Compitino di MDAL
31 maggio 2017

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis.

Parte I, con esercizi a risposta secca.
Nelle risposte del tipo SI/NO, le risposte errate contano -1

1. (a) (Punti 1) Si calcoli il seguente prodotto fra matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) (Punti 1) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base standard, è la matrice calcolata al punto precedente. Trovare una base di $Ker\ T$ e di $Imm\ T$.

2. (Punti 2) Determinare il resto della divisione per 4 di $\sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} 2^{9-i} 3^i$.

3. Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Siano $v_1 = (1, -1, 2, -2)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ vettori di $\mathbb{R}^4$ (scritti in riga per motivi di spazio).

   (a) (Punti 1) Trovare una base di $(Span\ (v_1, v_2))^{\perp}$.

   (b) (Punti 1) È vero che, comunque si prendano due vettori v_3, v_4 linearmente indipendenti in $(Span\ (v_1, v_2))^{\perp}$, possiamo concludere che v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti ?

4. Si consideri una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $dim\ Ker\ L = 1$. Le seguenti affermazioni sono vere o false?

   (a) (Punti 1) Se L ha traccia uguale a 0 allora non è diagonalizzabile.

   (b) (Punti 1) Se L ha traccia 2 allora è diagonalizzabile.

   (c) (Punti 1) Se $L^2 \neq \{O\}$ allora L non è diagonalizzabile.

5. (Punti 2) Calcolare il massimo comune divisore dei polinomi a coefficienti razionali $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

6. Sia X un insieme con 10 elementi.

   (a) (Punti 1) Determinare il numero di coppie ordinate (A, B) di sottoinsiemi di X.

   (b) (Punti 2) Determinare il numero di coppie ordinate (A, B) di sottoinsiemi di X tali che $A \cup B$ ha esattamente 3 elementi.

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizi con risposta da motivare dettagliatamente

Esercizio 1 (Punti 10). 1. Calcolate $\phi(21)$ dove ϕ è la funzione di Eulero.

2. Stabilite se esiste $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv 1 \mod 21$, tale che $a^7 \equiv 1 \mod 21$.
3. Trovare tutte le soluzioni intere della congruenza $19^x \equiv 1 \mod 21$.
4. Trovate tutte le soluzioni intere della congruenza $19^x \equiv 4 \mod 21$.

Esercizio 2 (Punti 10)**.** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che, rispetto alle basi standard, ha matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Stabilite se 0 è un autovalore,
2. Trovate tutti gli autovalori.
3. Trovate una base di autovettori.
4. Trovate una base ortonormale di autovettori.