(t+1, p, a) \iff \exists a_{-1}, a_0, a_1 \; ((a_{-1}, a_0, a_1) \xrightarrow[M]{} a) \wedge$
$\forall i \in \{-1, 0, 1\} \; C(t, p+i, a_i))$. $C(0, p, a)$ È FACILE:

$C(0, 1, \langle w_0, q\rangle)$, $C(0, 2, w_1)$ ECC. ...; ALLA FINE PER VERIFICARE SE ACCETTA, BASTA VERIFICARE $C(K^{S(n)}, 1, \text{ACCETTO})$.

$C(t+1, p, a)$ SI CALCOLA CON UNA ATM; $|b| \leq O(s(n))$, $|p| \leq O(s(n))$, a È UNA COSTANTE. $\boxed{\text{OK}}$

SI SA CHE NPSPACE = APTIME = PSPACE.

SE FOSSE VERO NPSPACE = APSPACE, ESSENDO APSPACE = EXPTIME, SAREBBE PSPACE = EXPTIME, IL CHE SEMBRA DUBBIO.