$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= 2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2i}_{\text{sommatoria dei primi } n \text{ numeri}} - n = \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n =$$

$$= n(n-1+1) = n^2$$

23/02/2017

dimostrazioni per induzione

es:

$n! > 2^n$ Per quali n?

$$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$2^n = 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad \xrightarrow{\cdot 2}$$

$$\quad \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \wedge \quad \wedge \quad \xrightarrow{\cdot 6} \quad \xrightarrow{\cdot 7}$$

$$n! = 1 \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 24 \quad 120$$

caso base $\neq 0$ perché si tratta di moltiplicazioni

prima di dimostrare per induzione guardo "a mano" cosa succede.

• PASSO induttivo

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$n! > 2^n$ la poniamo vera e dobbiamo vedere per quali n. Cerco di ottenere $P(n+1)$

$P(n+1) \Rightarrow \quad (n+1)! > 2^{n+1}$

punto di arrivo cerco di dimostrarlo

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$

Se suppongo $P(n)$ vero allora so che $n! > 2^n$

$$\underbrace{n!}_{P(n)}(n+1) > \underbrace{2^n}_{P(n)}\cdot(n+1) \geq 2^n \cdot 2$$

se $n \geq 1$

$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq 1$

$$\underbrace{\underset{F}{P(1)} \Rightarrow \underset{F}{P(2)}}_{V} \qquad \underbrace{\underset{F}{P(3)} \Rightarrow \underset{V}{P(4)}}_{V}$$

$$\underbrace{\underset{F}{P(2)} \Rightarrow \underset{F}{P(3)}}_{V} \qquad \underbrace{\underset{V}{P(4)} \Rightarrow \underset{V}{P(5)}}_{V}$$

le implicazioni sono tutte vere da 1 in poi

Dobbiamo prendere un passo induttivo per cui sia vera $P(n)$.

↳ Base $P(4)$ → è la prima che è vera

$\forall n \geq 1 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ⇒ il passo funziona

$$\frac{\forall n \geq 4 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \geq 4 \quad P(n)}$$ → vale il passo e la base.

Progressioni aritmetiche e geometriche.

P. aritmetica ⇒ successione di numeri

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$a_{n+1} - a_n = \text{costante}.$$

la differenza è costante.

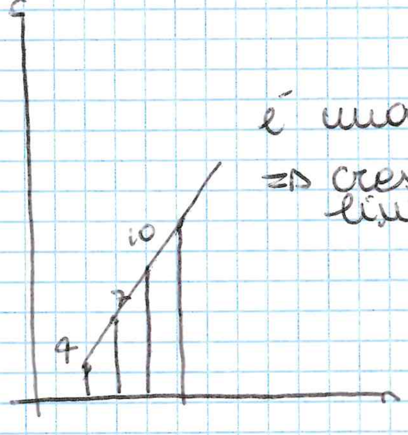
es: $\underbrace{4, 7}_{3}, \underbrace{10}_{3}, \underbrace{13}_{3}, \underbrace{16}_{3}, \underbrace{19}_{3} \dots$

P. geometrica ⇒ caratteristica: rapporti costanti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{costante}$$

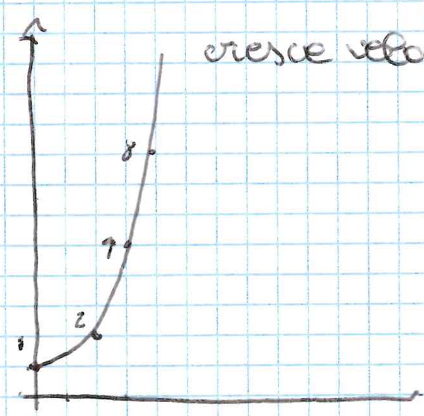
es: $\underbrace{2, 4}_{2}, \underbrace{8}_{2}, \underbrace{16}_{2}, \underbrace{32}_{2}, \underbrace{64}_{2} \ldots \rightarrow \infty$ $\}\ 2^n$

P. aritmetica



è una retta
⇒ crescita lineare

P. geometrica



cresce velocemente

Somma di una progressione aritmetica

es: $\underbrace{4+7+10+13+16+\ldots}_{n \text{ termini}}$

$$\overset{4+0\cdot 3}{4} + (4+3) + (4+2\cdot 3) + (4+3\cdot 3) + \ldots + (4+(n-1)\cdot 3)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 4 + i\cdot 3 = \sum_{i=1}^{n} (1 + i\, 3)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 4 + \sum_{i=0}^{n-1} i\cdot 3 =$$

$$= 4n + 3\sum_{i=0}^{n-1} i =$$

somma dei primi (n-1) numeri

$$= 4n + 3\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

→ la crescita è più o meno come n^2

somma di una progressione geometrica

es. $$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$10^0+10^1+10^2+10^3+10^4 = \frac{10^5-1}{10-1}$$

in generale

$$x^0+x^1+x^2+x^3+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

dimostrazione:

1) per induzione

2) lavorando direttamente sull' espressione

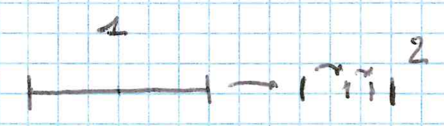
se $x \neq 1$

$$(x-1)(x^0+x^1+x^2+\dots+x^n) = x^{n+1}-1$$

faccio le moltiplicazioni

$$\left.\begin{aligned} &\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+\dots+\cancel{x^n}+x^{n+1} \\ -1&-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x^3}+\dots-\cancel{x^n} \end{aligned}\right\} = x^{n+1}-1$$

es: Paradosso di Zenone



per gli analisti

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 2$$

non lavoreremo fino all' infinito, ma su n numeri.

È una progressione geometrica di passo $\frac{1}{2}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n} = \frac{(1/2)^{n+1}-1}{1/2-1}$$

$\frac{1}{2^0}$ ✓

$$x^0+x^1+x^2+x^3+\dots+x^n \quad \text{con } x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

con la crescita di n (andando all'infinito) l'errore sarà sempre minore così da arrivare a 2.

es:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n \overset{P(n)}{=} \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

dimostrazione per induzione

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \underset{P(n)}{=} 2^{n+1} - 1$$

la sommatoria è più precisa dei puntini.

base

$n = 0 \qquad P(0) = \sum_{i=0}^{0} 2^0 \overset{?}{=} 2^{0+1} - 1$

$1 = 1$ è vera la base

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

ipotesi induttiva $P(n)$

cerco di arrivare a $P(n+1)$, cioè:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$$

la somma si "spezza"

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2^i}_{P(n)} + 2^{n+1} = \underbrace{2^{n+1} - 1}_{P(n)} + 2^{n+1} \overset{?}{=} 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

quindi

$$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Induzione forte.

Ci si riconduce a più casi precedenti.
Possono essere presenti anche più casi base.

es:
$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + 2f_n$$

~~Successione di Fibonacci~~ (quasi)

↓

$0, 1, 1, 3, 5, 11 \ldots$ ogni volta si sommano i due precedenti.

$f_n \leq 2^n$ Per quali n?

$$f_{n+2} \underset{\uparrow P(n+2)}{\leq} 2^{n+2} \quad ?$$

$$f_{n+2} = \underbrace{f_{n+1} + 2f_n}_{\text{casi precedenti}}$$

potrei supporre che i due casi precedenti siano veri:

$$f_{n+1} \leq \underbrace{2^{n+1}}_{P(n+1)}$$

$$f_n \leq \underbrace{2^n \cdot 2}_{P(n)}$$

di induzione forte
Passo: dimostro $P(n)$ supponendo veri tutti quelli che lo precedono ($P(n-1)$, $P(n-2)$, $\ldots$, $P(0)$)

l'ipotesi induttiva diventa

$$\overbrace{P(0), \ldots, P(n-1), P(n)} \Rightarrow P(n+1)$$

$$f_{n+1} + f_n \leq \underline{2^{n+1} + 2^n \cdot 2}$$

$$\Downarrow$$

$$2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

il passo è fatto supponendo i precedenti veri.
Devo controllare i casi base (in questo caso 2)

$n =$	0	1	2	3	4	5
$f_n =$	0	1	1	3	5	11
$2^n =$	1	2	4	8	16	32

$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$ è ciò che abbiamo dimostrato.

$P(0) \wedge P(1) \Rightarrow P(2)$

$P(1) \wedge P(2) \Rightarrow P(3)$

$\vdots$

ci servono $\underbrace{P(0) \text{ e } P(1)}$ per far partire la catena

sono i CASI BASE

↓

dimostrati con i calcoli

$$\underset{V}{P(0)} \wedge \underset{V}{P(1)} \underset{V}{\Rightarrow} \underset{V}{P(2)}$$

ALGEBRA lineare 28/02/2017

(polinomi nel capitolo 8 nelle dispense di Algebra lineare)

Spazi vettoriali

$\mathbb{N} \Rightarrow$ numeri naturali $(0, 1, 2 \ldots)$ utilizzati per contare

$\mathbb{Z} \Rightarrow$ " interi $(\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots)$ per utilizzati fare le divisioni

$\mathbb{Q} \Rightarrow$ " razionali (rappresentabili con frazioni o con virgola

$\frac{1}{2} \Rightarrow 0,5 \quad \frac{1}{3} \Rightarrow 0,3\bar{3}$

↓

legate ad una serie geometrica

$\mathbb{R} \Rightarrow$ " reali

↓

utilizzare per misurare delle lunghezze

comprende numeri come: $\sqrt{2}$, π hanno sviluppi infiniti ma non periodici i numeri reali che hanno infinite cifre decimali non periodiche non sono <u>mai</u> misurabili esattamente ⇒ viene approssimato.

$$\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/_{(12)}$$

interi modulo 12

numeri da 0 a 11

ma somma e moltiplicazione sono diverse

$11+1=0$ ⇒ Quando arrivo a 12 azzero (come se fosse un orologio)

$11+ \quad =2$

addizione rimpiazzando con il resto del modulo 12 ⇒ $11+1=12/_{12}$ → 1 con resto ∅ risultato

$5 \cdot 4 = (20) = 8$ in $\mathbb{Z}/_{(12)}$

$\mathbb{C}$ ⇒ numeri complessi

↳ $a + b\sqrt{-1}$ $\quad \sqrt{-1} = i$

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

si utilizzano per fare divisioni di numeri "quadrati" negativi.

Anelli e campi

Anelli	Campi
· +	· +
· "·"	· "·"
· 0	· 0
· 1	· 1

tutti i campi sono anelli, ma gli anelli sono di più.

campi: ci si può fare le divisioni per elementi ≠ ∅.

es: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}(3)$, $\mathbb{Z}(12)$

es: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}(3)$, $\cancel{\mathbb{Z}(12)}$

i numeri IN non sono né anelli né campi.

Gli anelli e i campi differiscono per la divisione. es. in $\mathbb{Z}$ $-3:2$ non si può fare quindi è un ~~a~~ anello.

Proprietà di addizione e moltiplicazione per Anelli:

commutativa $x+y = y+x$

$y \cdot x = x \cdot y$

$\left.\begin{array}{l} x+0 = x \\ y \cdot 1 = y \end{array}\right\}$ elementi neutri.

ASSOCIATIVA $(x+y)+z = x+(y+z)$

↳ mi permette di non utilizzare le parentesi

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

DISTRIBUTIVA

$x(y+z) = x \cdot y + z \cdot x$

sottrazione e divisione sono proprietà inverse di addizione e moltiplicazione

$\left.\begin{array}{l} \forall x \ \exists y \text{ tale che } x+y=0 \\ y \text{ lo chiamo } -x \end{array}\right\}$ SOTTRAZIONE

↳ y è unico

$a-b = a+(-b)$

operazione unaria

operazione binaria

campi (in più:)

$\left.\begin{array}{l} \text{dato un } x \neq 0 \ \exists y \text{ tale che} \\ x \cdot y = 1 \end{array}\right\}$ divisione

↳ y è unico se esiste

y lo chiamo $\frac{1}{x}$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$\mathbb{Z}/(3)$ campo

$\mathbb{Z}/(4)$ anello (e non un campo)

$\mathbb{Z}/(3)$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

da un assioma:
$0 \cdot x = 0$ in ogni anello.

$$\frac{1}{\bar{2}} = \bar{2} \qquad \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

$$? \cdot \bar{2} = 1$$

$\bar{2}$ (dalla tabella)

$\mathbb{Z}/(7)$

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$$\frac{1}{4} = 2$$

$$6 \quad ? \cdot 4 = 1$$

in ogni riga c'è 1 $\Rightarrow$ si può fare sempre l'inverso.

$\mathbb{Z}/(4)$

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\frac{1}{2} = \nexists$ $\Rightarrow$ non è un campo.

$\mathbb{Z}/(12)$ dimostrare

$\mathbb{Z}/(p)$

↳ se c'è un numero primo allora è un campo.

I sistemi lineari si possono fare su altri <u>campi</u> con le stesse "mosse" dell'algoritmo di Gauss. (su anelli non sempre).

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ sono anelli e campi (anche $\mathbb{C}$)

$\mathbb{Z}$ è un anello

$\mathbb{Z}/(n)$ possono essere campi (n è primo) o anelli

nei campi è più facile risolvere equazioni proprio perché è possibile fare la divisione

$$3x + 5y = 0$$

in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ è facile: y è libera (la scelgo a piacere) $= y_0$

$$x = -\frac{5y_0}{3}$$

la divisione deve essere possibile

in $\mathbb{Z}$ devo scegliere y_0 "più comodo".

In questo caso lo scelgo multiplo di 3

$y_0 = 3 \qquad x = -5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = -5$

Gauss funziona "bene" nei campi.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Se parto con coefficienti razionali, utilizzando Gauss, posso trovare una soluzione razionale.
Trovare soluzioni intere è più difficile.

→ Prendiamo un campo K $(K = \mathbb{R}, \mathbb{Q})$

Def di SPAZIO VETTORIALE su K — scalari

V — vettori

es: $V = \mathbb{R}^2$ con i vettori si può:
- moltiplicare per uno scalare
- sommare due vettori

non esiste la moltiplicazione tra vettori.

Assiomi: in V c'è un $\bar{+}$, $\bar{0}$
in K c'è un $+$, $\cdot$, 0, 1

es. in $\mathbb{R}^2$ $V = \bar{0}$ è il vettore $(0,0)$

$v_1 \bar{+} (v_2 \bar{+} v_3) = (v_1 \bar{+} v_2) \bar{+} v_3$ vale la legge ASSOCIATIVA

$v \bar{+} \bar{0} = v$

$a \cdot v$ — vettore $\in V$ $\qquad a \cdot v \in V \Rightarrow$ ottengo un vettore
scalare $\in K$

$v_1 \bar{+} v_2 = v_2 \bar{+} v_1$ legge commutativa

$1 \cdot v = v$

$\underbrace{(a+b)}_{\text{scalari}} v = av + bv$ legge distributiva tra scalari e vettore.

es. in $\mathbb{R}^2$

$$K - (3+5)\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}56\\24\end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}56\\24\end{pmatrix}$$

legge associativa (mista)

$$\underbrace{(a \cdot b)}_{\in K} \cdot \underset{\in V}{v} = a \cdot (b \cdot v)$$

es. $V = \mathbb{R}^2$ $\quad (2 \cdot 3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$

$$= 2 \cdot \left(3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$$

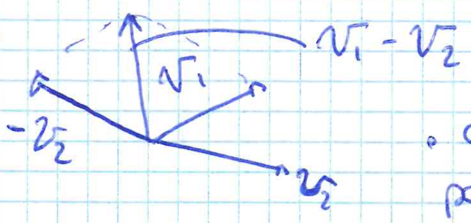
Se prendo lo scalare -1

$(-1)v \mp v = \bar{0}$ → assioma

$(-1)v = -v$ → osservazione

$v_1 - v_2 = v_1 \mp (-1 \cdot v_2)$

es $K = \mathbb{R}^2$



. costruisco $-v_2$ e poi con la regola del parallelogramma ottengo $v_1 - v_2$.

assioma:

$0 \cdot v = \bar{0}$

esempio:

1) scalari $= \mathbb{R}$
vettori $= \mathbb{R}^2$

polinomi in x

2) $\mathbb{R}[x]$ = vettori
$\mathbb{R}$ = scalari

li posso pensare come vettori (non più rappresentabili tramite frecce).

ADDIZIONE di polinomi.

$$(3 + 5x + 7x^2) + (7x + 4x^3) = 3 + 12x + 7x^2 + 4x^3$$

- vale la legge associativa ✓
- posso moltiplicare per uno scalare ($\mathbb{R}$) ✓

$$3(2x + 7x^2) = 6x + 21x^2$$

$$(3 \cdot 5) \cdot p(x) = 3(5 \cdot p(x))$$

$\vdots$

tutti gli assiomi tornano $\Rightarrow$ un vettore definito da un polinomio è uno SPAZIO vettoriale.

tutto ciò che rispetta TUTTI gli assiomi può essere chiamato spazio vettoriale

$\begin{cases} \mathbb{Q}[x] & \text{vettori} \\ \mathbb{R} & \text{scalare} \end{cases}$ NON SI PUÒ FARE

il vettore risultante potrebbe non appartenere ad $\mathbb{Q}[x]$

$\begin{cases} \mathbb{R}[x] & \text{vettori} \\ \mathbb{Q} & \text{scalari} \end{cases}$ SI PUÒ USARE.

es: $\mathbb{R}[x]^{=2} = V$

$K = \mathbb{R}$ ↗ non si possano sottrarre

$$(2+5x+7x^2) + (-1)\cdot(3+2x+7x^2) =$$

$$-1+3x+0 = 3x-1 \notin \mathbb{R}[x]^{=2}$$

allora non è uno
spazio vettoriale

es. $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ polinomi di grado ≤ 2

$$a+bx+cx^2$$

con l'esempio di prima
il vettore risultante $\in \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ perché
il grado era $=1$

È uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ → è isomorfo di $\mathbb{R}^3$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} a+bx+cx^2 \longmapsto (a,b,c) \\ a'+b'x+c'x^2 \longmapsto (a',b',c') \end{array} \right\} +$$

$$(a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2 \longmapsto (a+a', b+b', c+c')$$

il risultato deve
sia quando faccio prima il conto
con le due equazioni e poi lo
riporto in $\mathbb{R}^3$, sia quando prima
porto le due espressioni in $\mathbb{R}^3$ e poi
sommo.

V spazio vettoriale su K

$v \in V$ $\quad \mathrm{span}(v) = \{av \mid a \in K\} \subseteq V$

$$\mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}$$

$\subseteq V$

perché è somma
di vettori

Discreta 1/03/2017

Successione:

$S_0 = ?$

$S_1 = ?$

$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$ (*) simile a fibonacci ma non abbiamo inizializzato S_0, S_1

fib:

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$ $\qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

↓

stile di definizione di Fibonacci è importante

Trovare una formula chiusa che ci permetta di calcolare il valore finale senza conoscere i precedenti.

Trovare delle successioni S_n che verificano la (*)

Suggerimento: provate con

$$S_n = \alpha^n$$

↓

trovare il valore di α.

- provo con $S_n = \alpha^n$ sostituendo dentro (*)

dividido per α^n

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta$

due soluzioni

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Sto sostituendo α soluzione nelle precedenti espressioni per risalire ad S_n.

$$S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \alpha^n \quad (*)$$

↓

non è Fibonacci perché F_1 e F_0 non tornerebbero

↓

apporto delle modifiche

$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$$

una soluzione è $S_n = \alpha^n \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

poi $S_n = \beta^n \Rightarrow \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

altra soluzione:

combinazione lineare di queste

es: $S_n = 3\alpha^n$

sostituisco in $(*)$

$$S_{n+2} = 3\alpha^{n+2} \overset{?}{=} 3\alpha^{n+1} + 3\alpha^n$$

divido per 3

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \Rightarrow \text{vera}$$

quindi vale anche con β e con altri coefficienti moltiplicativi:

$$S_n = 4\beta^n$$

Cerchiamo una soluzione che rispecchi fibonacci:

Combino le due soluzioni

α e β

$3\alpha^n + 4\beta^n \overset{?}{=} S_n$ → non rispecchia Fibonacci così

↓

cerco altri numeri

$S_n = a\alpha^n + b\beta^n$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da trovare

verifichiamo se in (*) torna sostituendo:

$$a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2} \overset{?}{=} a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1} + a\alpha^n + b\beta^n$$

è vera!

$$a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2} - a\alpha^{n+1} - b\beta^{n+1} - a\alpha^n - b\beta^n = 0$$

raccolgo α e β

$$\underbrace{a\alpha^{n+2} - a\alpha^{n+1} - a\alpha^n}_{\substack{\text{già controllato } = \emptyset,\\ \text{anche con } a \text{ che moltiplica risolve}\\ \text{comunque il sistema}}} + \underbrace{(b\beta^{n+2} - b\beta^{n+1} - b\beta^n)}_{\text{stesso ragionamento con } \beta.} \overset{?}{=} 0$$

$$0 + 0 = 0$$

quindi è vera!

$S_n = a\alpha^n + b\beta^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

abbiamo 2 vincoli F_1 e F_0
ma anche 2 gradi di libertà a e b

così cerchiamo di riportarci a Fibonacci

⇓

dobbiamo scegliere a e b in modo che $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

$S_0 = 0 \qquad S_1 = 1.$

Sostituisco:

$$\begin{cases} S_0 = a + b = 0 \\ S_1 = a\alpha + b\beta = 1 \end{cases}$$

scegliamo a, b.

↓

le condizioni iniziali devono essere ricavate alla fine

↓

prima cerco una formula che mi genera il maggior numero possibile di soluzioni.

$$\begin{cases} a = -b \\ 1 = a\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{\alpha} - a\underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\beta} \end{cases}$$

$$1 = \cancel{\frac{1}{2}a} + \frac{\sqrt{5}}{2}a - \cancel{\frac{1}{2}a} + \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$1 = \sqrt{5}\,a \quad \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

soluzione generale:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n.$$

Fibonacci con formula chiusa

↓

$$S_0 = 0 \qquad S_1 = 1 \qquad S_n = F_n.$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

compare $\sqrt{5}$ anche se fibonacci opera con numeri naturali

⇓

nei conti $\sqrt{5}$ poi scomparirà così da avere come soluzione un numero naturale

Teorema generale di successioni "stile Fibonacci"

es. $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ ✓

abbiamo 3 basi

es: $a_{n+2} = 2a_{n+1}^{2} + 3a_n$

NON rientra nello stile di Fibonacci

non ci sono quadrati

Ricorrenza lineare a COEFFICIENTI COSTANTI

può essere anche $\emptyset$.

non ci sono "lettere" moltiplicative

es: $a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2a_n$

NON è lineare a coefficienti costanti

metodo per risolverla:

- cerchiamo tante soluzioni che possa risolvere l'equazione iniziale
- poi cerchiamo i casi base.

→ proviamo con α^n, se non va bene provo con $n\alpha^n$

es:

$$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = -1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 22 \end{array}\right\} \text{condizioni iniziali}$$

Trovare una formula chiusa.

→ Per risolvere $(*)$ provo con

$$a_n = \alpha^n$$

Sostituisco:

$$\alpha^{n+3} = 6\alpha^{n+2} - 11\alpha^{n+1} + 6\alpha^n$$

$$\alpha^{n+3} - 6\alpha^{n+2} + 11\alpha^{n+1} - 6\alpha^n = 0$$

divido per α^n

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0$$

soluzioni

$$\alpha = 1, 2, 3$$

$\downarrow$

3 radici diverse tra loro

$\hookrightarrow$ situazione ideale.

$\rightarrow$ provo con 1^n, 2^n, 3^n e con una combinazione lineare $a1^n + b2^n + c3^n$

controllo che 2^n verifichi la (*) (sostituendo)

$$2^{n+3} - 6 \cdot 2^{n+2} + 11 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 0$$

divido per 2^n

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$$ vera perché 2 è una radice del polinomio.

2^n verifica (*), anche 1^n e 3^n e pure

$$\underbrace{a1^n + b2^n + c3^n = 0}_{\text{verifico le condizioni iniziali cercando } a,\ b,\ c.}$$

• sostituisco

$$\begin{cases} a_0 = -1 = a + b + c \\ a_1 = 4 = a + 2b + 3c \\ a_2 = 22 = a + 4b + 9c \end{cases}$$

$a + b + c$

$a + 2b + 3c$

risolvo il sistema.

... calcoli ...

trovati $\overset{-2}{a}, \overset{-3}{b}, \overset{4}{c}$ li sostituisco in

$$a_n = a1^n + b2^n + c3^n$$

$\downarrow$

formula chiusa della successione iniziale.

Esempio in cui viene un polinomio con radici multiple

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 4b_n \qquad b_0 = 5 \quad b_1 = 7$$

$b_n = \alpha^n$ <u>provo</u>!

$$\alpha^{n+2} = 4\alpha^{n+1} - 4\alpha^n$$

$$\alpha^{n+2} - 4\alpha^{n+1} + 4\alpha^n = 0$$

divido per α^n

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

$$(\alpha - 2)^2 = 0$$

$$\alpha = 2$$

provo con $b_n = 2^n$ viene (*)

$b_n = a2^n$ $\Rightarrow$ una sola soluzione = un solo grado di libertà.

per trovare un secondo grado di libertà provo anche con

verificano entrambe la (*).

$$\begin{cases} b_n = n\, 2^{n-1} \\ b_n = 2^n \end{cases}$$

aggiunto un n moltiplicativo.

verifico $b_n = n2^{n-1}$

• sostituisco $b_n = n2^{n-1}$ nella (*)

$$(n+2)2^{n+1} = 4(n+1)2^n - 4n2^{n-1}$$

divido per 2^{n-1}

$$4(n+2) - 4(n+1)\cdot 2 + 4n = 0$$

giusta. $\downarrow$ calcolo

$\hookrightarrow$ $4n+8-8n-8+4n=0$

→ combinazione lineare tra

2^n e $n2^{n-1}$

$$b_n = \underbrace{a}\,2^n + \underbrace{b}\,n2^{n-1}$$

con a, b gestisco i casi base.

rel. ricorrente lineare ⇒ se due soluzioni risolvono (*) anche la loro somma la risolve.

$$\begin{cases} b_0 = 5 = a + b\cdot 0 \\ b_1 = 7 = 2a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$b_n = 5\cdot 2^n - 3n2^{n-1}$$