ALGEBRA LINEARE 23/05/2017

Capire quando una matrice è diagonalizzabile e se lo è come farlo.

$f: V \to V$ endomorfismo, $n = \dim(V)$

$\mathcal{E}$ base di V, $[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = A$.

Consideriamo il polinomio caratteristico della matrice

$$p_A(x) = \det(A - xI)$$ polinomio di grado n.

$\Downarrow$

sottraggo x dalla diagonale

$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_k}$ radici di $p_A(x)$ con $k \le n$.

sono esattamente gli autovalori

$\Downarrow$

$\exists v_i \neq \bar{0}$ tale che $f(v_i) = \lambda_i v_i$

$A(v_i)_{\mathcal{E}} = \lambda_i (v_i)_{\mathcal{E}}$

$mg(\lambda_i)$ = molteplicità geometrica di λ_i è la dimensione dell'autospazio $= b_i$

$$V_{\lambda_i} = \{v \mid f(v) = \lambda_i v\}$$

teorema

$$(x - \lambda_i)^{b_i} \mid p_A(x)$$

la molteplicità algebrica $ma(\lambda_i) = a_i$ è il massimo esponente a_i tale che

$$(x - \lambda_i)^{a_i} \mid p_A(x).$$

OSS: $1 \le b_i \le a_i$

$p(x) = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_k)^{a_k} \cdot q(x)$

ciascuno dei fattori divide il polinomio ma anche il loro prodotto lo divide poiché sono "primi" tra loro.

$q(x) \to$ in $\mathbb{C}$ non compare
$\searrow$ in $\mathbb{R}$ è il resto della divisione.

$a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq n$

in $\mathbb{C}[x]$ $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n \Rightarrow p(x) = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_k)^{a_k}$

molteplicità algebrica $\Rightarrow$ esponenti con cui appaiono i vari fattori.

Per essere diagonalizzabile:

$\exists$ una base di V fatta di autovettori

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

ciascun autovalore è ripetuto tante volte quante definite dal suo esponente (la sua molteplicità algebrica).

$V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta $\Rightarrow \dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}) = \sum_i \dim V_{\lambda_i} = \sum_i mg(\lambda_i)$

f è diagonalizzabile

se $\sum mg(\lambda_i) = n$

se $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V$

s $\sum_i \dim V_{\lambda_i} = n$

$b_i = mg(\lambda_i)$

$a_i = ma(\lambda_i)$

oss: se f è diagonalizzabile $\Rightarrow b_1 + \dots + b_k = n$

\# autovettori indipendenti

$\Rightarrow a_1 + \dots + a_k = n$ per la disuguaglianza $b_i \leq a_i$

$\Rightarrow a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$

Se $p(x)$ si fattorizza completamente (ha solo fattori di grado 1), e succede sempre in $\mathbb{C}$, e le $\underbrace{mg = ma}$ $\Rightarrow$ è diagonalizzabile.

$a_i = b_i$

teorema: Data $f: V \to V$, $\mathcal{E}$ base di V

$$A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$$

$$p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xI)$$

non dipende dalla base
(con un'altra base ottengo una matrice diversa ma uno stesso determinante).

dimostrazione:

se scelgo una base $\mathcal{D}$ di V ottengo una nuova matrice

$$B = [f]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} = [id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$$

$$B = M \quad A \quad M^{-1}$$

B e A sono matrici simili.

$$p_A(x) = p_{M^{-1}AM}(x)$$ cioè il

$$\det(A - xI) = \det(M^{-1}AM - xI)$$

$$M^{-1}AM - xI = M^{-1}AM - x\underbrace{M^{-1}IM}_{I} =$$

$$= M^{-1}[A - xI]M$$

quindi il

per il fatto che I commutano col tutto (proprietà non vera per tutte le altre matrici)

anche matrici con numeri uguali sulla diagonale commutano

$$\det(M^{-1}[A - xI]M) =$$

$$= \det M^{-1} \cdot \det[A - xI] \cdot \cancel{\det M} =$$

$$\det M^{-1} = \frac{1}{\cancel{\det M}}$$

$$= \det[A - xI]$$

esattamente $p_A(x) = p_{M^{-1}AM}(x) = p_B(x)$

$$\det(M \cdot M^{-1}) = \det I = 1$$
$$\det M \cdot \det M^{-1}$$

es: $\mathcal{E} = \left\{ \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ $\qquad \mathcal{D} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$[id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1^a$ colonna

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^a$ colonna

coordinate di v_1 rispetto a $\mathcal{D}$ $\quad (v_1)_{\mathcal{D}}$

$$= [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}} (v_1)_{\mathcal{D}} = [\cancel{id}\, v_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$[id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to$ matrice degli autovettori.

per $[id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}}$ calcolo l'inversa di $[id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$ oppure risolvo il sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

teorema: $\quad f: V \to V \quad , \; b_1 = mg(\lambda_1) = \dim(V_{\lambda_1})$

allora $\quad (x - \lambda_1)^b \mid p_f(x)$

dimostrazione:

$\mathcal{B}$ = base di V $\qquad \underline{V_{\lambda_1}} + \dots + V_{\lambda_k} \subset V$

base di V_{λ_1}

$v_1, \dots, v_{b_1}$

estendo $v_1, \dots, v_{b_1}$ a base di tutto V.

ottengo $\{v_1, \dots, v_b, w_1, \dots, w_{n-b_1}\} = E$.

la matrice di f rispetto a E

$$A = [f]_E^E = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & \lambda_1 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \underbrace{\quad}_{w_i} \end{array}\right]$$

λ_1 si ripetano b_i volte sulla diagonale.

$$p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xI) =$$

$$= \det\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 - x & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 - x & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \end{array}\right]$$

sviluppo secondo le varie colonne e ottengo

$$(\lambda_1 - x)^b \det(*)$$

es:

$$\det\begin{pmatrix} x-3 & 0 & 7 \\ 0 & x-3 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = (x-3)\det\begin{pmatrix} x-3 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-3)(x-3)\det(9)$$

es:

$$F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad [F_a] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Per quali "a" è diag? in $\mathbb{R}$.

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} a-x & 0 & 0 \\ 1 & a-x & 1 \\ 0 & -1 & +2-x \end{pmatrix}$$

sviluppo secondo la 1ª riga:

$$(a-x)\det\begin{pmatrix} a-x & 1 \\ -1 & +2-x \end{pmatrix}$$

$$= (a-x)\left[(a-x)(2-x)+1\right] =$$

$$= (a-x)\left(2a-ax-2x+x^2+1\right) =$$

NON andava fatto

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{= 2a^2 - a^2x - 2ax + ax^2 + a - 2ax + ax^2 +} \\ \cancel{+ 2x^2 - x^3 - x =} \end{array} \right.$$

un autovalore $\lambda_1 = a \Leftarrow (a-x)$

$$x^2 - (a+2)x + 2a + 1 = 0$$

$$x = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(2a+1)}}{2}$$

$$a^2 + a + \cancel{4} - 8a - \cancel{4} = a^2 - 4a = a(a-4)$$

$$\lambda_2 = \frac{a+2+\sqrt{a(a-4)}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{a+2-\sqrt{a(a-4)}}{2}$$

se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ (e $\lambda_1 \neq \lambda_3$) $\Rightarrow$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$
e $\in \mathbb{R}$

- se $\begin{cases} a < 4 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ non diagonalizzabile perché il polinomio non è fattorizzato completamente.

- $\lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow \Delta = 0$

  $a = 0, 4$

se $a = 0$ $\quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

devo trovare 2 vettori $\Rightarrow \dim(V_1) = 2$

$\dim(V_1) = \operatorname{Ker}(A - 1I) =$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } 2$$

Ker = 1

$\dim(V_1) = 1$

$\Rightarrow$ non è diagonalizzabile.

$p(x) = (x-1)^{2} x$

ma(1) autovalore

$mg(1) = \dim(V_1) = 1 \neq 2$

ALGEBRA lineare 24/05/2017

Matrice trasposta.

scambia righe con colonne

es.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times m$ trasposta cambia dimensione $\Rightarrow$ matrice $m \times n$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

TEOREMA A, matrice, si dice simmetrica su $\mathbb{R}$ se A = alla sua trasposta.

1) deve essere quadrata

simmetrica rispetto alla diagonale

es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ rispetto alla diagonale la parte inferiore è speculare rispetto alla parte sopra

TEOREMA SPETTRALE:

Se A è simmetrica reale $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

E la base degli autovettori ortogonale.

↓

con angoli di 90° (come assi cartesiani).

VETTORI ORTOGONALI:

Prodotto scalare $\rightarrow$ in $\mathbb{R}^n$

↓

di due vettori $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ scalare

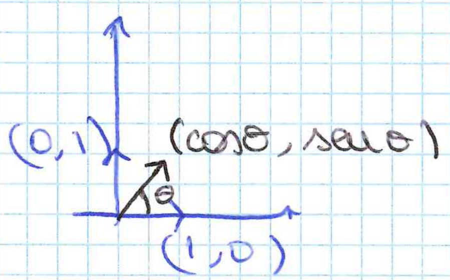
$u = (x_1, \dots, x_n) \quad v = (y_1, \dots, y_n)$

$u \cdot v = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

↓

$= 0$ se e solo se u e v sono ortogonali

es: base standard



$(0,1)\cdot(1,0) = 0 \Rightarrow$ vettori ortogonali

$(1,0)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta$

↓

"misura quanto sono ortogonali"

Lunghezza di un vettore in $\mathbb{R}^n$

↓ $\sqrt{v \cdot v}$ in $\mathbb{R}^n$

in $\mathbb{R}^2$ $\quad v = (a, b) \quad \sqrt{(a,b)(a,b)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

in $\mathbb{R}^3$ il teorema di pitagora applicato 2 volte (in $\mathbb{R}^2$ una sola volta).

Misura degli angoli in $\mathbb{R}^4$

ALGEBRA lineare 30/05/2017

es: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare

$$[T]^{std}_{std} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

trovare una base ortonormale di autovettori.

$\downarrow$

è diagonalizzabile perché simmetrica

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(x-2) \mid p(x)$$

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} =$$

$$= -x \det\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - 1 \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} + 1 \det\begin{vmatrix} 1 & -x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x(x^2-1) - (-x-1) + (1+x) =$$

$$= -x^3 + x + x + 1 + 1 + x = -x^3 + 3x + 1 =$$

$$= -x(x^2-1) + 2(x+1) = -x(x+1)(x-1) + 2(x+1) =$$

$$= (x+1)\underline{[-x(x-1)+2]} = -(x+1)^2(x-2)$$

autovalori:

$\lambda = 2$

$\lambda = -1$

$\downarrow$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$\lambda = -1$ ha molteplicità algebrica $= 2$

$\lambda = 2$ " " " $= 1$

autospazi:

V_1, V_2 sono in somma diretta

$$V_{-1} = \operatorname{Ker}(A - \underset{-1}{x} I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

riga $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ker $\to$ dim $= 2$ 2 gradi di libertà.

y, z libere

$$\underbrace{V_{-1}}_{\text{dim} = 2} = \text{span} \underbrace{\overset{v_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{autovettori con } \lambda = -1}$$

$\dim(V_2) = 1$ sicuramente perché ma $= 1$
e $\dim(V_2) \leq 1 \Rightarrow = 1$.

autovettore di $V_2 = \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\langle v_3, v_1 \rangle = 1(-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ ortogonali

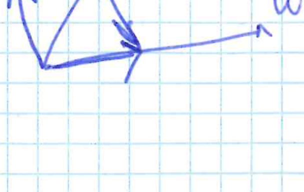
$\langle v_3, v_2 \rangle =$ ortogonali $= 0$ $\longrightarrow$ perché hanno autovalori diversi.

ma $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \Rightarrow$ non ortogonali

$\downarrow$ dobbiamo ortogonalizzarli

$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

$u_1 = (-1, 0, 1)$ $\qquad$ $u_2 = (-1, 1, 0)$



$\downarrow$ v_1 $\qquad$ $\downarrow$ v_2 $\qquad$ ortonormali

$$v_1 = \underset{\text{lunghezza}}{\frac{u_1}{\|u_1\|}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$$

$$v_2 = \frac{u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_1}{\| \quad \|} = \frac{(-1,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\| \quad \|} =$$

$$= (-1,1,0) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

devo normalizzarla
$\left\| \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \right\|$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) =$$

per verificare se sono ortogonali basta che faccio la moltiplicazione senza le costanti moltiplicative.

$$\left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), (-1, 0, 1) \right\rangle = 0. \checkmark$$

normalizzo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

norma del vettore.

es: in $\mathbb{R}^4$, sottospazio dato dallo

$\text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = U$ base di $U^\perp$?

U complementare.

$$\boxed{\begin{array}{l} U \oplus U^\perp \to U \cap U^\perp = \{\bar{0}\} \\ U + U^\perp = \mathbb{R}^4 \end{array}}$$

allora $U^\perp$ ha 2 vettori.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in U^\perp$? $\Rightarrow$ prodotto scalare deve $= 0$

$$\begin{cases} x \cancel{+ 0y} + 1z \cancel{+ 0t} = 0 \\ x - 1y + 1z - 1t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 0+y+0+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-z \\ y=-t \end{cases}$$ z, t libere
x, y costrette.

$$\begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U^\perp = \text{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es: $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$[L_a]^{std}_{std} = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per quali "a" è diagonalizzabile?

se $a=0 \Rightarrow$ diagonale $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

se $a \neq 0$

$$p(x) = \det(L_a - xI) = \det\begin{pmatrix} 2-x & a & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

matrice triangolare $\Rightarrow$ det = prodotto delle diagonale $\Rightarrow (2-x)(2-x)(1-x) = -(x-2)(x-2)(x-1)$

$\lambda = 2 \quad ma(2)=2$
$\lambda = 1 \quad ma(1)=1.$

$V_2 \oplus V_1 \subset \mathbb{R}^3$

V_2: dim ≤ 2; V_1: dim 1

$V_2 = \ker(A-2I)$
$V_1 = \ker(A-1I)$

dim ≤ 2:
se $=2$ $\Rightarrow$ diagonalizzabile
se $=1 \Rightarrow$ non diagonalizzabile.

$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

se $a = 0 \Rightarrow$ ci sono 2 righe nulle $\Rightarrow \ker = 2$

se $a \neq 0 \Rightarrow$ rango è 2 e dim ker $= 1$
non diagonalizzabile.

es: fattorizzare $x^3 + x^2 + 2x + 2$ in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

-1 si vede che è una radice

$(x+1) \mid p(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + 2x + 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 + 2 \\ \hline \quad / \quad / \quad 2x + 2 & \\ \qquad\quad\;\; 2x + 2 & \\ \hline \qquad\quad\;\; / \quad / & \end{array}$$

in $\mathbb{R}[x] \Rightarrow x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x+1)(x^2+2)$

in $\mathbb{C}[x] \Rightarrow x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -1 \cdot 2$

$x = \pm \sqrt{-1 \cdot 2} = \pm i\sqrt{2}$

$x^2 + 2 = (x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$

$p(x) = (x+1)(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$.

es: $\exists\, T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $\det \neq 0$ e autovalore $= 0$? NO

$\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow \ker = 0$

$\Rightarrow \{0\}$ non autovalore.

es: $L:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismo, diagonalizzabile con autovalori $1,2,3$. Quale è vera?

- L è invertibile? si
- Ker è $\neq 0$? si perché è invertibile.
- autovalori di T^{-1}?

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

→ autovalori dell'inversa della diagonale.

gli autovalori dell'inverso sono gli inversi degli autovalori

es: Quante sono le matrici 3×3 in $\mathbb{Z}/(2)$ con $\det M \neq 0$?

2^9 matrici totali.

$\det M \neq 0$ se e solo se le righe/colonne sono indipendenti.

1^{a} riga 2^3-1 modi → escludo la riga $0,0,0$

2^{a} riga 2^3-2 //

3^{a} riga 2^3-4 //

→ escludo le combinazioni lineari possibili delle altre 2 righe essendo in $\mathbb{Z}/(2)$ ci son solo 4 combinazioni possibili.

es: $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

traccia $T = 0$ $\quad \det T = 1$ $\quad$ un autovalore $= 2$

riesco a capire $p(x)$?

in $\mathbb{C}[x]$ $\quad p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

$$p(x) = \pm\left[x^3 - \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{\substack{\text{traccia} \\ 0}}x^2 + (\quad)x - \underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\substack{\det \\ 1}}\right]$$

$p(x) = x^3 + cx + 1$

$p(2) = 0 = 8 + 2c - 1 = 0$

$$c = -\frac{7}{2}$$

es: endomorfismo simmetrico con un solo autovalore $= 3$.

$T = ?$ $\quad A = [T] = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A = M \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\Downarrow \; 3I} M^{-1} = M M^{-1} 3I = 3I$

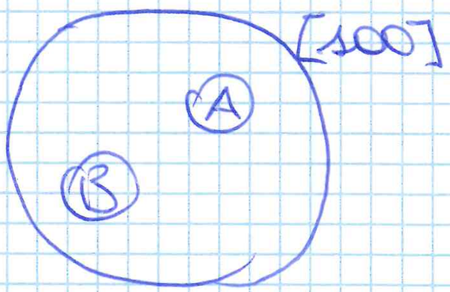
perché I commuta con tutto

es: combinatoria

$(A, B) \quad A \cap B \neq 0$

$A \subset [100]$

$B \subset [100]$



per ogni numero ho 3 scelte
$\left.\begin{array}{l} \to \text{in } A \\ \to \text{in } B \\ \to \text{fuori} \end{array}\right\} 3^{100}$

se $|A| = 5$ cardinalità $= 5$

$\left.\begin{array}{l} A \text{ lo scelgo in } \binom{100}{5} \text{ modi} \\ B \text{ lo scelgo in } 2^{95} \text{ modi} \end{array}\right\} \binom{100}{5}(2^{95})$

es:

(a, b, c) in $\mathbb{N}$

t.c. $a \cdot b \cdot c = 1000$

$\downarrow$ fattorizzo $1000 = 2^3 5^3$

$a = 2^{x_1} \cdot 5^{x_2}$
$b = 2^{y_1} \cdot 5^{y_2}$
$c = 2^{z_1} \cdot 5^{z_2}$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 3 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 3 \end{cases}$$

$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

$\binom{5}{3} = \binom{5}{3}$

totale $= \binom{5}{3}^2$

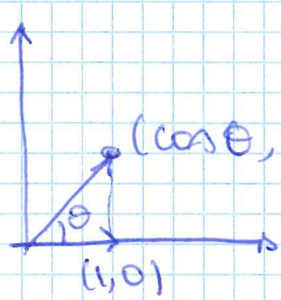
ALGEBRA lineare 24/05/2017

Teorema spettrale:
A simmetrica reale $\Rightarrow$ A diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) con base di autovettori ortogonali.

in $\mathbb{R}^n$ $u, v \in \mathbb{R}^n$ $\langle u, v \rangle$ prodotto scalare

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u, v$ sono ortogonali.



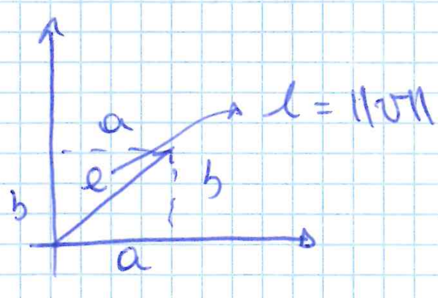
$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
$(1, 0)$

$\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \cos\theta$

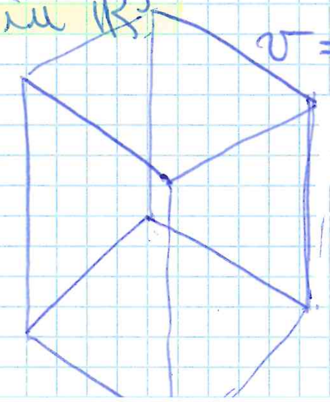
Definizione:
$v \in \mathbb{R}^n$ $\quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $\quad \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$

in $\mathbb{R}^2$ $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\|v\|^2 = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle =$
$= a^2 + b^2$



in $\mathbb{R}^3$ $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



$a^2 + b^2 = d^2$

$a^2 + b^2 + c^2 = |(a, b, c)|^2$

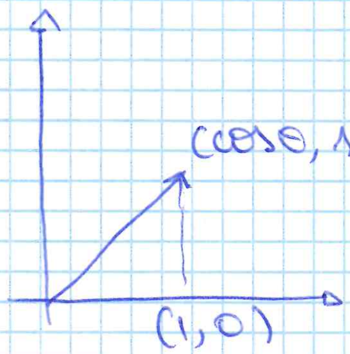
$\langle v, \bar{u} \rangle$ $\qquad \langle a\bar{u}, \bar{v} \rangle = a\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, a\bar{v} \rangle$

scalare

$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$\langle u, v \rangle = u \cdot v$

$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v w \qquad 3(u\cdot v) = (3u\cdot v)$



$\langle v, \binom{1}{0} \rangle = \cos\theta$

$\langle 2v, \binom{1}{0} \rangle = 2\cos\theta$

$\|v\| = 1 \qquad \|2v\| = 2$

$\|a\bar{v}\| = |a|\cdot\|v\| \qquad \|-3v\| = 3\cdot\|v\|$

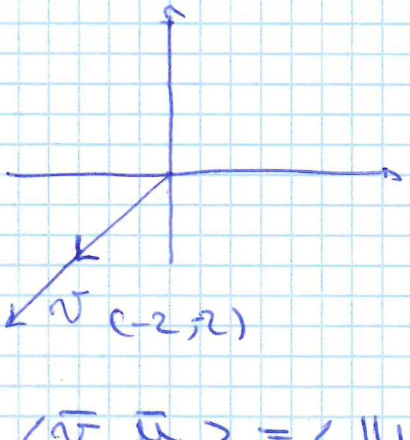
$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad (-3)v = \begin{pmatrix} -3a \\ -3b \end{pmatrix} \qquad \|-3v\|^2 = (-3a)^2 + (-3b)^2 =$

$= (3a)^2 + (3b)^2$

$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad u, v \in \mathbb{R}^2$

$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \cos\theta$ se $\|u\| = \|v\| = 1$

u vettore $\longrightarrow$ $\dfrac{u}{\|u\|}$ vettore di lunghezza 1

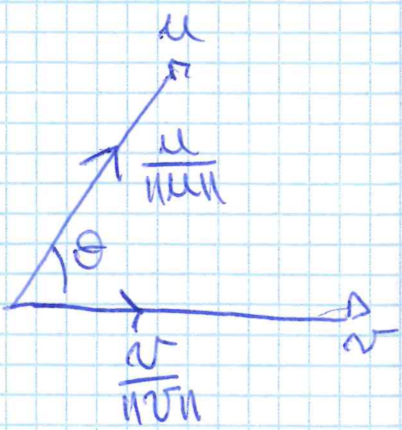


$\dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{1}{2} v$

$\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = \langle \|u\| \cdot \dfrac{\bar{u}}{\|u\|}, \|v\| \cdot \dfrac{\bar{v}}{\|v\|} \rangle$

scalare

lunghezza 1



$$= \|u\| \cdot \|v\| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

Cartesiane: $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

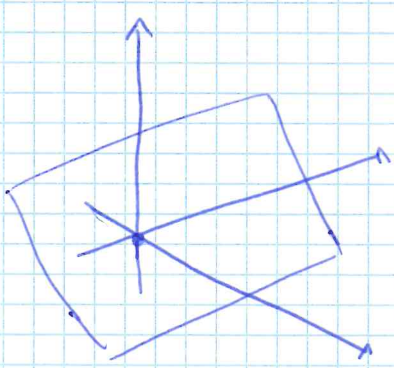
$V \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio, base di V $(v_1, \dots, v_k)$

ortogonale (cioè $\langle v_i, v_j \rangle = 0$)

$$\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 \quad i \neq j$$

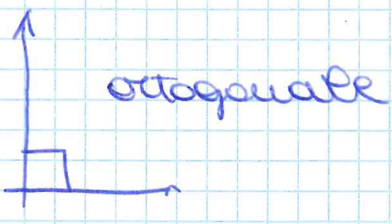
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\} \quad V \in \mathbb{R}^3$$

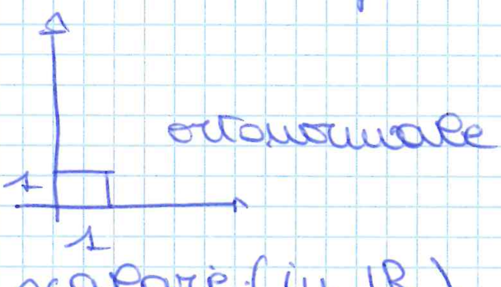
$\dim(V) = 2$



Definizione: base ortogonale $v_1, \dots, v_k \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$

Definizione: ortonormale $\Leftrightarrow$ ortogonale $\wedge$ $\|v_i\| = 1$





Assiomi del prodotto scalare (in $\mathbb{R}$)

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \bar{0}$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

V spazio vettoriale di dimensione finita con un prodotto scalare che verifica gli assiomi.

es: $V = \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema: se $v_1, \dots, v_n$ base ortonormale di V, $v \in V$. Voglio trovare $(v)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

esempio: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \boxed{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

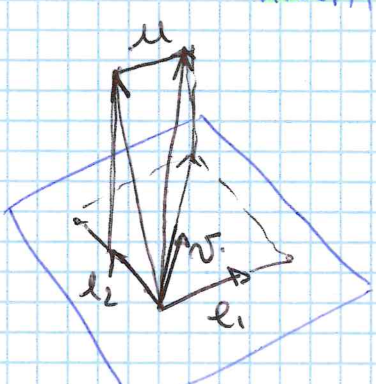
$2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad 3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

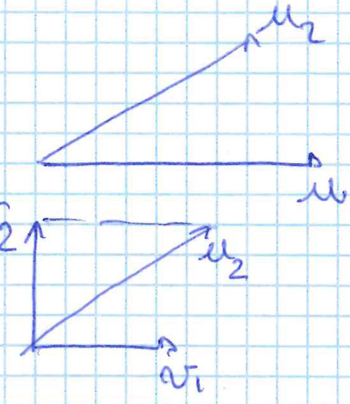
Gram-Schmidt

Data una base $u_1, \dots, u_n$ di V. Trovare una base ortonormale $v_1, \dots, v_n$

$$\mathrm{span}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$$

$v_1 = ? \quad \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$





se $v \in V$

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2$$

se $v \in \mathbb{R}^n$ $\quad v \notin \mathbb{R} \Rightarrow \hat{v} = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 \in V$

proiezione di v sullo span e_1, e_2

$$v - \hat{v} \perp \mathrm{span}\ e_1, e_2$$

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$

$\Downarrow$

$v_1, v_2, \dots$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$\hat{u}_2 =$ proietto u_2 su span(v_1) $= \langle u_2, v_1 \rangle v_1$

$$v_2 = \frac{u_2 - \hat{u}_2}{\|u_2 - \hat{u}_2\|}$$

ho ottenuto v_1, v_2 ortonormali

span$(v_1, v_2) =$ span(u_1, u_2)

$v_3 = ?$ $\quad \hat{u}_3 = \langle u_3, v_1 \rangle \cdot v_1 + \langle u_3, v_2 \rangle v_2$

$$v_3 = \frac{u_3 - \hat{u}_3}{\|u_3 - \hat{u}_3\|} \quad \text{etc} \dots$$

Es $\quad V \subset \mathbb{R}^3 \quad V = \mathrm{Ker}(f) \quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$[f] = \begin{array}{ccc} (2, & 1, & -1) \\ x & y & z \end{array}$$

$$V = \begin{pmatrix} (-y+z) \cdot \frac{1}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$z\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}(u_1, u_2)$$

$B =$ base di V. Voglio v_1, v_2 base ortonormale di V.

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1}}$$

$$v_2 = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 \rangle \cdot v_1}{\left\| \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 \rangle v_1 \right\|}$$

Algebra lineare 25/05/2017

$$\mathbb{R}^n \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = u^T \cdot v = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\langle (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) \rangle = (x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)^T$

$u, v \in \mathbb{R}^n$

A matrice $n \times n$ $\quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^T v \rangle$

Corollario:

Se A è simmetrica $(A = A^T)$

$\Rightarrow \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$

in $\mathbb{R}^n$ definisco prodotto scalare

$$\underset{u}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \underset{v}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} \in \mathbb{C}^n \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = u^T \cdot \bar{v}$$

es:
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-i) + 2 \cdot 1 = 2 - i$$

in $\mathbb{C}$ $\quad \langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle$

$\langle v, aw \rangle = \bar{a} \langle v, w \rangle$

$\overline{\langle v, u \rangle} = \overline{v^T \cdot \bar{u}} = \overline{v^T} \cdot \bar{\bar{u}} = \overline{v^T} \cdot u$

$\langle u, v \rangle = \underbrace{u^T \cdot \bar{v}}_{\in \mathbb{C}} = (u^T \cdot \bar{v})^T = \overline{v^T} \cdot u$

$A^* = \bar{A}^T$ matrice aggiunta

in $\mathbb{R}$ non ci sono.

esercizio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore

$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle$

$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle$

Teorema: Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A e $A = A^*$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

es:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & i \\ -i & 3-x \end{pmatrix} =$$

$$p_A(x) = (2-x)(3-x) - 1 = x^2 - 5x + 5$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

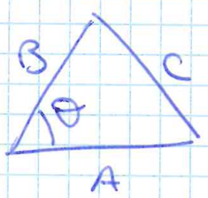
teorema:

A simmetrica reale $(A = A^T = A^*)$ λ, μ autovalori

$\lambda \neq \mu$ (sono in $\mathbb{R}$). $\left.\begin{array}{ll} Av = \lambda v & v \neq 0 \\ Aw = \mu w & w \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ v e w sono ortogonali

cioè $\langle v, w \rangle = 0$

es:



$|A|$, $|B|$, θ dati

$|C| = ?$

$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\theta$ legge dei coseni.

Verifica che procedimento Gram-Schmidt genera vettori ortonormali

input $u_1, \dots u_n$

output $e_1, \dots, e_n$ ortonormali

Lemma: $e_1, \dots, e_n$ ortonormali $u \in V$

$$v = u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \qquad e_{k+1} = \frac{v}{\|v\|}$$

$$\Rightarrow \langle v, e_j \rangle = 0 \quad \forall j$$

span$(v, e_1, \dots,$