ALGEBRA lineare 26/04/2017

DETERMINANTE di una matrice.

matrice $n \times n$ (quadrata)

$\det(A)$ = scalare
↓
matrice = n vettori in riga

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_n \end{pmatrix}$$

es: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Ci sono <u>regole</u> per calcolare il determinante.

① Gauss.

Se ho una matrice I_n (con soli 1 sulla diagonale e poi tutti $\emptyset$)

il $\det(I_n) = 1$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} = 1$$

Se ho due righe uguali il determinante è $= \emptyset$.

$$\det \begin{pmatrix} v \\ \hline \vdots \\ \hline v \\ \hline \vdots \end{pmatrix} = \emptyset.$$

Se prendo il determinante di una matrice del tipo:

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \\ \hline \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ v_1 \\ \hline \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ v_n \\ \hline \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

la riga i-esima è una "cosa" lineare. Una combinazione di altri vettori (già in matrice).

es: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

la prima riga la posso vedere come

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

quindi: $\underbrace{a\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}} + b\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(c,d) = c(1,0) + d(0,1)$$

quindi $\underbrace{c\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\Downarrow\, 0} + \underbrace{d\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Downarrow\, d}$

$$ad + b\underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}}$$

$$(c,d) = c(1,0) + d(0,1)$$

$$c\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{d\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Downarrow\, 0}$$

$\boxed{\text{• se scambio due righe si inverte il segno.}}$

$$-c\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -c$$

$$ad - cb = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dimostrazione:

$$\det\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

se sommo i due determinanti il risultato sarà $= \emptyset$.

$$\det\begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_2 + R_1 \\ \text{etc} \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per linearità}}}{=} \det\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ \text{etc} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} R_2 \\ R_2 + R_1 \\ \text{etc} \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\cancel{\det\begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_1 \\ \hline \text{etc} \end{pmatrix}}}_{0} + \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \text{etc} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} R_2 \\ \hline R_1 \\ \hline \text{etc} \end{pmatrix} + \underbrace{\cancel{\det\begin{pmatrix} R_2 \\ \hline R_2 \\ \hline \text{etc} \end{pmatrix}}}_{0}$$

righe uguali

Sappiamo che questa somma è $= \emptyset$.
Quindi i due determinanti sono l'opposto.

Per ogni coppia di righe scambiate si cambia il segno.

*devo quindi contare il numero di scambi che devo fare

es:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{cambio segno}]{3/1} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{cambio segno}]{2/3}$$

$$+\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

anche facendo mosse in più (inutili) il segno sarà sempre quello rimanente con il minimo numero di mosse necessarie ad arrivare alla fine

teorema

Se una riga è combinazione lineare di altre il det = 0.

dimostrazione:

$$A = \begin{pmatrix} aR_2 + bR_4 \\ \hline R_2 \\ \hline R_3 \\ \hline R_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

per linearità

$$\det(A) = a \cancel{\det\begin{pmatrix} R_2 \\ \hline R_2 \\ \hline R_3 \\ \hline R_4 \\ \vdots \end{pmatrix}} + b \cancel{\det\begin{pmatrix} R_4 \\ \hline R_2 \\ \hline R_3 \\ \hline R_4 \\ \vdots \end{pmatrix}} = 0$$

Teorema: vale il viceversa

n vettori in $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti se e solo se il determinante della matrice associata è uguale a $\emptyset$.

$$\det\begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{sono dipendenti.}$$

il det di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi della diagonale

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

dimostrazione

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = ab\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =$$

$$= abc \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = abc.$$

il det di una matrice a scalini del tipo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = a \cdot d \cdot f$$ elementi sulla diagonale.

dimostrazione:

$$= \underbrace{f \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{linearità rispetto all'ultima riga.}} = f d \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + f e \underbrace{\cancel{\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{0}$$

$$= f d a \underbrace{\cancel{\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}}_{1} + f d b \underbrace{\cancel{\det\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}}_{0} + f d c \underbrace{\cancel{\det\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}}_{0}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = f d a$$

vale anche con $\emptyset$ sopra la diagonale

Per matrici triangolari (superiori o inferiori) il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

L'effetto delle mosse di Gauss:

$$\det\begin{pmatrix} R_1 + aR_2 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + a\cancel{\det\begin{pmatrix} R_2 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \end{pmatrix}}^{\,0}$$

non c'è variazione, il determinante non cambia facendo le mosse di Gauss. Il primo vettore R_1 non ha un coefficiente $\neq 1$ (se lo avessi si dovrebbe portare fuori).

esercizi:

matrici 3x3 — Formula di Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}$$

$-$ $+$

$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

- scrivo accanto alla matrice la stessa matrice
- prendi il prodotto degli elementi sulle diagonali ascendenti (col segno positivo)
- prendi il prodotto degli elementi sulle diagonali discendenti (col segno negativo).

metodo di Laplace

$n \times n$ $\quad A = (a_{ij})_{\substack{i \le n \\ j \le n}}$ $\quad A_{ij}$ = matrice che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j.

- fisso una colonna o una riga

es. 3ª colonna — meglio quella con tanti zeri

$$A = \begin{pmatrix} & & a_{13} & & \\ & & a_{23} & & \\ & & a_{33} & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{n3} & & \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{13}\det A_{13} \; + \; - \; a_{23}\det A_{23} + \dots$$

il segno va in base alla somma degli indici

se pari $+$ — se dispari $-$.

In generale

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

es:

$$\det\begin{pmatrix} 13 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 9 & 4 & 1 \\ 22 & 0 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

• sviluppo in base alla 3ª riga.

$$= a_{34} \det A_{34} =$$

$$= -1 \det\begin{pmatrix} 13 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \\ 22 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

• sviluppo in base alla 2ª colonna.

$$= -1 \left(5 \det\begin{pmatrix} 13 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

• sviluppo in base alla 3ª colonna

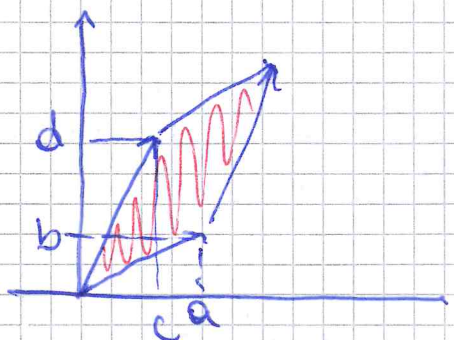
$$= -1 \left(5 \left(-1 \det\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 22 & 10 \end{pmatrix} \right) \right)$$

• sviluppo in base alla 1ª colonna

$$= -1(5(-1(13 \underbrace{\det(10)}_{10} - 22 \underbrace{\det(8)}_{8}))) =$$

$$= -1(5(-1(130 - 176))) = -46 \cdot 5 = \underbrace{-230}_{\det(A)}$$

interpretazione geometrica:



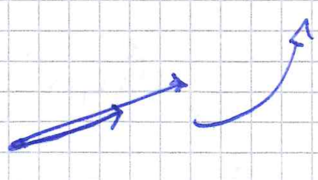
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Area del parallelogramma}$$

(anche col segno negativo).

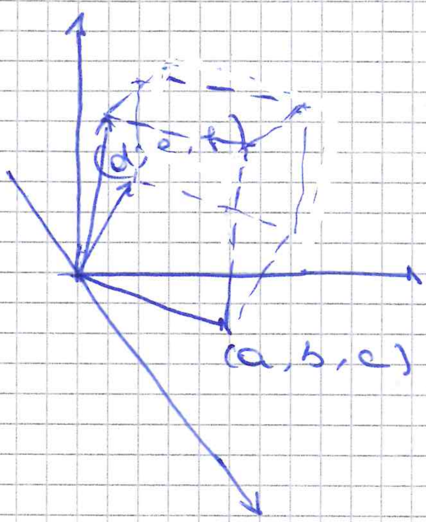
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = 0$$

• perché i due vettori si sovrappongono e il parallelogramma quindi non ha area.

• i due vettori sono linearmente dipendenti.



$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \text{volume del parallelepipedo.}$$



viene det = 0 quando uno dei 3 vettori sta nello span degli altri 2.

$\Updownarrow$

vettori dipendenti

$\Updownarrow$

dimensione del parallelogramma diminuisce.

es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ calcolare il determinante di A.

• col gauss prima riduco a scalini

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$ per ora non ho cambiato il det perché è una mossa standard.

$$R_3+R_2 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6$$

$\hookrightarrow$ matrice triangolare

Se non faccio solo mosse standard:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow -\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{tiro fuori il 3}$$

$$-3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

non posso moltiplicare $\cdot \frac{1}{3}$, porto direttamente fuori il coefficiente.

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con base standard.

CORREZIONE COMPITINO

riscrivere L rispetto a nuove basi

$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \end{pmatrix}$

$L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ applico la L con basi standard

β_1 ora devo scrivere il vettore in base alla base γ.

$L \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[L]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$L\beta_2 = L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a_0 = 2$

$a_1 = 6$

$a_{n+2} = a_{n+1} + 20 a_n$

$x^2 - x - 20 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$

$a_n = A\,5^n + B(-4)^n$

$\begin{cases} a_0 = A + B = 2 \\ a_1 = 5A + 4B = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 2 - B \\ 5(2 - B) - 4B = 6 \end{cases}$ $10 - 5B - 4B = 6$

$-9B = -4$

$\begin{cases} B = \frac{4}{9} \\ A = \frac{14}{9} \end{cases}$

matematica discreta 27/04/2017

Lemma $(a, mn) = 1 \Leftrightarrow (a,m) = 1 \wedge (a,n) = 1$

Se a non ha fattori comuni con mn (un prodotto) allora essi non ha nemmeno con i singoli fattori

dimostrazione:

$\Rightarrow$ i divisori di m/n sono anche divisori di m·n

$\Leftarrow$ uso la identità di Bezout e la moltiplico

$$Pa + Qm = 1 \quad , \quad P'a + Q'n = 1$$

$\downarrow$ moltiplico

$$a(PP'a + PQ'n + P'Qm) + mn(QQ') = 1$$

combinazione lineare tra a e mn che da $1 \Rightarrow (a, mn) = 1$

non hanno fattori comuni

---

teorema: dimostrato

$\varnothing(mn) = \varnothing(m) \cdot \varnothing(n) \Rightarrow$ [$\varnothing$ di un prodotto = al prodotto di $\varnothing$]

quando mn sono relativamente primi

---

dimostrazione che F è biunivoca:

$x \in \mathbb{Z}$

$x \bmod a \Rightarrow$ il resto della divisione tra x e a. $(7 \bmod 3 = 1)$

$(a, b) = 1$

$$F : \mathbb{N}_{ab} \rightarrow \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$$

$$x \rightarrow \langle x \bmod a, x \bmod b \rangle$$

$$\text{es: } 7 \rightarrow \langle 1 , 2 \rangle$$

F è biunivoca.

Surgettiva. Dati $\langle u, v \rangle \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$

Per trovare $x \in \mathbb{N}_{ab}$ tale che $F(x) = \langle u, v \rangle$ devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \equiv u \ (a) \\ x \equiv v \ (b) \end{cases}$$

è anche iniettiva perché se $F(x_0) = F(x_1) = \langle u, v \rangle$

devo dimostrare che $x_0 = x_1$

Quindi $F(x_0) = \langle u, v \rangle$ $\quad$ $F(x_1) = \langle u, v \rangle$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x_0 \equiv u \ (a) \\ x_0 \equiv v \ (b) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \equiv u \ (a) \\ x_1 \equiv v \ (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 \equiv x_1 \ (a) \\ x_0 \equiv x_1 \ (b) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 \equiv x_1 \ (ab)$$

ma quindi $x_0 = x_1$ perché entrambi sono minori di ab

$\mathbb{N}_a^*$ = elementi di $\mathbb{N}_a$ invertibili mod a

$$\Downarrow$$

$\mathbb{N}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ $\quad$ $(x, a) = 1$.

$\# \mathbb{N}_{15}^* = 8 = \phi(15)$ "fi" di Eulero.

in generale

$$\# \mathbb{N}_a^* = \phi(a)$$

$F: \mathbb{N}_{ab}^* \to \mathbb{N}_a^* \times \mathbb{N}_b^*$ $\quad$ funzione di prima ma considero solo gli invertibili.

$x \to \langle x \bmod a, x \bmod b \rangle$

$x \in \mathbb{N}_{ab}^* \Rightarrow (x, ab) = 1$

per il lemma precedente

$$(x, a) = 1 \wedge (x, b) = 1$$

x è invertibile mod a e mod b

$(x, a) = 1$

$\parallel$ $\longrightarrow$ perché il mcd non cambia sottraendo ad uno multipli dell'altro.

$(x \bmod a, a) = 1$

es: $\mathbb{N}_{15} \to \mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_5$

$7 \to \langle 1, 2 \rangle$ $\longrightarrow$ invertibile mod 5.

7: invertibile mod 15 $\quad$ 1: invertibile mod 3

Quindi F in un dominio più piccolo ($\mathbb{N}^*_{ab}$)
è comunque biunivoca
↓
dimostrazione grazie al lemma.

$\Rightarrow \# \mathbb{N}^*_{ab} = \#(\mathbb{N}^*_a \times \mathbb{N}^*_b)$ (ci sono tanti elementi invertibili quante coppie di elementi invertibili)

$= \# \mathbb{N}^*_a \times \# \mathbb{N}^*_b$

cioè $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ teorema

teorema di Eulero:

$(x, n) = 1 \qquad x^{\phi(n)} \equiv 1 \ (n)$

dimostrazione:

caso in cui c'è ripetizione di numeri primi

$(7^{\phi(15)} \equiv 1 \ (15) \Rightarrow 7^8 \equiv 1 \ (15))$

caso facile

Considero una funzione $G_x : \mathbb{N}^*_n \to \mathbb{N}^*_n$

$a \to a \cdot x \bmod n$

es di G:

$G_7 : \mathbb{N}^*_{15} \to \mathbb{N}^*_{15}$

$1 \to 7 \qquad 4 \to 13 \qquad 8 \to 11 \qquad 13 \to 1$

$2 \to 14 \qquad 7 \to 4 \qquad 11 \to 2 \qquad 14 \to 8$

sono gli stessi elementi ma permutati
⇓
la funzione è biunivoca
↓
dimostrazione:

è iniettiva? $G_x(a) = G_x(b)$

si ⇓

$ax \bmod n = bx \bmod n$

$ax \equiv bx \bmod n$

x è invertibile per ipotesi $\Rightarrow$ divido per x

$a \equiv b \bmod n \Rightarrow \underline{a = b}$.

è surgettiva perché è una funzione che va da un insieme finito allo stesso insieme finito.

$\Rightarrow G_x$ è biunivoca.

grazie alla G_x posso dimostrare Eulero:
Prendo il prodotto di tutti gli elementi invertibili

$$c = \Big(\prod_{a \in \mathbb{N}_n^*} a\Big) \bmod n$$

elemento invertibile $\in \mathbb{N}_n^*$

es: $x = 7$ $n = 15$
$c = (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14) \bmod 15$

c = al prodotto dei valori di arrivo $= \Big(\prod_{a \in \mathbb{N}_n^*} G_x(a)\Big) \bmod n =$

$= \prod_{a \in \mathbb{N}_n^*} (xa) \bmod n = (xa_1 \cdot xa_2 \cdot \dots \cdot xa_{\phi(n)}) \bmod n =$

$$= x^{\phi(n)} \cdot \underbrace{(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\phi(n)})}_{\text{è esattamente } c}$$

$a_1 \cdot \dots \cdot a_{\phi(n)} \equiv x^{\phi(n)} (a_1 \cdot \dots \cdot a_{\phi(n)}) \bmod n$

prodotto dei numeri — prodotto del risultato

$$1 \equiv x^{\phi(n)} \ (n).$$

CALCOLO COMBINATORIO.

X insieme finito
$\# X$ = numero di elementi di $X = |X|$

es: $|\mathbb{N}| = +\infty$

$|\{\mathbb{N}\}| = 1$ — devi contare cosa (quanti elementi) c'è dentro le parentesi graffe più esterne

$|\{\{2,3,4\}, \{5,6\}, \{8,9,22,7\}\}| = 3$

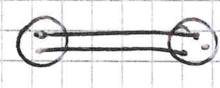
$|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| \leq k$

$|\{2,2,3\}| = 2$ non 3 — gli stessi elementi in un insieme si contano una volta sola.

$|X| = |Y| \iff \exists f \ (f : X \to Y$ biunivoca$)$

due insiemi hanno lo stesso numero di elementi contare = trovare corrispondente biunivoca.

Se $f: X \to Y$ iniettiva, posso dire che



$$|X| \leq |Y|$$

Se $f: X \to Y$ surgettiva, posso dire che

$$|X| \geq |Y|$$

la funzione viene considerata come un insieme di coppie, le coppie non possono avere uguale "primo elemento". (ma devono essere tutti diversi)

Il "primo elemento" deve appartenere al dominio.

es:

$$\begin{array}{c} X = \{2,\ 3\} \\ \downarrow \ \swarrow f \\ Y = \{2,\ 3,\ 4\} \end{array}$$

$f: X \to Y$ è iniettiva se $\forall a, b \in X \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

$f: X \to Y$ è surgettiva se $\forall b \in Y \ \exists a \in X \quad f(a) = b$.

Contiamo

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

$$X \times Y = \{(a,b) \mid a \in X,\ b \in Y\}$$

Quante sono le funzioni da X a Y?

cioè $\#\{f \mid f: X \to Y\} = ? = |Y|^{|X|}$

per giocare una schedina

ho 13 scelte $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 13 \end{array} \right.$

$\#\{f \mid f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{N}_b \text{ iniettive}\} =$ $\emptyset$ se $a > b$; se $a < b$ ne ho: $\dfrac{b!}{(b-a)!}$

$\mathbb{N}_a = \{1, \ldots, a\} \quad \#\mathbb{N}_a = a$ in quanti modi posso produrre una funzione?

$f(1) = ?$ ho b scelte

$f(2) =$ $b-1$ scelte

$\vdots$

$f(a) =$ $b-(a-1) = b-a+1$ scelte

quindi ho in totale $b(b-1)\cdot(b-1)\cdot \ldots \cdot(b-a+1)$ funzioni iniettive

$$\Downarrow$$

$$\frac{b!}{(b-a)!}$$

es:

$\#\{f \mid f: \mathbb{N}_5 \to \mathbb{N}_7 \text{ iniettive}\} = ?$

$f_1 = ?$ 7 scelte

$f_2 = ?$ 6 "

$f_3 = ?$ 5 "

$f_4 = ?$ 4 "

$f_5 = ?$ 3 "

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{(7-5)!}$