Matematica discreta 15/03/2017

ricevimento collettivo 16/03 ore 9/10.45

$ax \equiv b \ (c)$

trovare $\underline{\underline{x}} \in \mathbb{Z}$

È risolubile se e solo se $mcd(a, c) = 1$ e $mcd(a, b) \mid b$

Dimostrazione:

$\downarrow$ basata su Bezout.

Se $mcd(a, c) = 1$

per Bezout

$$1 = \alpha a + \beta c$$

dimostrazione in cui $b = 1$

$\Downarrow$

diventa una congruenza

$$1 \equiv a\alpha \ (c)$$

$\downarrow$ moltiplico per b

$$b \equiv a(\alpha b) \ (c)$$

$x = \alpha b$

Se $mcd(a, b) \mid b$ (b generico)

es:

$$6x \equiv 2 \ (4)$$

l'inverso di 6 mod (4) non c'è (hanno fattori comuni).

però 2 divide 2 e la congruenza si può risolvere lo stesso.

Per Bezout $2 = 6 \cdot u + 4 \cdot v$ $\qquad$ $2 = 6 \cdot 1 + 4(-1)$

$mcd(6,4)$ $\qquad$ $2 \equiv 6 \cdot 1 \ (4)$

$$2 \equiv 6 \underline{u} \ (4)$$

$\downarrow$ x da trovare

II° metodo

$6x \equiv 2 \ (4) \rightarrow$ non posso dividere per 2 perché l'inverso di 2 non c'è.

Posso dividere tutti e 3 i numeri per 2

$3x \equiv 1\ (2)$ ✓ giusto

$\exists x \quad 6x \equiv 2\ (4)$

equivale

$\exists x$
$\exists k \quad 6x = 2 + k4$

$3x = 1 + k2$

riporto nella forma di congruenze

$\exists x \quad 3x \equiv 1\ (2)$

teorema

$$ax \equiv b\ (c)$$

se trovo $n \in \mathbb{Z}$ che divide $a, b$ e $c$,

$\Rightarrow \quad ax \equiv b\ (c)$

$a'nx \equiv b'n\ (c'n)$

$\Downarrow$

$a'x \equiv b'\ (c')$

$\underbrace{a = a'n \quad b = b'n \quad c = c'n}_{\text{in } a, b, c \text{ compare un fattore } n.}$

teorema, dimostrazione

Se $(a, c) \mid b$ allora

$\exists u, v \quad au + \quad v = b$ equazione Diofantea

$au \equiv b\ (c)$

quindi ho risolto la congruenza.

Se so risolvere la congruenza

deve valere $\text{mcd}(a, c) \mid b$

$\Downarrow$ se $\exists x \ . \ ax \equiv b(c)$

$ax = b + kc$

$d = \text{mcd}(a, c)$ divide $\underline{ax}$ e $\underline{kc}$

allora divide anche $b$ (perché $b = ax - kc$).

Esercizi

$n = 1234567$ è divisibile per $3, 7, 9, 11$?

$$n = 7 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + \dots + 1 \cdot 10^6$$

- $10 \equiv x \ (3) \qquad x = 1$

  $n \equiv 7 + \cancel{6} + \cancel{5} + \cancel{4} + \cancel{3} + \cancel{2} + \cancel{1} \ (3)$

  $7 = 1 \qquad n \equiv 1 \ (3) \qquad 3 \nmid n$

- $10 \equiv x \ (9) \qquad x = 1$

  $n \equiv \cancel{7} + \cancel{6} + \cancel{5} + \cancel{4} + \cancel{3} + \cancel{2} + 1 \ (9)$

  $n \equiv 1 \ (9) \qquad 9 \nmid n$

- $10 \equiv x \ (11) \qquad x = -1$

  $n \equiv +\underline{7 - 6} + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$

  $n \equiv 4 \ (11) \qquad 11 \nmid n$

- $10 \equiv x \ (4) \qquad x = 2$

  $100 \equiv 0 \ (4)$

  $67 + \underbrace{1234500}_{\text{multipli di } 100}$

  $n \equiv 67 \ (4) \qquad 4 \nmid n.$

Per $(4)$ consideriamo solo le ultime 2 cifre

- $10 \equiv x \ (7) \qquad 1000 \equiv -1 \ (7)$

  considero le ultime 3 cifre

  $567 + 1234000 = n.$

$$n = (\underset{-1}{\underline{1000}} \cdot 1234) + 567 \underset{(7)}{\equiv}$$

$$= \underset{\substack{\text{tiro fuori} \\ \text{un altro 1000}}}{\underline{-1234}} + 567$$

$$= 1 - 234 + 567 \equiv 334 \equiv 5\ (7) \qquad 7 \nmid n$$

Per dividere dopo la congruenza ci deve essere uno 0.

es:

$$\sqrt{n} \in \mathbb{N} \ ? \qquad n = 1234567$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} \ . \ x^2 = 1234567 \ ?$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 \equiv 1234567\ (m)$$

provo con $m=4$

$$x^2 \equiv 1234567\ (4)$$

Un quadrato a quanto può essere congruo mod 4 ?

facciamo delle prove:

$$1234567 \equiv 3\ (4)$$

Per assurdo se $x^2 = 1234567$

$$\Rightarrow \quad x^2 \equiv 1234567\ (4)$$

$$\text{\rotatebox{90}{$\equiv$}}$$

$$3\ (4)$$

$\exists x \ . \ x^2 \equiv 3\ (4)$ ? no!

$$0^2 \equiv 0\ (4)$$

$$1^2 \equiv 1\ (4)$$

$$2^2 \equiv 0\ (4)$$

$$3^2 \equiv 1\ (4)$$

si ripetono 0, 1 andando avanti.

Perché si ripetono?

Ogni numero è congruo a $0, 1, 2, 3 \ (4)$
quindi a $0^2, 1^2, 2^2, 3^2$.

un teorema dice:

$$a \equiv a' \ (n)$$
$$b \equiv b' \ (n)$$
$$\Rightarrow a \cdot b \equiv a'b' \ (n)$$

quindi

$$\begin{aligned} 17 &\equiv 1 \ (4) \\ 17 &\equiv 1 \ (4) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 17^2 &\equiv 1 \cdot 1 \ (4) \\ 17^2 &\equiv 1 \ (4) \end{aligned}$$

Non può esistere

$x^2 \equiv 3 \ (4)$ perché $\forall x \in \mathbb{Z}$

$x^2 \equiv 0 \ (4)$ oppure

$x^2 \equiv 1 \ (4)$ mai 3

Proviamo con mod 3:

$1234567 \equiv 1 \ (3)$

$x^2$ può essere $\equiv 1 \ (3)$

es:

$$\begin{array}{r|l} 2^{99} & 5 \\ \hline & 9 \\ r & \end{array}$$

quale è il resto?

$$2^2 \equiv -1 \ (5)$$

$$2^{99} = \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}_{49} \cdot 2 = (2^2)^{49} \cdot 2 \equiv (-1)^{49} \cdot 2 \ (5)$$

$$\equiv -1 \cdot 2 \ (5) \equiv -2 \ (5)$$

$$3 \ (5)$$

risposta, è il resto della divisione.

$$\begin{cases} ax \equiv b\ (m_1) \\ a'x \equiv b'(m_2) \end{cases}$$

es.

$$\begin{cases} 7x \equiv 5\ (15) & (a) \\ 15x \equiv 21\ (8) & (b) \end{cases}$$

$-1 \cdot x \equiv 5\ (8)$

$-x \equiv 5\ (8)$

oppure $-x \equiv -3\ (8)$

$\boxed{x \equiv 3\ (8) \quad (b)}$

soluzioni di (b) $x = 3 + k8$

- sostituisco nella (a) cercando il $k$ t.c.

$x = 3 + k8$ risolva (a)

$7(3 + k8) \equiv 5\ (15)$ $k$ è l'incognita.

$21 + 56k \equiv 5\ (15)$

$6 + 11k \equiv 5\ (15)$

$11k \equiv -1\ (15)$

$\mathrm{mcd}(11, 15) \mid -1 \Rightarrow 1$

trovare l'inverso di 11

$11 = -4\ (15)$

$-4k \equiv -1\ (15)$

$4k \equiv 1\ (15)$

$k = 4$ è una soluzione

$k = 4 + m15$

$x = 3 + 4 \cdot 8$ risolve il sistema

$x = 35 \equiv 5\ (15)$ ✓ risolve (a) e (b).

Se $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ o $a \mid c$ ?

Domanda d'esame **NO** se non è primo.

es: $6 \mid 4 \cdot 3$ ma $6 \nmid 4$ e $6 \nmid 3$.

in alcuni casi sì però.

Teorema:

$a \mid b \cdot c$ e $mcd(a, b) = 1$
allora $a \mid c$.

dimostrazione

$d = mcd(a, b) = 1$

per Bezout $\exists x, y$. $d = ax + by = 1$

moltiplico per $c$:

$c = \underbrace{acx} + \underbrace{bcy}$ — ipotesi $a \mid b \cdot c$

a divide

$\Downarrow$

divide la loro somma

$a \mid c$

corollario:
unicità della scomposizione in primi:

es:

$7 \mid b \cdot c \Rightarrow 7 \mid b$ o $7 \mid c$ ?

Si perché è primo (in generale con i primi funziona).

basta far vedere che

se $\underbrace{7 \nmid b}_{\text{ipotesi}} \Rightarrow 7 \mid c$. $\qquad A \vee B \equiv \bar{A} \Rightarrow B$

Supponiamo che $7 \nmid b \Rightarrow mcd(7, b) = 1$

allora $7 \mid c$ perché $7 \mid b \cdot c$ ma $b = 1$
quindi $7 \mid 1 \cdot c$

se $p | ab \Rightarrow p | a \vee p | b$

p primo.

Unicità della fattorizzazione:

es: $13 \cdot 19 = 7 \cdot 31$
? ⟶ **no**.

$7 | 7 \cdot 31 = 13 \cdot 19 \Rightarrow 7 | 13 \cdot 19$
quindi

nessun primo divide un altro primo. $\begin{cases} 7 | 13 & \text{o} \\ 7 | 19 \end{cases}$ Assurdo.

$31^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 19 = 7^2 \cdot 31 \cdot 19^2 \cdot 13$

ALGEBRA lineare 15/03/2017

$f: V \to W$ lineare

base $v_1 \dots v_n \in V$

base $w_1, \dots, w_m \in W$

posso associare una matrice $m \times n$ $[f]$

matrice con nella $i$-esima colonna gli scalari:

$$f(v_i) = w = \underline{a_{i1}} w_1 + \dots + \underline{a_{im}} w_m$$

$$\begin{array}{c} \text{i-esima colonna} \\ \begin{pmatrix} \dots & a_{i1} & \dots \\ & a_{i2} & \\ & \vdots & \\ & a_{im} & \end{pmatrix} \end{array}$$

Supponiamo

$f: V \to W$ $\quad g: W \to U$

consideriamo la composta

$g \circ f$ se $f, g$ sono lineari $\Rightarrow g \circ f$ è lineare.

Avremo Basi $B_V$, $B_W$, $B_U$

La matrice $[g \circ f]_{B_U}^{B_V}$

$$[g]_{B_U}^{B_W} \qquad [f]_{B_W}^{B_V}$$

che rapporto abbiamo tra le matrici?

moltiplicazione tra le due matrici

$$[g \circ f]_{B_U}^{B_V} = [g]_{B_U}^{B_W} \cdot [f]_{B_W}^{B_V}$$

Dim di $V = a \Rightarrow B_V = \{v_1, \dots, v_a\}$

di $W = b \Rightarrow B_W = \{w_1, \dots, w_b\}$

di $U = c \Rightarrow B_U = \{u_1, \dots, u_c\}$

$$c \times b \cdot b \times a = \underset{[g \circ f]}{c \times a}$$

$$\underbrace{\underset{c \times b}{G} \cdot \underset{b \times a}{F}}_{\text{matrici}} = \underset{c \times a}{Q}$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{c1} & g_{c2} & \cdots & g_{cb} \end{pmatrix} \quad c \times b \quad = (g_{ij})_{\substack{i \le c \\ j \le b}}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1a} \\ \vdots & & & \\ f_{b1} & f_{b2} & \cdots & f_{ba} \end{pmatrix} \quad b \times a \quad = (f_{jk})_{\substack{j \le b \\ k \le a}}$$

$$G \cdot F = (g_{ij})_{\substack{i \le c \\ j \le b}} \cdot (f_{jk})_{\substack{j \le b \\ k \le a}} = Q = (q_{ik})_{\substack{i \le c \\ k \le a}}$$

Come si calcola $Q$?

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^{b} g_{ij} \cdot f_{jk}$$

moltiplicazione righe per colonne

$$= g_{i1} f_{1k} + g_{i2} f_{2k} + \dots + g_{ib} \cdot f_{bk} =$$

somma che dipende solo da $i$ e da $k$

$$= \underbrace{(g_{i1}, \dots g_{ib})}_{i\text{-esima riga}} \cdot \underbrace{(f_{1k}, \dots, f_{bk})}_{k\text{-esima colonna}}$$

es:

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \\ 5 \quad 6 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}}$$

$q_{11} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1$

$q_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3$

$q_{21} = 3 0 + 4 \cdot 1$

$q_{22} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4$

$q_{31} = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1$

$q_{32} = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3$

Teorema:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

legge associativa.

$c \times b$ $\quad b \times a$ $\quad a \times d$

$A$ $\quad B$ $\quad C$.

non vale la legge commutativa

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

es: $\underset{4\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{B}$

$\downarrow$

vettore colonna $\Rightarrow$ moltiplichiamo per le coordinate di un vettore.

---

$3\times 2 \cdot 2\times 1$

$A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$q_{11} = 3x + 4y$

$q_{21} = 2x + 0y$

$q_{31} = 1 \cdot x + 6 \cdot y$

$3\times 1$ terne di numeri

$$= x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

collegamento ai sistemi lineari.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x + 0y = 2 \\ 1x + 6y = 7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Un sistema $\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1k} x_k = b_1 \\ \vdots \\ a_{l1} x_1 + \dots + a_{lk} x_k = b_k \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \cdots & a_{lk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$Av = w \rightarrow$ questo è un sistema in forma matriciale.

Ad ogni funzione lineare si può associare una matrice.

Anche, data una matrice $A$ $k \times n$ gli posso associare una funzione lineare

$$f : K^n \to K^m$$

es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f_A(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 2x \\ x + 6y \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^3}$$

$$f_A(1,1) = (7, 2, 7)$$

Le funzioni che si ottengono da matrici sono lineari.

Da $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ottengo matrice $k \times n$ e viceversa

usando le basi canoniche.

Ad ogni funzione lineare si può associare una matrice.

Anche, data una matrice A $k \times n$ gli posso associare una funzione lineare

$$f : K^n \to K^m$$

es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f_A(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 2x \\ x + 6y \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^3}$$

$$f_A(1, 1) = (7, 2, 7)$$

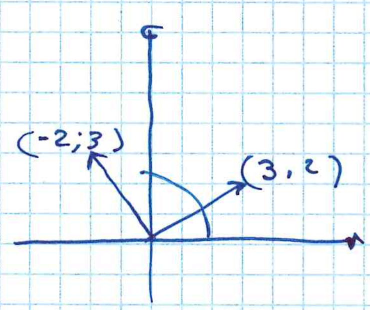
Le funzioni che si ottengono da matrici sono lineari.

Da $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ottengo matrice $k \times n$ e viceversa

usando le basi canoniche.

es:  $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$r$ = Rotazione di $90°$

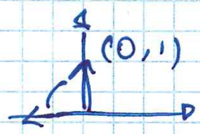



$r$ è lineare!

Calcolare la matrice $[r]$

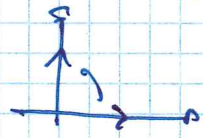
$2 \times 2$.

base $(1,0),(0,1)$ partenza
base $(1,0),(0,1)$ arrivo.




$r(0,1) = (-1,0)$

$r(1,0) = (0,1)$



$$[r] = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

risultato del primo vettore

risultato secondo vettore.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ruota il vettore di $90°$

$(0,1) \xrightarrow{r\circ r} (0,-1)$

$(1,0) \xrightarrow{r\circ r} (-1,0)$

$$[r \circ r] = [r] \cdot [r]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2$

coordinate di $(r \circ r)(0,1)$

coordinate di $(r \circ r)(1,0)$

rotazione di $180°$

$r(r(v))$

$\dfrac{90°}{90°} \Rightarrow 180°$ (rotazione)

Comporre e calcolare le matrici è uguale

a calcolare le matrici e moltiplicarle.

(in tutte le basi)

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & U \\ a & & b & & c \\ B_V \Big\downarrow & & \Big\downarrow \text{coordinate} & & \Big\downarrow \\ \mathbb{R}^a & \xrightarrow{[f]} & \mathbb{R}^b & \xrightarrow{[g]} & \mathbb{R}^c \end{array}$$

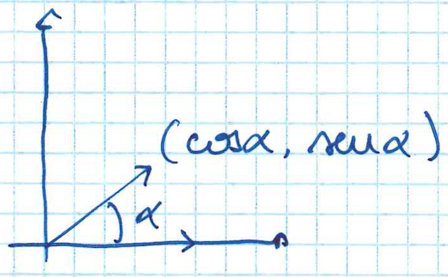
funzioni $\updownarrow$ matrici

vettori $\updownarrow$ coordinate

teorema $\quad [f]^{B_V}_{B_W} \cdot [g]^{B_W}_{B_U} = [g \circ f]^{B_V}_{B_U}$

es: rotazione di un angolo $\alpha$.

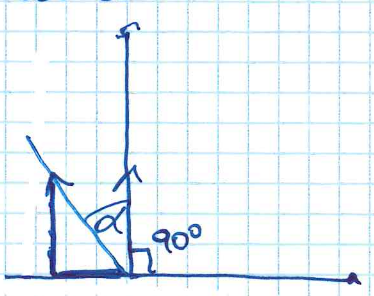
calcolare matrice $r_\alpha$




$\alpha$ in radianti. $\quad r_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$[r_\alpha] \overset{?}{=}$

basi canoniche in partenza e arrivo



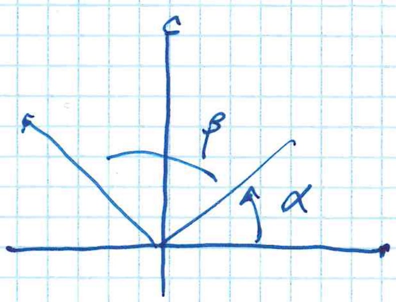

$r_\alpha(1,0) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

$r_\alpha(0,1) = (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$

$$[r_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} | & | \\ r_\alpha(1,0) & r_\alpha(0,1) \end{array}$$

$r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}$

Matrice della composizione = prodotto delle matrici



$$[r_{\alpha+\beta}] = [r_\alpha]\cdot[r_\beta]$$

$$\hookrightarrow = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$[r_\alpha]\cdot[r_\beta]$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

stesso risultato di prima
ma in formule estese.

Somma di matrici:

definizione

$$(m\times n) + (m\times n) = (m\times n)$$

devono avere
le stesse dimensioni

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

in generale:

$$(a_{ij})_{\substack{i\le a \\ j\le b}} + (b_{ij})_{\substack{i\le a \\ j\le b}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i\le a \\ j\le b}}.$$

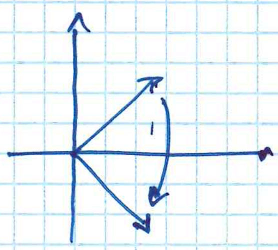
es: $A(B+C) = AB + AC$

vale la proprietà distributiva
(quella COMMUTATIVA <u>NO</u>).

$r \Rightarrow$ rotazione di $90°$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

consideriamo il RIBALTAMENTO lungo asse $x$. $[b]$



$$[b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1,0) \xrightarrow{b} (1,0)$$
$$(0,1) \xrightarrow{b} (0,-1)$$

$$r \cdot b \neq b \cdot r$$

$[b][r] \neq [r][b]$ visibile anche a livello geometrico.

RICEVIMENTO COLLETTIVO. m.d.

$13^3 \cdot 7^3 \cdot 5^2 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2$

dividido per $7^2$

$7 \cdot 5^2 \cdot 13^3 = 11 \cdot 13^2$

divido per il primo che compare due volte col esponente minore.

A.L

$(f \circ g) = f(g(v))$

$A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \left[ B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]$

argomento a destra
primo processato a destra.

md.

nelle ricorrenze lineari

$F_n \quad A\alpha^n + B\cancel{\beta}^n$

x sono radici uguali
proviamo

$n\alpha^n \circ n^2\alpha^n \dots$ così via.

es:

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-2} + n \qquad n \geq 2$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $1+2$ | | $(1+2)+4$ | | $(1+2+4)+6$ |

$a_8$
$(1+2+4+6)+8$

successione per pari e dispari

somma numeri +1

è pari

se $n$ è pari $a_n =$

$\hookrightarrow a_{2n} = 1 + 2\cdot 1 + \dots + 2(n-1) + 2n$

$$a_{2n} = 1 + \sum_{i=1}^{n} 2i = 1 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$a_{2n} = 1 + n(n+1).$$

dimostriamo per induzione

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = a_{2n} + 2n + 2$$

supponiamo che

$$a_{2n} = n(n+1) + 1$$

sostituisco

$$= 1 + (n+1)n + 2n + 2 = 1 + (n+1)(n+2)$$

verifica

per i numeri dispari:

$$a_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} 2i + 1$$

| $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_7$ | |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1+3$ | $(1+3)+5$ | $(1+3+5)+7$ | $\Rightarrow$ somma dei numeri dispari |

$$= \sum_{i=1}^{n} 2i + 1 = n^2$$

se $a_{2n} = 1 + n(n+1)$

$a_{n} = 1 + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) & \text{se } n \text{ pari} \\ & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

es:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}}_{P(n)}$$

caso base

$n = 1$ $\quad \frac{1}{1} \geq \sqrt{1}$ giusto induzione forte. $\rightarrow$ assumo veri tutti i precedenti.

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\text{per } P(n) \text{ è vera}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\geq} \sqrt{n+1}$$

$$\geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\geq} \sqrt{n+1}$$ moltiplichiamo per $\sqrt{n+1}$

$\Updownarrow$

$$\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} + 1 \geq \underbrace{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}_{n+1}$$

$\Updownarrow$

$$\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} \geq n \quad \text{certo}$$

$$= \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$$

quindi è vero!

$=$

$>$

es:

1 1cm $\xrightarrow{1 \text{ giorno}}$ $\underbrace{\left(1\text{cm} + \frac{1}{30} 1\text{cm}\right)}_{x}$ $\xrightarrow{2 \text{ giorno}}$ $\left(1+\frac{1}{30}\right) + \frac{1}{30}\left(1+\frac{1}{30}\right)$

$x \longrightarrow x + \frac{1}{30}x$

dopo 365 è $\geq 40$ metri

dimostrazione:

allora: $\underbrace{(1+x)^n \geq 1+xn}_{P(n)}$. $\rightarrow$ dimostriamo per induzione

$n=0$ ✓ vero

$P(n+1)$ $\quad (1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$

$\boxed{x \geq -1}$

$$= (x+1)^n\cdot(x+1) \geq (1+nx)(1+x)$$

per $P(n)$ ✓

$$1+nx+x+nx^2$$

$$1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

sicuramente.

fagiolo cresce di $\frac{1}{30}$

$x_n$ = altezza del fagiolo dopo n giorni

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{30} x_n \qquad x_0 = 1 \qquad \left(1+\frac{1}{30}\right) x_n$$

$$x_{365} = \left(1+\frac{1}{30}\right)^{365}$$

$$x_n = \cancel{1}\left(1+\frac{1}{30}\right)^n \quad \text{vera}$$

$$x_{n+1} = x_n \left(1+\frac{1}{30}\right) = \left(1+\frac{1}{30}\right)^n \left(1+\frac{1}{30}\right) = \left(1+\frac{1}{30}\right)^{n+1}$$

quindi

$$x_n = \left(1+\frac{1}{30}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^{365} \underset{?}{\geq} 4000$$ domande dell'esercizio.

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^{365} \geq 1 + 365\,\frac{1}{30}$$ non è maggiore di 4000.

$365 \geq 360 = 10 \cdot 36.$

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^{365} > \left(\left(1+\frac{1}{30}\right)^{10}\right)^{36} \geq (1+1)^{10} = 2^{10} \underset{?}{\geq} 4000$$

$$\frac{\cancel{36}\ \cancel{18}\ 6}{\cancel{30}\ \cancel{15}\ 5} = \frac{6}{5} = \left(\frac{11}{5}\right)^{10}$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{30}\right)^{10}\right)^{30} = \left(1+\frac{1}{3}\right)^{30}$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{30}\right)^{3}\right)^{100} \geq \left(1+\frac{1}{10}\right)^{100} = \left(\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}\right)^{10} \cdot 2^{10}$$

$$2^{10} = 1024$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{30}\right)^{30}\right)^{12} = 2^{12} \geq 4000$$

es: $u_0 = 0$

$u_{k+1} = 3u_k + 3^k$

$u_k = k3^{k-1}$

$P(k)$ vero

$P(k+1) = 3k3^{k-1} + 3^k$

$3^k(k) + 3^k = 3^k(k+1)$ vero!

A.L

es:

$V_a \begin{cases} x+2y+z=0 \\ ax+z+3t=0 \end{cases}$ a parametro

insieme delle soluzioni $= \{(x,y,z,t) \mid \dots\}$

$W_a$ span $\begin{pmatrix} a+1 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

dimensione $V_a \cap W_a \to$ matrice

e $V_a + W_a \to$ span

$V_a$ sottoforma di span

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$a=0$
caso speciale.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

se $a \neq 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2a & (1-a) & 3 \end{bmatrix}$

t e z sono libere

$$y_0 = \frac{3t + (1-a)z}{2a}$$

$\dim V_a = 2^{\,z,t} \quad a \neq 0$

$\dim V_a = 2 \quad a = 0$

$t, y$

dimensione date dal numero di variabili libere. | → quando si ragiona su sistemi.

$a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -z - \dfrac{(1-a)z + 3t}{2a} \\ \dfrac{(1-a)z + 3t}{2a} \\ z \\ t \end{pmatrix} =$$

$$z \begin{pmatrix} -1 - \frac{(1-a)}{a} \\ \frac{1-a}{2a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{a} \\ \frac{3}{2a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z = 1$
$t = 0$

$z = 0$
$t = 1$

$$V_a = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 - \frac{1-a}{a} \\ \frac{1-a}{2a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{a} \\ \frac{3}{2a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono indipendenti perché la dim = 2.

$$V_a + W_a = \operatorname{span}\{v_1, v_2, w_3, w_4\}$$

potrebbero non essere indipendenti.

riduco a scalini i 4 vettori

consideriamo $a=3$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

se ho vettori

lo span non cambia
se sottraggo un multiplo
di un altro vettore

Mettiamo in orizzontale
i vettori.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3R_1 \\ R_2+R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-R_1 \end{array}$$

$$\begin{matrix} +1 & +1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -11 & 3 \\ 0 & & & \end{matrix}$$

Quando le coordinate dei vettori
sono a scalini $\Rightarrow$ so la dimensione

Matematica discreta 16/03/2017

Esercizi:

ho x penne. Se le divido tra

- 3 persone ne avanzano 2
- 5 " " " 3
- 11 " " " 1

impostiamo con le congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 2\ (3) & (a) \\ x \equiv 3\ (5) & (b) \\ x \equiv 1\ (11) & (c) \end{cases}$$

2 possibilità: nessuna soluzione / infinite soluzioni

riduciamo le prime due congruenze ad una sola congruenza:

(a) $\exists k \quad x = 2 + 3k$ — multiplo di 3

va scritto nel compito

sostituisco in (b) la x trovata in (a)

$$2 + k3 \equiv 3\ (5)$$

nuova incognita

$$3k \equiv 1\ (5)$$

moltiplico per 2

(5) $1 \equiv 6 = 2 \cdot 3 \quad k \equiv 2\ (5)$

$$k = 2 + l5$$

sostituisco di nuovo in (a) il valore di k

$$x = 2 + 3(2 + 5l)$$

risolve (a),(b) $\forall l$

sostituisco in (c) il valore di x.

$$x = 8 + 15l \Rightarrow x \equiv 8\ (15)$$

$$\begin{cases} x \equiv 2\ (3) \\ x \equiv 3\ (5) \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 8\ (15)$$

$$\begin{cases} x \equiv 8\ (15) \\ x \equiv 1\ (11) \end{cases} \qquad x = 8 + 15\ell$$

$$8 + 15\ell \equiv 1\ (11)$$

$$15\ell \equiv -7\ (11) \qquad -7+11 \Rightarrow 4$$

possiamo dividere per 4 perché non ha fattori in comune con 11

$$4\ell \equiv 4\ (11)$$

$$3 \cdot 4\ell \equiv 4 \cdot 3\ (11)$$

$$3\cdot 4 \Rightarrow 1 \qquad 4\cdot 3 \Rightarrow 1$$

$$\ell \equiv 1\ (11)$$

$\ell = 1 + 11j$ → sostituisco nella $x$

$$x = 8 + 15(1 + 11j)$$

$$x = 23 + 165j$$

$$\underbrace{x \equiv 23\ (165)}_{\text{tutte le soluzioni possibili}}$$

teoria:

$$\begin{matrix} (a_1) \\ (b_1) \end{matrix} \begin{cases} x \equiv a\ (m_1) \\ x \equiv b\ (m_2) \end{cases}$$

quando è risolvibile?

ha soluzione se e solo se:

$$x = a + km_1$$

sostituisco in $(b_1)$

$$a + km_1 = b\ (m_2)$$

$$km_1 = b - a\ (m_2)$$

nuova incognita

$\text{mcd}(m_1, m_2) \mid b - a$ ⇒ la congruenza ha soluzione.

es:
$$\begin{cases} x \equiv 2 \ (15) \\ x \equiv 6 \ (20) \end{cases}$$ non ha soluzione

$\text{mcd}(15, 20) \overset{?}{\mid} 6-2$

$5 \mid 4$

? no! non divide $\Rightarrow$ non ha soluzione

se $x \equiv 2 (15) \Rightarrow x \equiv 2 (5)$

se $x \equiv 6 (20) \Rightarrow x \equiv 6 (5)$

$\Downarrow$

$x - x \equiv 2-6 \ (5)$

$0 \equiv -4 \ (5)$ ASSURDO

Se $x_0$ è soluzione ne trovo altre del tipo $x_0 + k \, \text{mcd}(m_1, m_2)$

Se $\text{mcd}(m_1, m_2) = 1$ c'è sempre soluzione
divide b-a sempre.

es:

$F_n$ = n-esimo fibonacci

$\text{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ $P(n)$

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\underbrace{34, 55}_{\text{mcd} = 1}$, 89

dimostriamo che due numeri consecutivi di fibonacci non hanno fattori comuni.

$\text{mcd}(A, B) = \text{mcd}(a - kb, b)$ Algoritmo di euclide

$$\left.\begin{array}{l} \text{mcd}(F_0, F_1) = (0, 1) = 1 \\ \text{mcd}(F_1, F_2) = (1, 1) = 1 \end{array}\right\} \text{base}$$

$\text{mcd}(F_{n+1}, F_{n+2}) \overset{?}{=} 1$

$P(n+1)$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

quindi

$$mcd\,(F_{n+1},\ F_{n+1} + F_n)$$

per Euclide

$$mcd\,(F_{n+1},\ F_n) = P(n) = 1$$

quindi stabilito il caso successivo.

$$(F_4,\ \underset{F_4+F_3}{F_5}) = (\underset{F_3+F_2}{F_4},\ F_3) = (F_2,\ \underset{F_2+F_1}{F_3}) = (\underset{F_1+F_0}{F_2},\ F_1) =$$

$$= (F_0,\ F_1) = 1$$ caso base.

es: Paradosso della freccia

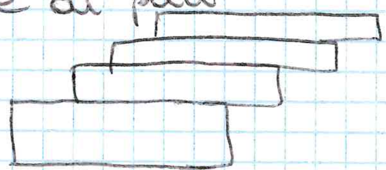
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \dots \leq 2$$

progressione geometrica

Successione del tipo:

$$\exists n.\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} \geq 10^{10}$$

cresce di più



sporgenze infinite.

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

voglio dimostrare

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

($P(n)$)

per superare $10^{10}$ prendo $n = 2 \cdot 10^{10}$

$k = 2^{2 \cdot 10^{10}}$

dimostriamo per induzione:

$$P(1) = \sum_{i=1}^{2^1} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$$

caso base

$P(n+1)$ ?

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} =$$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i}} + \underbrace{\sum_{i=2^n+1}^{2^n+2^n} \frac{1}{i}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

per $P(n)$

$$\left(1 + \frac{n}{2}\right) + \left( \qquad \qquad \right) \overset{?}{\geq} 1 + \frac{(n+1)}{2}$$

dimostrare che è $\geq \frac{1}{2}$

sono $2^n$ termini

$$\sum_{i=2^n}^{2^n+2^n} \frac{1}{i} \geq \underbrace{\sum_{i=2^n}^{2^n+2^n} \frac{1}{2^n+2^n}}$$

$$\Downarrow$$

$$= 2^n \left(\frac{1}{2^n+2^n}\right) = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\sum_{i=2^n}^{2^n+2^n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$$

quindi abbiamo dimostrato

$$H_{2^{n+1}} \geq H_{2^n} + \frac{1}{2}$$

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{(n+1)}{2}$$

es:

$$2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^m} - 1 \quad \text{se } \underline{n < m}$$

$$\uparrow$$

$P(n)$

idea: $(x^2-1)=(x+1)(x-1)$

se $x=2^{2^n}$

$x^2=(2^{2^n})^2 = 2^{2^n\cdot 2} = 2^{2^{n+1}}$

$$\underbrace{\left(2^{2^{n+1}}-1\right)}_{x^2} = \underbrace{\left((2^{2^n})^2-1\right)}_{x^2} = \left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)$$

$2^{2^n}+1 \mid 2^{2^{n+1}}-1$ vera perché

per $m=n+1$

$P(k) = 2^{2^n}+1 \mid 2^{2^{n+k}}-1$

teniamo n fermo
e m aumenta

$P(1)$ base $\checkmark$

idea: $2^{2^n}+1 \mid 2^{2^{n+1}}-1 \mid 2^{2^{n+2}}-1 \mid 2^{2^{n+3}}-1 \mid \ldots \mid 2^{2^{n+k}}-1$

↓

come
arrivare
ad $n+2$

sia con più che
con meno divido
il successivo.

⇓

andando avanti
arrivo a $2^{2^{n+k}}-1$

Per induzione
su k dimostro
di più:

non considero più $P(k)$
come ipotesi induttiva
e scelgo un'altra ipotesi

$Q(k)$: $2^{2^n}+1 \mid 2^{2^{n+k}}-1$ e
$2^{2^n}-1 \mid 2^{2^{n+k}}-1$

sia con +
e − divido
i successivi.

$Q(1)$ : $2^{2^n}+1 \mid 2^{2^{n+1}}-1$

per arrivare da $2^{2^{n+1}}-1 \mid 2^{2^{n+k}}-1$

$Q(k-1)$

ALGEBRA lineare 21/03/2017

Nucleo e Immagine
↳ ker

applicazione lineare $L: V \to W$

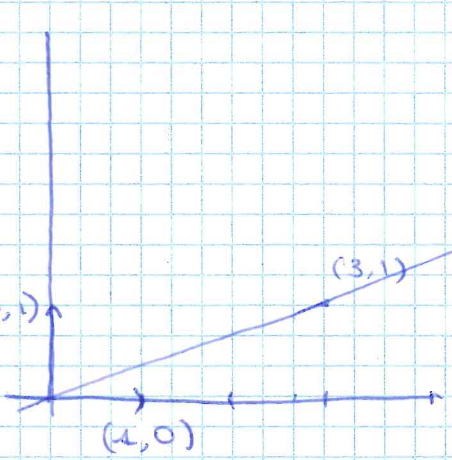
$\text{Imm}(L) = \{ w \mid \exists v \in V \;\; L(v) = w \}$ sottoinsieme di $W$

$= \{ L(v) \mid v \in V \}$

$L$ potrebbe non raggiungere tutti gli elementi di $W$.

es: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$L(x,y) = (3x, x)$




Imm è una retta
⇓
dimensione 1.

$\text{Ker}(L) = \{ v \in V \mid L(v) = \bar{0} \}$

↳ vettori che vanno a finire nel vettore 0.

$L$ è surgettiva se e solo se $\text{Imm}(L) = W$

Teorema.

$L$ è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(L) = \{\bar{0}\}$

$\in V$.

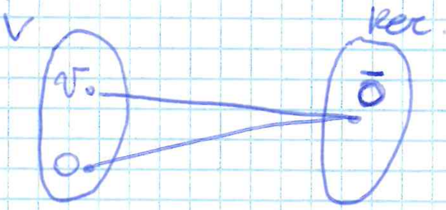
dimostrazione:

osserviamo che $L(\bar{0}) = \bar{0}$ sempre (perché lineare).

$\mathrm{Ker}(L) \supseteq \{\bar{0}\}$ sempre (lo contiene).

Se $\mathrm{Ker}(L) \neq \{\bar{0}\}$, è un insieme più grande,

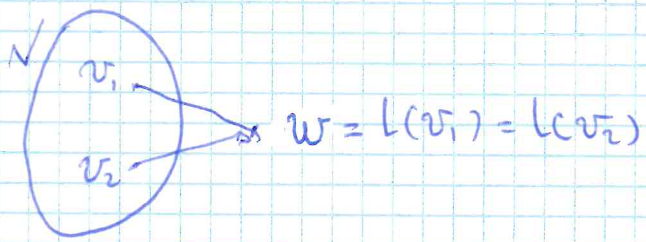
allora $\exists\, v \neq \bar{0} \,.\, L(v) = \bar{0}$




$\Rightarrow$ $L$ non è iniettiva.

Se $L$ non è iniettiva allora $\mathrm{Ker}(L) \neq \{\bar{0}\}$

$\exists\, v_1, v_2 \in V \quad v_1 \neq v_2 \,.\, L(v_1) = L(v_2)$




Siccome è <u>lineare</u> $\quad v = v_1 - v_2 \neq 0$

$\hookrightarrow L(v) = L(v_1) - L(v_2)$

questi sono uguali

$\Downarrow$

$L(v) = 0$

$v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(L)$

allora $\mathrm{Ker}(L) \neq \{\bar{0}\}$

es: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L_a(x, y, z) = (ax + y + z,\ x + ay + z,\ -x + y + az)$$

a → parametro.

Studiare per quali a L è iniettiva o surgettiva.

$$[L_a]^{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)}_{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)}$$

$$L_a(1,0,0) = (a, 1, -1)$$

$$L_a(0,1,0) = (1, a, 1)$$

$$L_a(0,0,1) = (1, 1, a)$$

matrice associata:

$$[L_a] = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

altro metodo per scrivere la $[L_a]$

$$L_a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y + z \\ x + ay + z \\ -x + y + az \end{pmatrix} =$$

isolo i contributi:

$$= x\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$[L_a] = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [L_a]$$

se applico la funzione è la stessa cosa che applicare la matrice al vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\text{Imm}(L_a) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right\}$$

↓

span delle colonne dopo aver tratto le basi. } definizione imprecisa perché sono coordinate dei vettori

Imm(L) = vettori di W le cui coordinate sono nello span delle colonne di $[L_a]$.

$$\ker(L_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; L_a(x,y,z) = (0,0,0) \right\}$$

a livello di matrice:

$$[L_a]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

sono le soluzioni del sistema omogeneo.

$(x, y, z) \in \ker(L_a)$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & 1 & +1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ stessa cosa

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ -x + y + az = 0 \end{cases}$$

risolvo il sistema: $\dim \ker(L_a) = \dim$ (soluzioni del sistema)

le soluzioni non cambiano per mosse di riga $\Rightarrow$ mosse di Gauss.

riduzione a scalini.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & +1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \text{scambio delle righe.}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1+a \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R3+R1]{R2-aR1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1+a & 1+a \end{pmatrix}$$ con $a \neq 0$.

casi speciali:

$a=0$, $a=1$, $a=-1$

trattiamo il caso $a \neq 0, 1, -1$.

$$\xrightarrow{R3 \cdot \frac{1}{1+a}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \cdot \frac{1}{1-a^2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3-R2}$$

con $a \neq 1, -1, 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & \underbrace{\frac{a}{1+a}}_{\neq 0} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 3 pivot.
$\Downarrow$
1 soluzione
unica soluzione
$(0, 0, 0)$.

$\ker(L_a) = \{\bar{0}\}$
$\Rightarrow$ $L$ è iniettiva.

Ora considero i casi speciali:
$a=0$, $a=1$, $a=-1$.

$\boxed{a=1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ z & y & x \end{array}$$

2 scalini.
2 pivot:

$x = 0$
$y$ libera
$z$ forzata

$Ker(L_a) \neq \{\bar{0}\}$
non invertibile per $a = 1$

$\dim(Ker(L_1)) = 1 \Rightarrow$ 1 sola variabile libera.

$\dim(Imm) = 2$

$\hookrightarrow$ = span delle colonne

la prima e l'ultima sono indipendenti, quella centrale è uguale alla prima.

$Imm(L) \rightarrow$ conto i pivot = dim.

$Ker(L) \rightarrow$ conto le variabili libere = dim

Teorema:

$\dim(Ker) + \dim(Imm) = \dim(V)$

numero di colonne della matrice.

$\boxed{a = 0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ R3 + R1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3 + R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 scalini
$\downarrow$
$z$ libera

$\dim(\mathrm{Ker}\, L_0) = 1$

$\mathrm{Ker}(L_0) \neq \{\bar{0}\}$ non iniettiva

$$\mathrm{Imm}(L_0) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1 + v_2 =}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(\mathrm{Imm}) = 2$

$\boxed{a = -1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 - R1]{R2 + R1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 - R2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 pivot $\Rightarrow$ 2 scalini

$y$ libera $z = 0$ $\quad 2z = 0$

$x$ obbligata

$\dim(\mathrm{Ker}(L_{-1})) = 1$

$\dim(\underbrace{\mathrm{Imm}(L_{-1})}) = 2$

$= \mathrm{span}\{ ($

le mosse di riga possono cambiare l'immagine.

$$\mathrm{Imm}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\neq$$

$$\mathrm{Imm}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ma la dim(Imm) non cambia

es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

$$\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) \overset{?}{=} \mathrm{span}(v_1, v_2 - av_1, v_3, v_4)$$
$a \neq 0$

con mosse di colonna non cambio lo span delle colonne

$$\xrightarrow[C4-2C1]{C2-C1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_2 = v_4$

$(v_1, v_2, v_3)$ sono una base $\Rightarrow$ · generano lo span

· sono indipendenti

$$a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ dim = 3

$\hookrightarrow a_1 = 0$ per forza $a_1 \cdot 1 = 0$

$\hookrightarrow a_2 = 0$ perché $a_2 \cdot (-2) = 0$

$\rightarrow a_3 = 0$ $a_3 \cdot 1 = 0$