BERARDUCCI studente 218 a matematica 21/02/2017

AULA A → algebra

AULA G → discreta

www.dm.unipi.it/~berardu

orario ricevimento Giovedì 10:00

email: alessandro.berarducci@unipi.it.

materiale didattico:

dispense di Gobbino (ALGEBRA)

" di Gaiffi (ALGEBRA)

dispense di Gaiffi-Berarducci (DISCRETA)

" di Gaiffi (DISCRETA)

ALGEBRA lineare

Sistemi di equazioni lineari.

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 2x+3y=5 & (R1) \\ 3x+4y=4 & (R2) \end{cases}$$

↓

devo trovare x e y che risolvano entrambe le espressioni sistema

metodo: • per sostituzione → algoritmo non efficiente.

Algoritmo per sostituzione

cerchiamo di ottenere la x in funzione di y.

R2 $\quad 3x = 4-4y$

$$x = \frac{4-4y}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}y$$

sostituisco in R1

$$2\left(\frac{4-4y}{3}\right) + 3y = 5$$

ci troviamo con una variabile sola.

$$\frac{8}{3} - \frac{8}{3}y + 3y = 5 \qquad \frac{1}{3}y = \frac{15}{3} - \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} y = 7 \\ x = -8 \end{cases}$$ trovata la y sostituisco nell'altra equazione.

$(x, y) = (-8, 7)$ unica soluzione.

Soluzioni possono essere:

- nessuna
- una
- infinite.

} perché sono sistemi lineari
↓
non ci possono essere 2 soluzioni

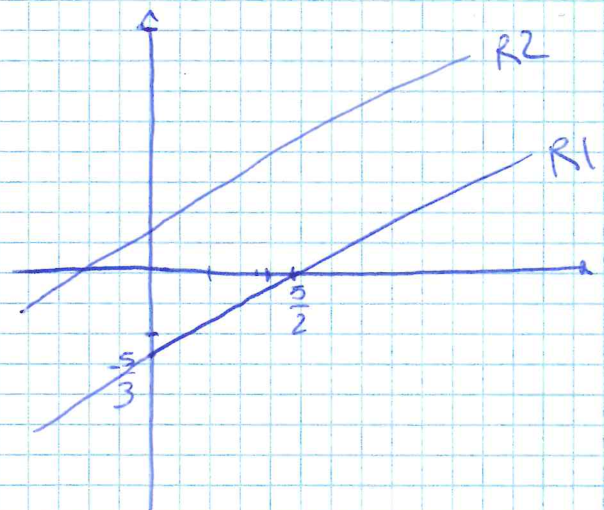
$$\begin{matrix} R1 \\ R2 \end{matrix} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6x - 9y = 13 \end{cases}$$ non ha nessuna soluzione

perché?

- algoritmo per sostituzione

$$\underset{\substack{\uparrow \\ R2}}{13 =} 6x - 9y = 3(2x - 3y) \underset{\substack{\uparrow \\ R1}}{=} 3 \cdot 5 = 15$$

a livello geometrico
le due equazioni sono 2 rette parallele



Quando abbiamo una sola soluzione allora le due rette si incontrano in un punto.

$$\begin{cases} -x + 5y = 2 & R1 \\ 2x - 10y = -4 & R2 \end{cases}$$ infinite soluzioni

si tratta di una stessa equazione.

le due rette si sovrappongono

$-x = 2 - 5y$ sostituisco in R2

$x = -2 + 5y$

$$2(5y - 2) - 10y = -4$$

$$\cancel{10y} - 4 - \cancel{10y} = -4$$ sempre vera $\forall y$.

y libera

x la scelgo.

ALGORITMO di GAUSS

Sistemi lineari: una equazione lineare è una equazione del tipo:

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

$a_0 \dots a_n$, b sono numeri fissati

combinazione lineare di x.

Un sistema lineare è un sistema di tante equazioni lineari

Si può scrivere sotto forma di matrici.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

ci sono m equazioni con n incognite.

$$\begin{cases} \overset{a_{11}}{2x} + \overset{a_{12}}{3y} + \overset{a_{13}}{4z} = 7 \\ \overset{a_{21}}{5x} + \overset{a_{22}}{y} - \overset{a_{23}}{z} = 0 \\ \overset{a_{31}}{3x} - \overset{a_{32}}{y} \quad \underset{\varnothing}{\overset{a_{33}}{|}} = 8 \end{cases}$$

rappresento sottoforma di matrice

matrice dei coefficienti

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

matrice aggiunta

coefficienti delle equazioni.

termini noti.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

matrice associata

regole dell' algoritmo di GAUSS

applicabile sia ai sistemi che alle matrici

Due sistemi lineari sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

$$\textcircled{=} \quad 2x = 4 \qquad x = 2$$

mai moltiplico per $\varnothing$ perché mai potrei tornare indietro.

Attraverso delle operazioni devo riuscire a risolvere il sistema

Le seguenti operazioni generano un sistema equivalente:

1) scambio due equazioni → l'ordine: $\begin{matrix} R1 \\ R2 \end{matrix} = \begin{matrix} R2 \\ R1 \end{matrix}$

2) moltiplico un'equazione per un numero $\neq 0$.

3) <u>sommo un'equazione a un'altra</u>

$$\begin{cases} x+y-3z=0 & R1 \\ 3x+2y-z=5 & R2 \\ 2x-y \quad =6 & R3 \end{cases}$$

usiamo R2

$R2 := R2 - 3R1$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 0-y+8z=5 \\ 2x-y \quad =6 \end{cases}$$

$R3 := R3 - 2(R1)$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ -y+8z=5 \\ 0-3y+6z=6 \end{cases}$$

agisco con le due equazioni che non hanno più la x perché sennò rientrerebbe in gioco:

$R3 := R3 - 3(R2)$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ -y+8z=5 \\ 0-18z=-9 \end{cases}$$

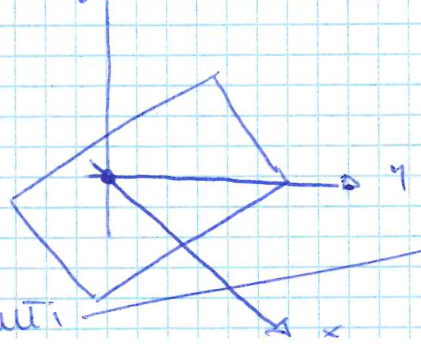
Forma ridotta a scalini

R1	3	variabili
R2	2	"
R3	1	"

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2} \\ y=-1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

unica soluzione.

a livello geometrico



R1 e R2 sono dei piani, quando si intersecano lo fanno in una retta ⇒ infiniti punti

con la retta si intersecano tutti in un punto.

Passaggi con le matrici:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad R2 - 3R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & +8 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \text{etc.}$$

quando rimane a scalini:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & -9 \end{array}\right]$$

• rimettiamo le variabili e risolviamo.

primi numeri $\neq 0$ di ogni riga PIVOT.

ESERCIZIO:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 4x + y + 2z = 6 \\ x + 2y - 18z = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & +2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & +2 & 6 \\ 1 & 2 & -18 & 1 \end{array}\right] \quad (R2) - 4(R1)$$

elimino utilizzando il pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & +2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 1 & 2 & -18 & 1 \end{array}\right] \quad R3 - R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \overset{5}{\cancel{-15}} & \overset{1}{\cancel{-3}} \end{array}\right]$$

scalini → sostituisco con le variabili

↓

semplifico ulteriormente (scalini ottimizzati)

~~per far sparire il~~ 14

22/02/2016

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 4x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + (a^2 - 19)z = a \end{cases}$$

a è un parametro ⇓ è un insieme di sistemi.

Per quali valori del parametro a il sistema ha ∅, infinite o una soluzione?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & (a^2-19) & a \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 4R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right]$$

Distinguere i casi in cui $a^2 - 16 \neq 0$

$a^2 \neq 16 \quad a \neq \pm 4$

$$z = \frac{a-4}{a^2-16}$$

faccio i "casi speciali"

caso $a=4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$0z = 0$$

ogni z va bene

z libera

il sistema ha quindi infinite soluzioni di dimensione 1 perché ho una sola variabile libera.

caso $a=-4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

$$0z = -8$$

nessuna soluzione per cui valga l'uguaglianza

a livello geometrico i due piani sono paralleli

caso $a \neq \pm 4$

$$a^2 - 16 \neq 0$$

$$(a^2-16)z = a-4$$

$$z_0 = \frac{a-4}{a^2-16}$$

$$z_0 = \frac{1}{a+4}$$

R_2 $\quad -7y + 14z = -10 \qquad -7y = -10 - \frac{14}{a+4}$

$$y_0 = \frac{+10(a+4)+14}{7(a+4)}$$

R1

$$x + 2y_0 - 3z_0 = 4$$

$$x_0 = 4 - 2y_0 + 3z_0$$ unica soluzione

Quando il numero di pivot della matrice ridotta è 2 ⇒ ci sono dei casi da distinguere

- 2 scalini anche dopo la barra ⇒ abbiamo una variabile libera ⇒ ∞ soluzioni
- 2 scalini prima della barra e 3 scalini dopo la barra ⇒ non ci sono soluzioni ← # scalini = rango della matrice ridotta ≠ dal rango della matrice aggiunta
- 3 scalini ⇒ una sola soluzione.

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$$

$\Updownarrow$ perché?

$$\begin{cases} A = B \\ A + C = D + B \end{cases}$$

essendo $A = B$ sommo nella seconda espressione una stessa quantità ⇒ l'equazione rimane invariata.

valgono entrambe le frecce ci sono le stesse soluzioni

posso risalire all'indietro sottraendo sempre la stessa quantità.

Nel caso in cui moltiplico $\cdot\, \emptyset$ non si può tornare indietro ⇒ la seconda espressione ha più soluzioni della prima.

VETTORI in $\mathbb{R}^n$

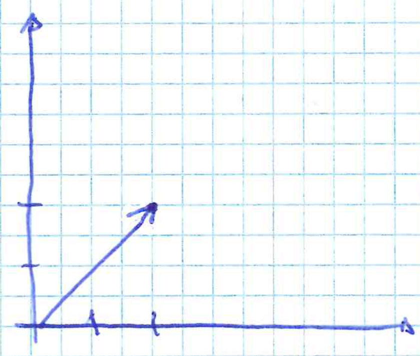
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{ \overbrace{(a,b,c)}^{\text{tripla} \Rightarrow \text{vettore}} \mid a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ .. sono SPAZI VETTORIALI

vettore = $(2,3)$
↓
freccia con orientamento

$v = (2,3)$ vettore riga

$v = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ vettore colonna

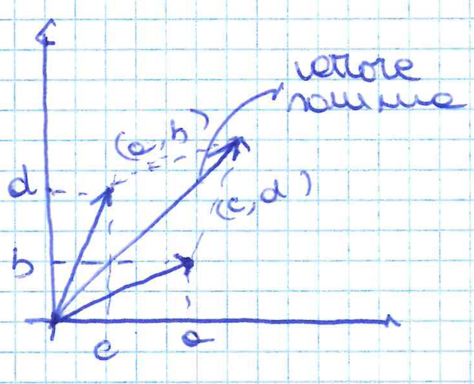


OPERAZIONI su vettori

• somma
in $\mathbb{R}^2$

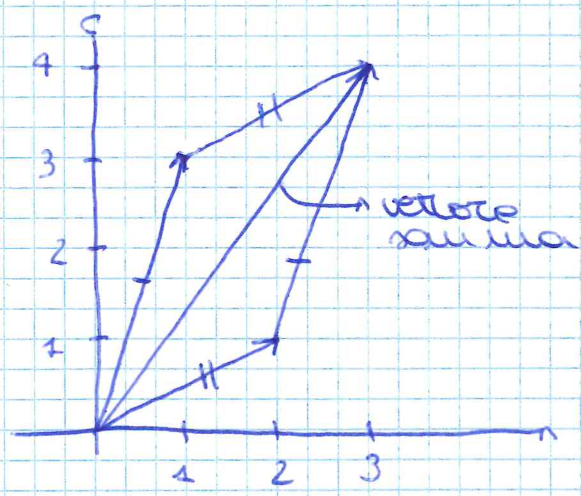
$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

a livello geometrico.



regola del parallelogramma

in $\mathbb{R}^2$



$(2,1) + (1,3) =$
$(3,4)$.

Somma di vettori
posso utilizzarla
anche solo a
livello geometrico
(senza usare numeri)

in $\mathbb{R}^3$ $\quad (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

e così via per $\mathbb{R}^4$ ...

- Prodotto

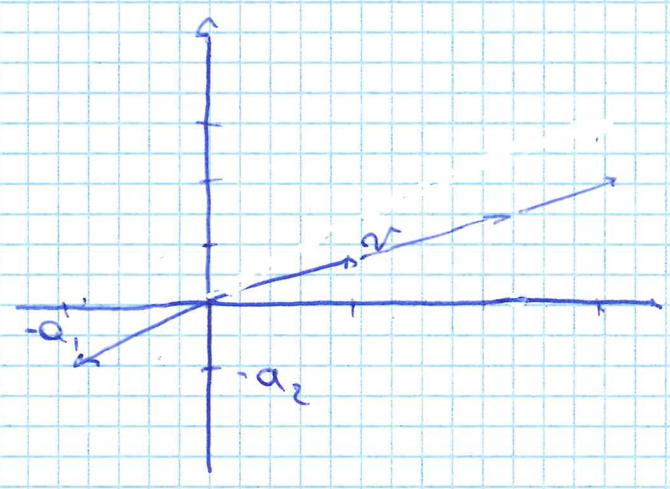
$$\text{vettore} \times \underbrace{\text{scalare}}_{\text{numeri che stiamo considerando } (\mathbb{R}) \text{ per ora}} = \text{vettore}$$

$$r \times (a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

es:

$$3\,(5, 4) = (15, 12)$$

livello geometrico → serve per definire rette, piani



$v = (a_1, a_2)$

$3v \Rightarrow$ triplica la lunghezza del vettore mantenendo la direzione

$(-1)v = (-a_1, -a_2)$

$v \in \mathbb{R}^2$ considero

$$\text{span}\{v\} = \{ r \cdot v \mid r \in \mathbb{R} \}$$

insieme infinito di vettori

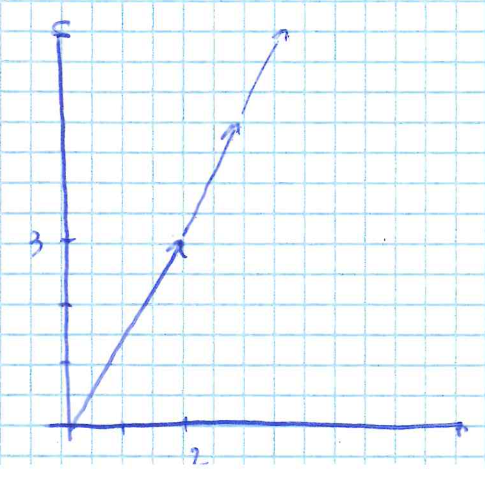
una retta

es:

$$\text{span}\{v\} = \{ r(2, 3) \mid r \in \mathbb{R} \}$$

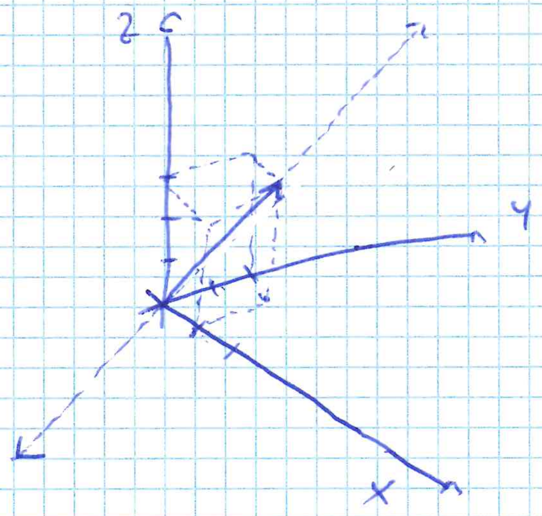
$$\text{span}\{2, 3\}$$

pensandoli come punti, sono i punti di una retta



in $\mathbb{R}^3$ $\quad v = (1, 2, 3)$

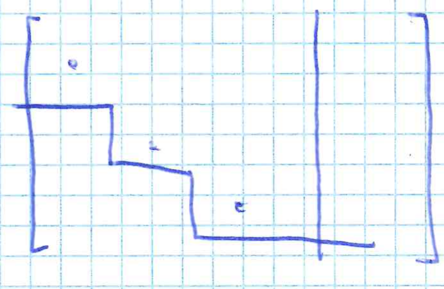
$$\text{span}\{v\} = \{ r(1,2,3) \mid r \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (r, 2r, 3r) \mid r \in \mathbb{R} \}$$



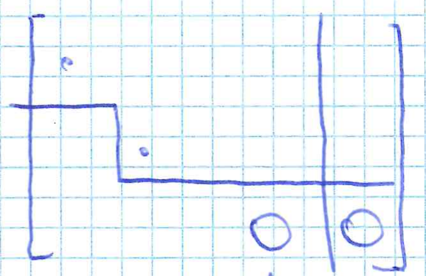
si ottiene lo stesso una retta anche in $\mathbb{R}^3$

DISGRESSIONE:

con Gauss



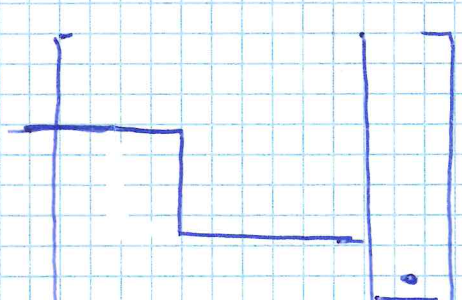
3 scalini → 1 soluzione



2 scalini → ∞ soluzioni

z libera

scelgo la z e poi vado a ricavare la y nella R_2 poi risalgo in R_1 e ricavo anche x.



2 scalini ma con 3 ⇒ nessuna soluzione.

$v_1 \in \mathbb{R}^3$

$v_2 \in \mathbb{R}^3$

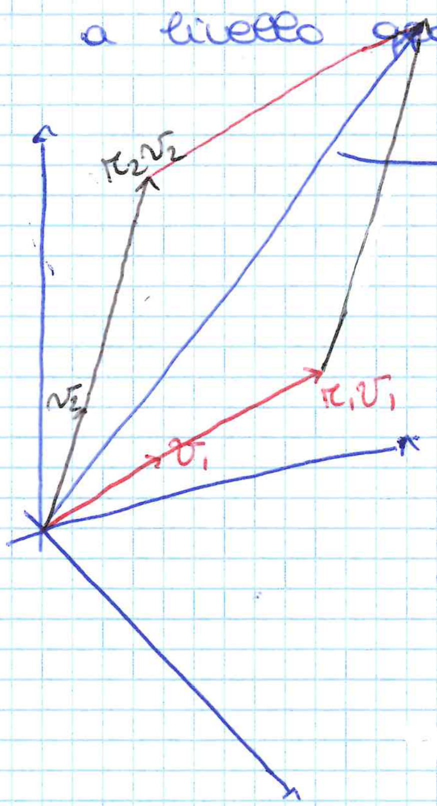
$\text{span}\{v_1, v_2\} =$

$= \{r_1 v_1 + r_2 v_2 \mid r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \in \mathbb{R}\}$

$v_1 = (1, 2, 3)$

$v_2 = (2, 3, 4)$

a livello geometrico



vettore

tutto il piano che contiene v_1 e v_2

se hanno la stessa direzione avremmo ottenuto una retta. (la stessa retta che li contiene).

tutte le figure hanno origine in $\emptyset$.

con 3 vettori

$\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\}$

ottengo uno spazio vettoriale

se $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, $v_3 \in \mathbb{R}^3$
potrei ottenere tutto $\mathbb{R}^3$
↳ con lo span

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0) \\ v_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}\right\} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

come ottengo $(2, 3, 4)$?

$$2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) =$$

$$= (2, 3, 4).$$

es:

$$v_1 = (1, 2, 3)$$
$$v_2 = (2, 3, 4)$$
$$v_3 = (1, 1, 1)$$

$\text{span}(v_1, v_2, v_3) = ?$

ottengo un piano perché v_3 è nello stesso piano di v_1 e v_2

$$v_3 = v_2 - v_1$$

$$\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{ r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 =$$
$$= r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 (v_2 - v_1) =$$
$$\underbrace{= (r_1 - r_3) v_1 + (r_2 + r_3) v_2}_{\in \text{ span}\{v_1, v_2\}} \}$$

$$\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{v_1, v_2\}$$

es:

$$v_1 = (1, 2, 3)$$
$$v_2 = (2, 3, 4)$$
$$v_3 = (1, 1, 2)$$

$\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = ?$

posso arrivare a $(5,5,4)$?

i vettori sono le colonne

$$\exists \quad x(1,2,3) + y(2,3,4) + z(1,1,2) = (5,5,4)$$

posso vederlo come un sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

se troviamo le soluzioni allora $(5,5,4) \in \text{span}\{v_1, v_2$

Matematica Discreta

Partiamo dal capitolo 5 (induzione)

Induzione / ricorsione → metodo per definire (es: fibonacci)

metodo per dimostrare ($2^n \geq n$)

i IN devono essere presenti!

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

successione di Fibonacci

$F_2 = F_1 + F_0 = 0 + 1 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$\vdots$

successione di numeri tramite ricorsione

cercare di ricondurci ai casi precedenti e dimostrare il caso nuovo

↳ • direttamente

• usare i casi precedenti.

es: di induzione

IN $\quad \underbrace{P(n)}_{\text{affermazione che riguarda } n}$ - proposizione da dimostrare

es. $P(n) = \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{n(n+1)}{2}$

capire se $P(10)$ è vera $\quad P(10) = 1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2}$

1) o calcoliamo

2) o ci riconduciamo ai casi precedenti ⇒ assumiamo che $P(9)$ sia vera.

induzione prima forma:

Dimostrare la base $\quad P(0)$

induzione $\quad \forall n \, [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ ← PASSO

concludiamo $\quad \forall k . P(k)$

P(9) vero ipoteticamente

$\Downarrow$ cerchiamo di ottenere:

P(10)

$$1+2+\dots+9+10=\frac{10\cdot 11}{2}$$

?

$$P(9)=\frac{9\cdot 10}{2}=45$$

lo prendiamo per vero

ipotesi induttiva

Visto che $1+2+\dots+9=\frac{9\cdot 10}{2}$

allora sommo 10 da entrambe le parti

$$10+1+2+\dots+9=\underbrace{\frac{9\cdot 10}{2}+10}$$

raccolgo un 10

$$\frac{10\cdot 11}{2}$$

Cerchiamo di dimostrarlo da un generico n a n+1

$$P(n)\Rightarrow P(n+1)$$

supponiamo come ipotesi che sia vera

$$P(n)=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ipotesi induttiva

sommiamo (n+1)

$$1+2+\dots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=(n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]$$

$$=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

è esattamente P(n+1) se fosse vero P(n)

Devo sapere se la base è vera:

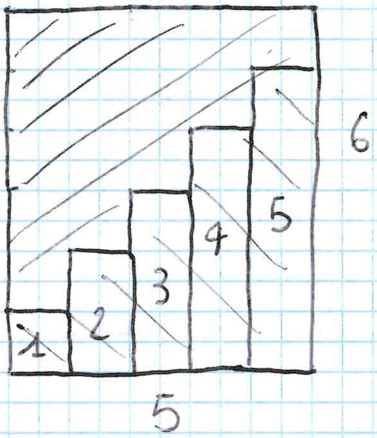
$P(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

↓

vera

Essendo vera $P(1)$, ho già dimostrato che se è vera P_n allora lo è anche $P(n+1)$ $\Rightarrow$ valgono tutti quelli che seguono $P(1)$.

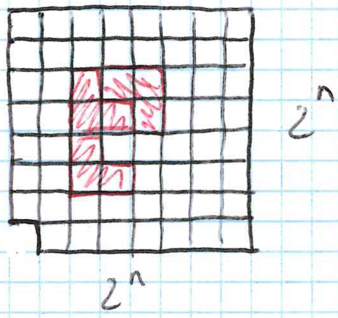
dimostrazione non induttiva



$1+2+3+4+5 = \frac{5 \cdot 6}{2}$

hanno la stessa area i due pezzi. Area del rettangolo $b \cdot h$.
Sono due parti uguali $\Rightarrow$ un pezzo $\frac{A}{2}$

es:



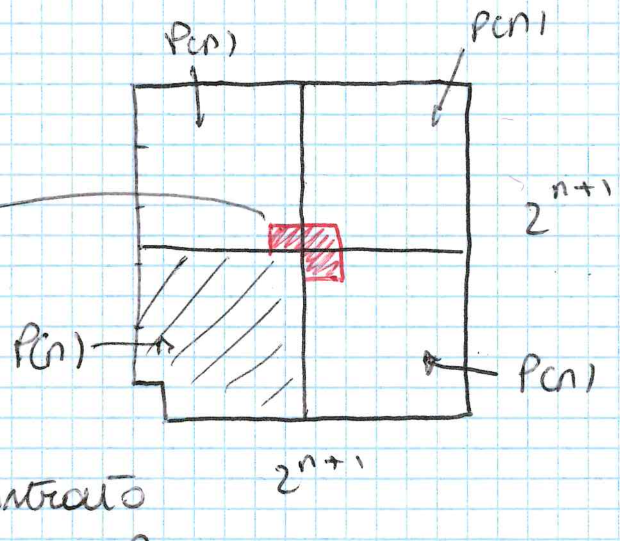
$n=3$

$P(n) \equiv$ si può ricoprire questa scacchiera $2^n \cdot 2^n - 1$ quadretto con tanti pezzi

$P(1)$  è vera

Vediamo se $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Cerco di ottenere $P(n+1)$ aiutandomi con $P(n)$ se necessario.

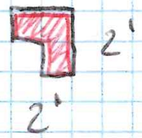
$2^{n+1} \times 2^{n+1}$



divido in 4 parti uguali

Posizionando quel quadretto ottengo 4 parti con area $P(n)$
↳ supposta vera
allora ho dimostrato $P(n+1)$ ma manca $P(n)$

Devo saper fare il caso base
in questo caso sarebbe:



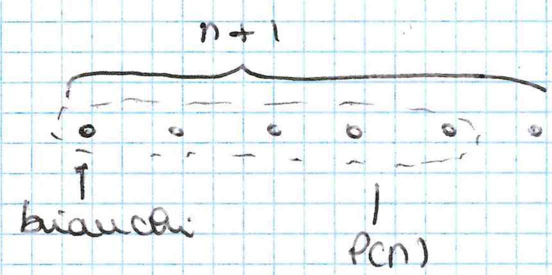
1) Dimostro il caso base

2) Dimostro il caso induttivo $\underbrace{P(n)}_{\text{con ipotesi induttiva}} \Rightarrow P(n+1)$

• In un gruppo di n persone, se una ha i capelli bianchi allora tutti hanno i capelli bianchi

$P(1)$ persona con capelli bianchi

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$?



Noi dobbiamo dimostrarlo $\underline{\underline{\forall n}}$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(1) \Rightarrow P(2)$? $P(2) \Rightarrow P(3)$ è vera

non torna

"se uno contagia se stesso allora contagia l'altro"

è mai è detto!

Per quali n, $n^2 \leq 2^n$?

$n =$	0	1	2	3	4	5
$n^2 =$	0	1	4	9	16	25
	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vee$?	$\wedge$	$\wedge$
$2^n =$	1	2	4	8	16	32

$\forall n.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Cerco di ottenere $P(n+1)$ cioè

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

Utilizzo il metodo di induzione, come ipotesi induttiva vera $n^2 \leq 2^n$

$P(n)$ vera come ipotesi

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$$

$\hookrightarrow \geq n^2$ per ipotesi

$$2^{n+1} \geq n^2 \cdot 2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

$\hookrightarrow$ è vero?

affrontiamo separatamente

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{?}{\leq} 2n^2 = n^2 + n^2$$

$$2n+1 \leq n^2$$

per $n \geq$ è vera

$$n \cdot n \geq n \cdot 3 = 2n + n \geq 2n+1$$

solo per $n \geq 3$

$\forall n \geq 3 .\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Passo vero

ma $\underset{\text{falso}}{P(3)} \Rightarrow \underset{\text{vera}}{P(4)}$ è sempre vera l'implicazione

$P(4) \Rightarrow P(5)$

↓

se sapessi fare $P(3)$ allora saprei fare $P(4)$ ma $P(3)$ mai lo so fare.

la nuova base $P(4)$ è vera e allora l'induzione vale $\forall n \geq 4$.

somma dei primi n numeri dispari

$$1+3+5+7+9+11+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1$$

P(n)

dimostriamo per induzione

$$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad ?$$

Suppongo P(n) vera ipoteticamente.

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$$

$$P(n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = (n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2i-1}_{P(n)} + 2(n+1)-1$$

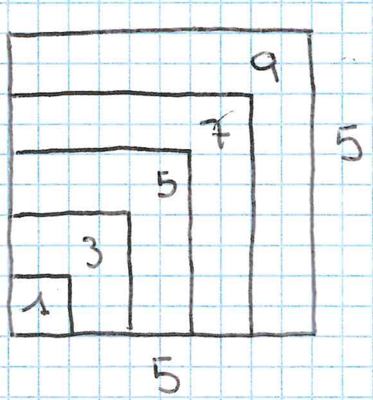
$$\Downarrow$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

dimostrato.

altri due metodi
per dimostrare (senza induzione)

1)



$5 \cdot 5 = 25$

2)

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= 2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2i}_{\text{sommatoria dei primi } n \text{ numeri}} - n = \cancel{2}\,\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n =$$

$$= n(n-1+1) = n^2$$