MATEMATICA DISCRETA

CALCOLO COMBINATORIO

$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

Quanti sono i sottoinsiemi di $[n]$? Risp. 2^n

Quanti sono i sottoinsiemi di $[n]$ con k elementi?

$$\text{Def. } C^n_k = |\mathcal{P}_k([n])| . \qquad C^n_k = ?$$

Sol. Ce ne sono C^{n-1}_k che non contengono n.

Più altri C^{n}_{k-1} che contengono n.

Quindi $C^n_k = C^{n-1}_k + C^n_{k-1}$.

La stessa formula dei coefficienti binomiali!

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Casi base $C^n_0 = 1 = C^n_n$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

Quindi per induzione su n, $C^n_k = \binom{n}{k}$.

Esercizio

Quante sono le triple $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ t.c. $x+y+z=11$?

Esempio $(2,2,7)$. Gli associo una stringa binaria

$$\underbrace{11}_{2}\,0\,\underbrace{11}_{2}\,0\,\underbrace{1111111}_{7}.$$

È come contare le stringhe binarie con undici "1" e due "0".
Devo scegliere in che posizione metto i due "0".

$\binom{11}{2}$ possibilità.

La soluzione è $\binom{11}{2}$

Es 2

a) Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di $\mathbb{N}_{100}$ tali che la somma degli elementi sia pari?

Soluzione:

{PARI, DISPARI, DISPARI} oppure {PARI, PARI, PARI}

$$50 \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{3}$$

b) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{100}$ che contengono almeno 3 numeri pari?

Soluzione:

$$2^{50}\left(2^{50} - \binom{50}{0} - \binom{50}{1} - \binom{50}{2}\right).$$

2^{50} modi di scegliere i dispari

$2^{50} - \binom{50}{0} - \binom{50}{1} - \binom{50}{2}$ modi di scegliere i pari

d) Quante sono le terne ordinate (n, m, u) di elementi di $\mathbb{N}_{100}$ il cui prodotto fa 100?

Sol: $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

$$\begin{cases} n = 2^{a_1} \cdot 5^{b_1} \\ m = 2^{a_2} \cdot 5^{b_2} \\ u = 2^{a_3} \cdot 5^{b_3} \end{cases}$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 2$ (6 soluzioni).

$b_1 + b_2 + b_3 = 2$ (6 soluzioni). $\Rightarrow$ $6 \cdot 6 = 36$ possibili terne.

c) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{100}$ che contengono esattamente 3 numeri pari ed esattamente un multiplo di 5?

<u>Soluzione</u>: occorre distinguere due casi a seconda che il multiplo di 5 sia pari o dispari.

$C =$ multipli dispari di 5. $\quad \# C = 10$

$D =$ multipli pari di 5. $\quad \# D = 10$

Gli altri 80 numeri si suddividono in:

$A = \{x \mid 2 \nmid x \wedge 5 \nmid x\} =$ dispari non multipli di 5. $\quad \# A = 40$.

$B = \{x \mid 2 \mid x \wedge 5 \nmid x\} =$ pari e non multipli di 5. $\quad \# B = 40$

Il sottoinsieme può contenere:

<u>Caso 1</u>: 1 elemento di C (10 scelte), tre elementi di B ($\binom{40}{3}$ scelte), e altri elementi da A (2^{40} scelte)

<u>Caso 2</u>: 1 elemento di D (10 scelte), 2 elementi di B ($\binom{40}{2}$ scelte), e altri elementi da A (2^{40} scelte).

La soluzione è dunque: $\boxed{10 \cdot \binom{40}{3} \cdot 2^{40} + 10 \cdot \binom{40}{2} \cdot 2^{40}}$.

- Quanti sono gli anagrammi di ATTILLATO?

$$\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{9!}{2!\,3!\,2!}$$

- Quante $f : [20] \to [20]$

  a) Assumono almeno un valore ≥ 11?

  Sol. $2^{10} - 10^{20}$

  b) esattamente un valore ≥ 11?

  $10\,(11^{20} - 10^{20})$

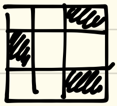
- Quanti sono i sottoinsiemi di $[20]$ con tre numeri pari e una quantità a piacere di numeri dispari?

  Sol: $\binom{10}{3} 2^5$

- Quante stringhe di lunghezza 5 posso formare con caratteri presi da $\{A, B, C, D, E\}$?

  Soluzione: 5^5

In quanti modi posso colorare una tabella 3×3 con colori ■ o □ in modo che:



a) ogni riga è colorata in modo diverso.

Sol: $2^3(2^3-1)(2^3-2)$

b) Esiste un'unica riga bianca. $3(2^3-1)(2^3-1)$

c) Esiste almeno una riga monocolore

$2^3-2 = |\text{colorazioni non monocolori di una riga}|$

Sol: $2^9-(2^3-2)^3$.

Es 2 .

a) In quanti modi possiamo formare una coppia ordinata di numeri presi da $[100] = \{1, 2, \dots, 100\}$ in modo che la loro somma sia un numero pari?

b) In quanti modi posso scegliere un insieme di 3 numeri presi da $[100] = \{1, 2, \dots, 100\}$ in modo che la loro somma sia un numero pari?

c) In quanti modi possiamo formare una tripla ordinata di numeri presi da $[100]$ (non necessariamente tutti diversi tra loro) in modo che la loro somma sia un numero pari?

Soluzione:

a) (Pari, Pari) oppure (Dispari, Dispari)

$$50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 2 \cdot 50^2.$$

b) {PARI, DISPARI, DISPARI} oppure {PARI, PARI, PARI}

$$50 \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{3}$$

c) $\langle P, P, P \rangle$ o $\langle P, D, D \rangle$ o $\langle D, P, D \rangle$ o $\langle D, D, P \rangle$

$$50^3 + 50^3 + 50^3 + 50^3 = 4 \cdot 50^3$$

Pricipio di inclusione esclusione

$$\# A \cup B = \# A + \# B - \#(A \cap B)$$

esempio:

Quanti sono i numeri da 1 a 100 non divisibili per 3 o 5?

Soluzione:

$100 \,\lfloor 3$ → 33, resto 1 — 33 multipli di 3

$100 \,\lfloor 5$ → 20 — 20 multipli di 5

$100 \,\lfloor 15$ → 6, resto 10 — 6 multipli di 15

$A =$ multipli di 3 $\qquad \# A = 33$

$B =$ multipli di 5 $\qquad \# B = 20$

$A \cup B =$ multipli di 3 o 5 $\qquad \#(A \cup B) =$

$$= \# A + \# B - \#(A \cap B) =$$

$$30 + 20 - 15 = 35$$

$100 - 35 = \#$ numeri non divisibili per 3 o 5.