$f(1) = ?$ ho b scelte
$f(2) =$ b-1 scelte
⋮
$f(a) = b-(a-1) = b-a+1$ scelte

quindi ho in totale $b(b-1)\cdot(b-1)\cdot\ldots\cdot(b-a+$
funzioni iniettive

$$\Downarrow \quad \frac{b!}{(b-a)!}$$

es: $\#\{f \mid f: \mathbb{N}_5 \to \mathbb{N}_7 \text{ iniettive}\} = ?$

$f_1 = ?$ 7 scelte
$f_2 = ?$ 6 "
$f_3 = ?$ 5 "
$f_4 = ?$ 4 "
$f_5 = ?$ 3 "

$7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = \frac{7!}{(7-5)}$

ALGEBRA lineare 2/05/2017

MATRICE INVERSA

A matrice $n\times n$ (quadrata)
Una matrice B si dice inversa di A se

$A\cdot B = I = B\cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots \end{pmatrix}$$

non sempre esiste, se esiste la chiamo A

$\Downarrow$

$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$

Se L è un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
fisso delle basi, trovo la matrice associata
$[L]^{-1}$ esiste se e solo se L è biunivoca

Inversa matrice $\Leftrightarrow$ L invertibile.

Teorema se $A\cdot B = I$
$\Rightarrow B\cdot A = I$

(basta guardare un prodotto per vedere B è l'inversa) ho $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \xleftarrow{L^{-1}} \mathbb{R}^n$ $\quad L(v)$ w

$L^{-1}(w) = v$

$[L^{-1}] = [L]^{-1}$

$$[L^{-1} \circ L] = [L^{-1}] \cdot [L] = [id]$$

è esattamente identità

$$[id] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n)}$$

il prodotto delle matrici è proprio la matrice identità

$\Downarrow$

$[L^{-1}]$ è la matrice inversa

Se applico ad una matrice un vettore

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ ottengo}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ se applico l'inversa ottengo di nuovo il input iniziale.

Calcolo della matrice inversa.

Algoritmo:

$$\underbrace{\underset{n\times n}{(A} \mid \underset{n\times n}{id)}}_{n\times(2n)} \xrightarrow[\text{di riga}]{\text{mosse}} (id \mid A^{-1})$$

es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A \quad \text{trovare } A^{-1} \text{ (se esiste)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ cerco la forma a scalini ridotta

• cerco gli ∅ sopra i pivot:

$$\xrightarrow{R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\cdot(-1)]{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Per verificare $B = A^{-1}$ devo moltiplicare

$(\ id \mid B\ )$

$B \cdot A^{-1} = id$ (deve venire fuori id)

A^{-1}

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

se ho A^{-1} non devo fare due sistemi diversi per calcolare (v) diversi.

matrici elementari

↓

matrici con 1 sulla diagonale

1°) $T_{ij}(r) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \emptyset \\ & & \ddots & \\ & r & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

con un numero diverso da ∅ sotto la diagonale

2°) $T_{ij} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array}$

3°) $\begin{pmatrix} 1 & & & & \emptyset \\ & 1 & & & \\ & & r & & \\ & \emptyset & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = T_i(r)$

$$T_{ij}(r) = I\,[R_i \leftarrow R_i + rR_j]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i = 2$$

$\uparrow$
$j = 1$

il passaggio è $R_2 \leftarrow R_2 + rR_1$

$T_{ij}(r) \cdot I = I[R_i \leftarrow R_i + rR_j]$ 1ª

operazione che vale per qualunque M al posto di I

se M = matrice $n \times n$ $\quad T_{ij}(r) \cdot M = M[R_i \leftarrow R_i + rR_j]$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ r & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$T_{21}(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ra_{11} & a_{22} + ra_{12} & a_{23} + ra_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

le mosse di Gauss equivalgono a moltiplicare a sinistra per una matrice elementare

$$M \underset{R_1 + rR_j}{\leadsto} M' = T_{ij}(r) M$$

i 3 tipi di matrici elementari equivalgono alle 3 mosse di Gauss.

2ª

$T_{ij} \cdot I = I(R_i \leftrightarrow R_j)$ $\quad$ i j sono indici di riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

funziona con M generica al posto di I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

3ª equivale a moltiplicare una riga per uno scalare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [R_1 \leftarrow rR_1] = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_1(r).$$

$$M \xrightarrow[R_i \leftarrow rR_i]{} M' = T_i(r)\,M.$$

Fare una mossa di riga equivale a moltiplicare a sinistra per una matrice elementare.

$$T_i(r) \cdot M = M[R_i \leftarrow rR_i]$$

- Cerco una formula per trovare l'inversa di una matrice 2x2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \cdot a]{R_1 \cdot c} \left(\begin{array}{cc|cc} ca & cb & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} ca & cb & c & 0 \\ 0 & ad-cb & -c & a \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{ad-cb} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} ca & cb & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right)$$

tutte le divisioni sono possibili se denominatore $\neq 0$. $\Rightarrow$ altrimenti A^{-1} non esiste.

$$\xrightarrow{R_1 - cbR_2} \left(\begin{array}{cc|cc} ca & 0 & c + cb \cdot \frac{c}{ad-cb} & -\frac{a}{ad-cb} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right)$$

$$R_1 \cdot \frac{1}{ca} \longrightarrow \left(\quad \right.$$

$\underline{ad - cd} = \det(A) \Rightarrow \boxed{A^{-1} \text{ esiste se e solo se } \det \neq 0}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-cd}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\det = ad - cd$

Con una matrice $n \times n$?

Si può sempre fare con i determinanti:

$A = (a_{ij})_{ij}$ 1) calcolo

$A_{ij} = A - \text{riga } i - \text{colonna } j.$

e faccio il determinante $= b_{ij}$

2) creo una nuova matrice

$\det(A_{ij}))_{ij}$

3) faccio la Trasposta (scambio righe con colonne)

4) divido per il determinante. $\Rightarrow$ ottengo l'inversa A

es: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \boxed{d} & \boxed{-c} \\ \boxed{-b} & \boxed{a} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ det. che ottengo cancellando la 1ª riga e la 2ª colonna

determinante che ottengo cancellando la 1ª colonna e la 1ª riga

· Trasposta $\rightarrow$ 1ª riga $\Rightarrow$ 1ª colonna
2ª riga $\rightarrow$ 2ª colonna

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-cb} = A^{-1}$$

Dimostrazione che (il metodo di Gauss funziona)

$(A|I) \xrightarrow[\text{riga}]{\sim} (I|B) \Rightarrow B = A^{-1}$

$T_{ij}(r) = [R_i + rR_j]$

$T_{ij} = [R_i \leftrightarrow R_j]$

$T_i(r) = [rR_i]$

le mosse di riga equivalgono a matrici elementari

ogni mossa equivale alla moltiplicazione di matrici elementari

se applicate ad A $= Id$

se applicate a $Id = B$

$E_1, \ldots, E_k$ matrici elementari corrispondenti alle mosse di riga che ho fatto

$(A|I) \rightsquigarrow (I|B)$

$A \rightsquigarrow I$ $\qquad$ $I \rightsquigarrow B$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$(\underbrace{E_k \ldots E_2 E_1}) A \rightsquigarrow I$ $\qquad$ $(E_k \ldots E_2 E_1) I \rightsquigarrow B$

per definizione è l'inversa di A.

ma la moltiplicazione di tutte le matrici elementari è proprio $\underline{\underline{B}}$

$$(E_k \dots E_1) I = B$$

$\downarrow$

moltiplicazione che non cambia perché I lascia invariata una matrice.

M $n \times k$

riga $R_i \leftarrow R_i + \mu R_j$

$$M' = [R_i \leftarrow R_i + \mu R_j] M$$

cioè non vale solo per Id ma anche per matrici non quadrate.

Esistono sempre le matrici inverse delle matrici elementari.

es:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ? = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$
corrisponde alla mossa inversa

$\downarrow$

questa matrice equivale alla mossa:

$R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1$

$$M \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1} M' = M[R_2 + 5R_1]$$
$$M' \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1} M$$

$$M = [R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1] M'$$

$$M = [R_2 - 5R_1][R_2 + 5R_1] M$$

con $M = Id \Rightarrow I = [R_2 - 5R_1][R_2 + 5R_1]$ — I che non fa nulla

queste due matrici sono inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underbrace{5+(-5)}_{0} & 1 \end{pmatrix} \text{ giusto} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

l'inversa della matrice elementare è la matrice elementare della mossa inversa.

Se moltiplico a destra

$M\,T_{ij}(r) = ?$ $\Rightarrow$ mosse di <u>colonna</u>

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ r & 1\end{pmatrix} = [R_2 + rR_1]\,I$$

$\Updownarrow$ (=)

oppure

$$= [C_1 + rC_2]\,I$$

si scambiano gli indici

$$M \xrightarrow[C_i + rC_j]{} M[C_i + rC_j] = [R_j + rR_i]\,M$$

matematica discreta 3/05/2017

$$f:\{a_1,\dots,a_k\} \to \{b_1,\dots,b_n\} \text{ iniettive}$$

Quante sono?

Se $k>n$ $\Rightarrow$ nessuna.

Se $k \leq n$ $\Rightarrow$ $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

$f(a_1) = ?$ n possibilità

$f(a_2) =$ $n-1$ "

$\vdots$

$f(a_k) =$ $n-(k-1)$ possibilità

si moltiplicano le possibilità

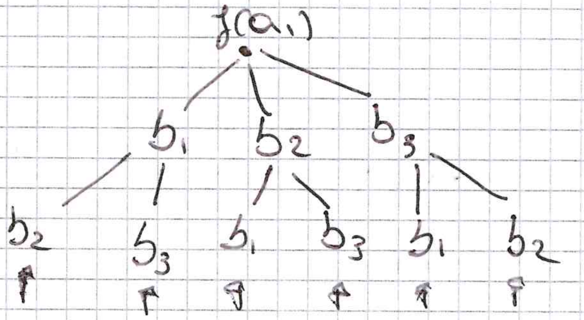
$\Downarrow$

$n(n-1)\dots(n-(k-1))$

Perché moltiplichiamo le possibilità?

$k=2$ $n=3$ $f(a_1) = ?$

$f(a_2) = ?$



sono $6 = 3\cdot 2$

Tutte le $f:\{a_1 \dots a_k\} \to \{b_1,\dots,b_n\}$ sono n^k

Successioni binarie di n elementi:

$$\underbrace{01000110}_{n} \Rightarrow f:\{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$$

si possono vedere come funzioni

$f(1) = 0$
$f(2) = 1$ $\quad$ 2^n successioni.
$f(3) = 0$
$\vdots$
$f(n) = 0$

le funzioni iniettive sono successioni senza ripetizioni.
es: targhe automobilistiche.

CS 152 JD
quante targhe possibili?

ALBERO DELLE SCELTE

scelte
1ª lettera → 26
2ª lettera → 26
1ª cifra → 10
2ª cifra → 10 $\quad$ $\underbrace{26^4 \cdot 10^3}_{\text{possibilità}}$
3ª cifra → 10
3ª lettera → 26
4ª lettera → 26

Quali sono le parti di un insieme.

$P(\{a_1, \dots, a_k\})$

$P(X) = \{Y \mid Y \in X\}$

$P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\# P(\{0,1\}) = 4$

$\# P(\{\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{distinti}}\}) = 2^n$

Per creare un sottoinsieme di $\{a_1, \dots, a_n\}$ che scelte devo fare?

$X \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$

Devo decidere se ci metto a_1 (sì o no), a_2 (sì o no) ecc.

Per ogni elemento ho 2 scelte
⇓
le scelte si moltiplicano ⇒ 2^n

faccio una scelta (tra 2 possibilità) per gli n elementi.

Funzione caratteristica (di X)

se $X \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$

$$\chi_X : \{a_1, \dots, a_n\} \to \{0, 1\}$$

$$\chi_X(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i \notin X \\ 1 & \text{se } a_i \in X \end{cases}$$

es:

$X \subseteq \{a, b, c\}$

$X = \{a, c\}$ $\qquad \chi_X : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$

$\chi_X(a) = 1$

$\chi_X(b) = 0$ $\quad$ $\Big\rangle$ appartengono ad X

$\chi_X(c) = 1$

c'è una corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi e l'insieme delle funzioni caratteristiche.

quindi (tra $\mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_n\})$ e $\{f \mid f : \{a_1, \dots, a_n\} \to \{0,1\}\}$)

$\Downarrow$

$$F : \mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_n\}) \to \{f \mid f : \{a_1, \dots, a_n\} \to \{0, 1\}\}$$

$$F(X) = \chi_X$$

per dimostrare che è biunivoca trovo l'inversa.

$$G = F^{-1} : \{f \mid f : \{a_1, \dots, a_n\} \to \{0,1\}\} \to \mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_n\})$$

$$F^{-1}(f) = X = \{a_i \mid f(a_i) = 1\}$$

$\left.\begin{array}{l} G(F(X)) = X \\ F(G(f)) = f \end{array}\right\}$ se è vero $\Rightarrow$ F è biunivoca.

Quante sono le funzioni

$f : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{a_1, \dots, a_k\}$ iniettive?

$f(a_1) \to k$ scelte

$f(a_2) \to k-1$ scelte

$\vdots$ $\qquad \Rightarrow \underline{\underline{k!}}$ $\qquad$ sono le permutazioni

$\downarrow$

$f(a_k) \to 1$ scelta $\qquad$ funzione biunivoca

Quanti sono i sottoinsiemi di $\{a, b, c, d\}$ con 2 elementi?

In totale sono 2^4 ma con soli 2 elementi?
In questo caso non conviene fare l'albero.
Visto che abbiamo pochi elementi posso elencare tutte le coppie:

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{a,d\} \quad \{b,c\}$$
$$\{b,d\} \quad \{c,d\} \Rightarrow 6$$

Quando trattiamo con numeri più grandi abbiamo un altro metodo:

è molto più facile contare le successioni di 2 elementi (diversi) presi da $\{a, b, c, d\}$

ab
ba $\Rightarrow 12$
ac
ca
⋮

	scelte:
1° elemento della stringa	4
2° elemento della stringa	3
	⇓
	12

stringa = funzione = successione

funzione : $\{1, 2\} \to \{a, b, c, d\}$ iniettiva (cioè senza ripetizioni)

quando ragiono con insiemi o sottoinsieme l'ordine non conta

⇓

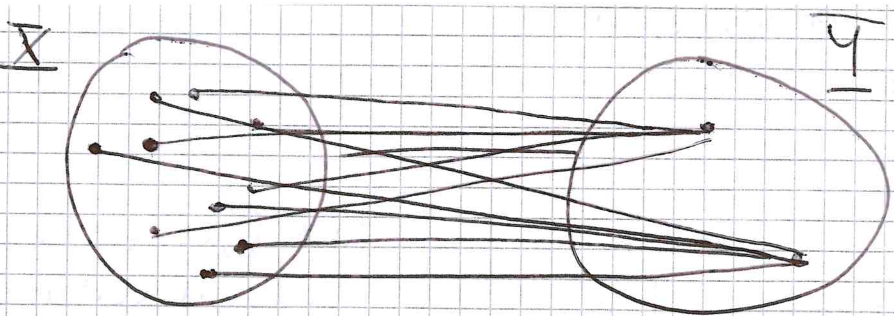
c'è la possibilità di sbagliare contando 2 volte uno stesso insieme
$\{a, b\} = \{b, a\} \Rightarrow$ conto $= 1$.

es: $F : X \to Y \quad \forall y \in Y \quad \underbrace{\# F^{-1}(\{y\})}_{\text{sono gli } x \in X \text{ che vanno a finire in } y.} = 5$

$\{x \in X \mid F(x) = y\}$

Che rapporto c'è tra

$\# X$ e $\# Y$?



5 elementi di X vanno a finire in un elemento di Y.

$\# X > \# Y \qquad \# X = 5 \cdot \# Y$

Definizione:

C^n_k = il numero dei sottoinsiemi di k elementi presi da un insieme di n elementi

$C^4_2 = 6 \qquad \{a, b, c, d\} \Rightarrow 6$ coppie. $n=4$

$k=2$

• Prima conto le stringhe senza ripetizioni di k elementi presi da n. (anche se uno stesso insieme è scritto in modo diverso conto 1).

Se $k > 0 \Rightarrow \emptyset$.

Se $k \leq n \qquad \frac{n!}{(n-k)!}$ = n° stringhe

ma devo calcolare gli insiemi

Passo da stringhe agli insiemi

$\boxed{a|b}$, $\boxed{b|a}$ $\rightarrow \{a, b\}$

$\boxed{c|d}$, $\boxed{d|c}$ $\rightarrow \{c, d\}$

⋮

• Data una stringa creo l'insieme dei suoi elementi

⇓

ottengo tutti i possibili insiemi di k da n.

Capire quante controimmagini ci sono.

↳ Quante stringhe (di k da n) producono lo stesso insieme? le permutazioni della stringa

k! stringhe producono lo stesso insieme.

Abbiamo stringhe di k elementi senza ripetizioni presi da n $\xrightarrow{\text{devo arrivare}}$ insiemi di k elementi da n ma ci sono k! stringhe che producono lo stesso insieme.

⇓

$$C^n_k = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \binom{n}{k}$$ coefficiente binomiale

Binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$ dimostrato per induzione su n.

Possiamo dimostrarlo in modo più semplice basandoci sul calcolo combinatorio.

$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ 4 fattori con 2 addendi

quando moltiplico ottengo dei monomi.
Quanti monomi di un certo tipo ottengo?
es. del tipo x^2y^2?
Devo scegliere un sottoinsieme di 2 fattori da cui scelgo l'addendo x.

$\binom{4}{2}$ coefficiente con cui compare x^2y^2.

in generale ho n fattori e devo scegliere i addendi.
$$\binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

es: Quante sono le stringhe binarie di lunghezza 10 con 3 uni?

0011001000
1110000000
⋮

fare l'albero non conviene perché è irregolare dopo la 3ª scelta.

ho 10 posizioni

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

devo scegliere un sottoinsieme delle posizioni di 3 posizioni dove mettere i tre 1.

$\{1, 2, \dots, 10\}$

$\{1,2,3\} = 1110000000$

$\{2,3,4\} = 0111000000$

$\vdots$

$\binom{10}{3}$ risultato

$= \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} =$

$= 5 \cdot 8 \cdot 3 = 120$

es: Quante sono le triple (ordinate) $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tali che $x+y+z=11$?

Devo trovare una corrispondenza biunivoca

· considero le stringhe binarie con

$\underbrace{1 \dots 1}_{x \text{ volte}} \; 0 \; \underbrace{1 \dots 1}_{y \text{ volte}} \; 0 \; \underbrace{1 \dots 1}_{z \text{ volte}}$

lunghezza massima 13, le triple sono tante quante le stringhe fatte così.

le stringhe sono $\binom{13}{11}$ o $\binom{13}{2}$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$= \frac{13 \cdot 12}{2!}$

$(13-11)!$

ci possiamo rifare a questo caso perché c'è una corrispondenza biunivoca tra le triple e l'insieme delle stringhe binarie

ALGEBRA lineare 3/05/2017

(ripasso) es: $L: V \to W$ lineare

$v_1, \dots, v_k \in V$ dipendenti (ci riferiamo all'insieme che è dipendente)

$L(v_1), \dots, L(v_n)$

sono dipendenti? Sì perché so che esistono scalari $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)$ tali che

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$

$$L(a_1v_1 + \dots + a_k v_k) = L(0) = 0$$
$$\parallel$$
$$a_1 L(v_1) + \dots + a_k L(v_k)$$

ora con $v_1, \dots, v_k$ indipendenti

$\Rightarrow L(v_1), \dots, L(v_k)$ indipendenti?

NO perché per esempio L che manda tutto in zero.

oppure che manda 2 vettore in uno stesso vettore:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad = xL\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yL\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x+y)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ 3(x+y) \end{pmatrix}$$

e se L è iniettiva? SI

L iniettiva lineare manda vettori indipendenti tra loro in vettori indipendenti.

dim: $v_1, \dots, v_k \in V$ indipendenti

$\Rightarrow L(v_1), \dots, L(v_k) \in W$ indipendenti?

suppongo che $a_1 L(v_1) + \dots + a_k L(v_k) = \bar{0}$

$$L(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = \bar{0}$$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \in V$ perché L è iniettiva e l'unico vettore che può andare in zero è $L(\bar{0})$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

corol:

$L: V \to W$ iniettiva lineare

$\underset{k}{\dim(V)} \leq \underset{n}{\dim(W)}$ dim è dato dalla cardinalità di una base

V ha una base $v_1, \dots, v_k$ (di k vettori)
se applico la L
$L(v_1), \dots, L(v_k)$ sono indipendenti
$w_1 \quad\quad w_k$
per il completamento ad una base se i vettori $w_1, \dots, w_k$ possono essere già generanti oppure no $\Rightarrow \dim(W) \geq \dim(V)$

Se L è biunivoca $\dim(V) = \dim(W)$
$\Downarrow$
vale una disuguaglianza in un verso e nell'altro. $\rightarrow$ se è biunivoca, è iniettiva sia l'inversa che L.

la sua inversa rimane lineare (da dimostrare)

Oss. Se L è lineare iniettiva e
$\dim(V) = \dim(W) \Rightarrow$ L è biunivoca
Prendo una base di V $v_1, \dots, v_n$
siccome iniettiva $L(v_1), \dots, L(v_n)$ indipendenti (e sono base)
n è la $\dim(W)$
L surgettiva?
$w \in W \quad \exists a_1, \dots, a_n$
$$w = a_1 L(v_1) + \dots + a_n L(v_n)$$
$$w = L(\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}_{v \in V})$$

es: • $L: V \rightarrow V$ iniettiva lineare
$\Rightarrow$ è biunivoca. ($\Rightarrow$ anche surgettiva) $\boxed{\text{sì}}$

• $L: V \rightarrow V$ surgettiva lineare
$\Rightarrow$ è iniettiva? sì $\dim(V) = n$
dim:
$$\dim(\operatorname{Imm} L) + \dim(\operatorname{Ker} L) = \dim V.$$
siccome L surgettiva $\Rightarrow \dim(\operatorname{Imm} L) = n$
$\dim(V)$
$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} L) = 0$ solo quando $\operatorname{Ker}(L) = 0 \Rightarrow$ L iniettiva.

Mettere in relazione il determinante e la L iniettiva.

Teorema: $L: V \to V$
$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}$

$M = [L]$ matrice di L rispetto a certe basi.

L è iniettiva se e solo se $\det[L] \neq 0$

dimostrazione:

M matrice quadrata (perché codominio e dominio sono uguali)

$$M = [c_1 | c_2 | \dots | c_n]$$

le colonne di M sono indipendenti se e solo se
$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = \dots = x_n = 0$$
unica soluzione.

$$x_1[c_1] + \dots + x_n[c_n]$$

Quindi $\ker(M) = 0 \Rightarrow$ M è iniettiva.
$\Rightarrow$ L è iniettiva.

Se il $\det M \neq 0 \Rightarrow$ le colonne di M sono indipendenti

supponiamo che non siano indipendenti ma con $c_1 = c_2 + 4c_3 + 8c_4$

$$\Rightarrow \det M = \det[c_2 + 4c_3 + 8c_4 | c_2 | \dots | c_n] =$$

$$= \cancel{\det[c_2 | c_2 | \dots]} + 4\cancel{\det[c_3 | c_2 | c_3 \dots]} + 8\cancel{\det[c_4 | c_2 | c_4 \dots]}$$

0 0 0

ma i det con colonne uguali $= 0$

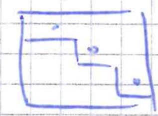
$\det M \neq 0 \Rightarrow$ colonne di M indipendenti
$\Rightarrow \ker M = 0$
$\Rightarrow$ M iniettiva

manca da dimostrare che se
M è invertibile $\Rightarrow \det M \neq 0$.

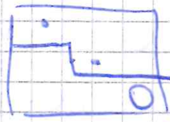
• caso in cui M è a scalini. $n \times n$

$\Rightarrow \det(M) =$ prodotto degli elementi sulla diagonale.

$\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow$ colonne indipendenti



ma anche



$\Rightarrow \det = 0$

qui i vettori non sono indipen.

ma le colonne indipendenti $\Rightarrow n$ pivot
$\Rightarrow$ prodotto elementi della diagonale $\neq 0 \Rightarrow \det M \neq 0$.

• caso in cui M non è a scalini.

riduco a scalini con mosse di riga

$\Rightarrow B$ matrice a scalini quadrata.

le mosse di riga cambiano il det
ma se $\det M \neq 0 \Rightarrow \det B \neq 0$ (perché non si può moltiplicare per 0 quando si fanno mosse di riga).

$Ker(M) = Ker(B)$

e non cambiano l'indipendenza delle colonne $Ker(M) = 0 \Rightarrow$ colonne ind.

$Ker(B) = 0 \Rightarrow$ " ind.

ciò che vale per B (matrice a scalini) vale anche per M

informazioni utili per dimostrare il teorema.

$\det \neq 0$ ✓.

teorema di Binet

$\det(M \cdot N) = (\det M) \cdot (\det N)$ — N e M sono matrici.

(det dice di quanto viene moltiplicata l'area) nei reali

Rango di L.

$L: V \to W$ lineare. Il rango è la dimensione dell'immagine.

$M = [L]$ = matrice rispetto a delle basi

Rango(M) = dim span(colonne di M).
‖
Rango(L)

teorema:

M matrice $\Rightarrow$ Rango per colonna = Rango per riga

se ci sono 5 colonne indipendenti
$\Rightarrow$ ci sono 5 righe indipendenti

di colonne ind = # righe ind.

es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{indipendenti} \\ \\ \rightarrow R_1 + R_2 \end{matrix}$$

rango per riga = 2

le fisso indipendenti $\Rightarrow$ riesco ad ottenere le altre colonne come combinazione delle prime due.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1}$$

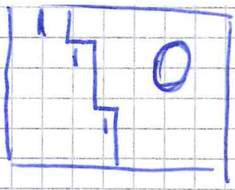
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$ e così anche per la 4ª colonna.

dimostrazione del teorema:

$L: \underset{\mathcal{B}}{V} \rightarrow \underset{\mathcal{C}}{W}$ lineare $M = [L]$

dim(Imm L) = dim span(colonne di M)

$[L] \xrightarrow[\text{di colonna}]{\text{mosse}}$ $A =$ 

$\Rightarrow$ rango(L) = # pivot di A = dim(Imm L)

Ora metto in relazione il rango con le righe:

$[L] \xrightarrow[\text{di righe}]{\text{mosse}}$ A' 

Ker(L) = determinare $[L]\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

equivale a $B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

la dim(Ker L) = dim(Ker B)

$= n -$ # pivot di B'

dim(V)

$+$ dim(Imm L) = # pivot di A

dim(Ker L) $= n -$ # pivot di B

$\Rightarrow$ # pivot di A + ($\cancel{n}$ − # pivot di B) = $\cancel{n}$

pivot di A = # pivot di B

colonne ind. di M = # righe ind. di M

Matematica Discreta 4/05/2017

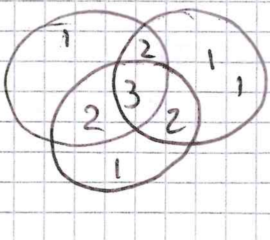
Principio di inclusione-esclusione

A e B insiemi

considero l'unione $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

funziona anche con più insiemi.

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$



Esercizio:
Quanti sono i numeri tra 1 e 100 non divisibili per 2 o 3 o 5

$A =$ multipli di 2 $\Rightarrow \#A = 50$
$B =$ " di 3 $\Rightarrow \#B = 33$
$C =$ " di 5 $\Rightarrow \#C = 20$

$[100] = \{1, 2, \dots, 100\}$
a noi interessa

$[100] - (A \cup B \cup C)$

sono i multipli di 2, 3 o 5

$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(C \cap B) + \#(A \cap B \cap C)$
$= 50 + 33 + 20 -$

$\#(A \cap B) \Rightarrow$ sono i multipli di 6 $= \frac{100}{6} \cong 16$

$\#(A \cap C) \Rightarrow$ sono i multipli di 10 $= \frac{100}{10} = 10$

$\#(C \cap B) \Rightarrow$ sono i multipli di 15 $= \frac{100}{15} = 6$

$\#(A \cap B \cap C) \Rightarrow$ multipli di 30 $= \frac{100}{3} \cong 3$

$\#(A \cup B \cup C) = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

$100 - 74 = \underline{\underline{26}}$ soluzione.

es: Considero le funzioni

$f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ surgettive.

quante sono?

• Da tutte le funzioni tolgo le <u>non</u> surgettive
tutte le f in quel modo sono (non surgettive anche).
2^4
ho due possibilità per ogni elemento del dominio.

le funzioni non surgettive sono 2

- $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$
- $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 2$

$2^4 - 2 = 14$ funzioni totali.

es:

$f: \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3\}$

tutte quelle surgettive?

sono TUTTE - quelle non surgettive

$\Downarrow$

$3^5 - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ A_1 sono le funzioni in cui 1 non sta nell'imm(f).

$\#A_1 ? = 2^5$ (sono le funzioni da $\{1,2,3,4,5\} \to \{\ ,3\}$) A_2 funzioni in cui 2 non sta nell'imm(f).

$\#A_2 = 2^5$ $(\{1,2,3,4,5\} \to \{1,3\})$

$\#A_3 = 2^5$ $(\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2\})$ A_3 funzioni in cui 3 non sta nell'imm(f).

$\#(A_1 \cap A_2) = 1$ unica funzione f che manda tutto in 3

$\#(A_2 \cap A_3) = 1$ unica funzione f che manda tutto in 1

$\#(A_1 \cap A_3) = 1$ unica funzione f che manda tutto in 2.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$

$\hookrightarrow$ una funzione deve avere almeno un'immagine

$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - {}$
$+ \#(A_1 \cap A_3) + \underbrace{\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{0}$

$= 2^5 + 2^5 + 2^5 - 1 - 1 - 1 =$
$= 3 \cdot 2^5 - 3 = 3(2^5 - 1) = 93 \to$ non surgettive

$3^5 - 93 = \underline{150}$ soluzione.

es: Quanti sono i divisori di $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^8$?

1) li cerchiamo (quali sono?)

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$a \leq 5$
$b \leq 7$
$c \leq 8$

faccio l'albero delle scelte

a ⟹ 6 scelte
b ⟹ 8 scelte
c ⟹ 9 scelte

$\left.\right\} = 6 \cdot 8 \cdot 9$

es: Anagrammi di ATTILLATO ?

ci sono lettere ripetute ⟹ + difficile

il problema è dove mettere le lettere uguali.

es: MAMMA

scelgo le dove mettere A

insieme di 2 elementi da 5 posizioni

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

1° soluzione:

- albero delle scelte
  1) dove metto le A ? $\binom{9}{2}$
  2) dove metto le L ? $\binom{7}{2}$
  3) dove metto le T ? $\binom{5}{3}$
  4) dove metto la i ? $\binom{2}{1} = 2$
  5) dove metto la o ? (1)

totale $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1$

2° metodo: considero le lettere uguali come diverse

$A_1 T_1 T_2 I L_1 L_2 A_2 T_3 O$

- cosa metto nella prima casella ? 9 scelte
- 2° casella 8 scelte
- 3° casella 7 ~ → 9° casella 1 scelta.

alla fine ho fatto 9! → con A, T, L "colorate"
posso distribuire le T in 3! modi e ottenere le stesse parole.
vale lo stesso per le A → 2!
e le L → 2!

⇓ $3! \cdot 2! \cdot 2!$

alla fine ho $(2 \cdot 2)$

$\frac{9!}{3!\,4}$ anagrammi di attillato.

$$= \binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{1} = \frac{9!}{2!\,\cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{2!\,\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3!\,\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{1} =$$

$$= \frac{9!}{3!\,4}$$

(magia)

es: Poker 52 carte $\underbrace{1, 2, \dots, 10\ J\ Q\ K}_{\times 4}$ 4 i segni

- distribuite 5 carte

Quante mani? $\binom{52}{5}$

quante sono Full? → Tris + coppia.

moltiplico le scelte:

$13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6$

Probabilità di fare full?

$$\frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}} = $$

$$= \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6}{\binom{52}{5}}$$

Albero scelte

- quale è il valore del Tris?
  13 scelte
- quale Tris? (semi)
  $\binom{4}{3}$ scelte $= 4$
- valore della coppia?
  12 scelte
- quale coppia?
  $6 \leftarrow \binom{4}{2}$ scelte

colore. (stesso seme)

- scelgo il seme
  4 scelte
- scelgo 5 carte di quel seme
  $\binom{13}{5}$ scelte

$4\binom{13}{5}$ → ma questo include le scale reali

10 per ogni seme

40 in totale (da sottrarre)

$$\#colori = 4 \cdot \frac{13!}{5!\,8!} - 40 = \cancel{4}_{2} \cdot \frac{13 \cdot \cancel{12}^{3} \cdot 11 \cdot \cancel{10}^{5} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{8!}} = (13 \cdot 11 \cdot 9) - 40$$

probabilità:
$$\frac{4\binom{13}{5} - 40}{\binom{52}{5}}$$

es: Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi presi da $[100] = \{1, \ldots, 100\}$ con somma pari?

2 tipologie:

- $\{pari, dispari, dispari\}$
- $\{pari, pari, pari\}$

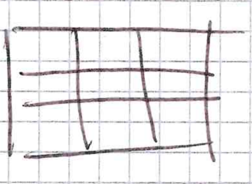
- Quanti di tipo P, P, P?
  $\binom{50}{3}$ scelgo 3 numeri su 50 totali

- Quanti del tipo P, D, D?
  - scelgo il pari → 50 scelte
  - scelgo i 2 dispari → $\binom{50}{2}$ scelte

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#\cancel{(A \cap B)}^{=\emptyset}$$

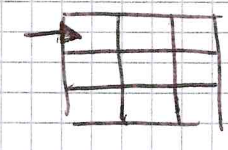
$$\binom{50}{3} + 50 \cdot \binom{50}{2}$$

es: Coloro le caselle di bianco o nero



griglia 3·3

- Quante possibilità? $2^9 \Rightarrow$ ho 2 scelte per le 9 caselle,
- se ogni riga è colorata in modo diverso?



1ª riga 2^3 modi
2ª riga 2^3-1 modi
3ª riga 2^3-2 modi

$$\downarrow$$

$$2^3 \cdot (2^3-1)(2^3-2)$$

almeno
- Ciascuna riga monocolore?