23/10/2017

BERARDUCCI
TEORIA

**Def** Si dice albero un insieme $V$ di nodi (o vertici) più una relazione $E$ binaria tale che $E(x,y)$ sta a indicare che $x$ è il padre di $y$. e rispetta certe proprietà

- $\exists x \, \forall y \, [E(x,y) \vee y = x]$
- $E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z)$
- $\neg E(x,x)$

Definendo la nozione di "padre" come $P(x,y) \Leftrightarrow E(x,y) \wedge \neg \exists z \, [E(x,z) \wedge E(z,y)]$
e si definisce radice $R(x) \Leftarrow \neg \exists y \, E(y,x)$

- $P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow x = y$

**OSS** Questa è una buona definizione per un sistema finito.
Per questo sarebbe necessario aggiungere agli assiomi uno che garantisca che sia possibile passare da un antenato a un figlio discendente con una successione finita di relazioni padre-figlio.
Questo però non è possibile con la logica del primo ordine.

Si consideri ora una logica del II ordine.

**Def** Si definisce albero un insieme definito come in precedenza e che oltre agli assiomi precedenti rispetta:

- ogni $x$ diverso dalla radice ha un solo padre.
- $\forall^{(2)} Q \, \forall x y \, \{ [P(x,y) \wedge Q(x) \rightarrow Q(y)] \wedge \exists x \, [R(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall y \, Q(y) \}$

**OSS** $PA^{(2)}$ ha un unico modello

"Dim"

Sia $M \models PA^{(2)}$, quindi $0^M \in M$ e $a \in M \Rightarrow S^M(a) \in M$. Il più piccolo esiste (basta prendere l'intersezione)
Si consideri $Q \subseteq M$ il più piccolo che contiene $0^M$ e tale che se $a \in Q \Rightarrow S^M(a) \in Q$
cioè $Q = \{ t^M \mid t \text{ termine chiuso} \}$ (in maniera imprecisa $Q = \{0^M, S^M(0), S^M(S^M(0)), \dots \}$)
Questo contiene $0^M$ e passa al successore, quindi per l'induzione del secondo ordine si ha che $Q = M$.

Intuitivamente, inoltre, si nota che $Q$ risulterà isomorfo a $\mathbb{N}$.

## LEMMA DI KÖNIG

**Lemma** ~~Sia~~ un albero infinito, con ramificazione finita (cioè ogni nodo ha un numero finito di figli), allora esiste un ramo infinito $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tale che $a_0$ = radice e $P(a_n, a_{n+1})$.

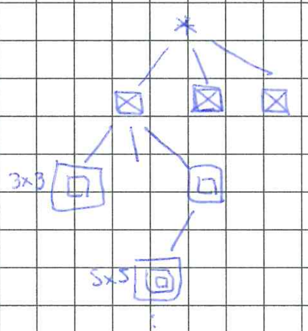
## PIASTRELLE DI HAO-WANG

Sono piastrelle quadrate divise in quattro settori colorati con quattro colori diversi


Ho finiti tipi di piastrelle e infinite copie di ciascun tipo
Si vuole piastrellare il piano affiancando a una piastrella un'altra di colore uguale e le piastrelle non possono essere ruotate o ribaltate
Si può dimostrare che non esiste un algoritmo.

**OSS** Si supponga ~~di~~ essere possibile tassellare un quadrante.
Allora è possibile ~~piastrellare~~ piastrellare il piano?

Si consideri l'albero dei tentativi di tassellazione di un quadrato $n \times n$.




Questo è un albero infinito in quanto ho infiniti livelli e ho una ramificazione finita in quanto ho finiti tipi di piastrelle quindi per König ho un ramo infinito.
Perciò seguendo il ramo ~~...~~ si ottiene una tassellazione del piano.

Questo però non è una dimostrazione costruttiva, cioè non mi dice come tassellare il piano partendo dalla tassellazione, ad esempio di un quadrante data.

**OSS** Nella dimostrazione del teorema di completezza, si è implicitamente utilizzato König con i tableaux.

~~Esempio~~ ~~Si consideri PA ...~~

Esercizio Si consideri un grafo G, cioè un insieme di nodi V e una relazione E tale che $E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)$ e $\neg E(x,x)$ (cioè un grafo non orientato)
~~Se tutti i sotto~~ Sia il grafo infinito. Se tutti i sottografi finiti sono colorabili con 3 colori, allora anche l'intero grafo lo è

cioè ogni nodo è colorabile e nodi adiacenti hanno colori diversi

Si definisca colorazione una $f: V \to \{0,1,2\}$ tale che $E(x,y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
Si vuole costruire una teoria $T_G$ tale che Modelli $(T_G) \leftrightarrow$ 3-colorazioni di G

Sia $\mathcal{L} = \{E, \underset{\text{rosso}}{R}, \underset{\text{giallo}}{G}, \underset{\text{blu}}{B}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, dove R, G, B sono predicati unari e i $c_i$ sono infinite costanti che sarebbero i nodi del grafo.
Sicuramente si ha, indipendentemente da come è fatto il grafo:

- $E(x,y) \wedge B(x) \to \neg B(y)$
- $E(x,y) \wedge R(x) \to \neg R(y)$
- $E(x,y) \wedge G(x) \to \neg G(y)$
- $\forall x \; B(x) \vee G(x) \vee R(x)$
- $\forall x \; B(x) \to \neg G(x) \wedge \neg R(x)$
- $\forall x \; R(x) \to \neg B(x) \wedge \neg G(x)$
- $\forall x \; G(x) \to \neg B(x) \wedge \neg R(x)$

26/10/2017

BERARDUCCI
TEORIA

**Esercizio** Sia un grafo $G=(V,E)$, con $V=\mathbb{N}$ e $E \subseteq V \times V$ tale che $E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)$ e $\neg E(x,x)$.
Si era definita colorazione una mappa $f: V \to \{0,1,2\}$ t.c. $E(x,y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

**Teorema** Se $\forall V' \subset V$ finito, $G' = (V', E|_{V' \times V'})$ è 3-colorabile, allora $G=(V,E)$ è 3-colorabile

**Dim**

Sia $\mathcal{L} = \{E, \overset{R,G,B}{\curlyvee}, v_0, \dots, v_n, \dots \mid n \in \mathbb{N}\}$
($E$: simbolo di rel bin.)

Gli assiomi di $T_G$:

- il primo gruppo di assiomi dice come è fatto il grafico
  - $\{v_i \neq v_j \mid i \neq j\}$
  - $\{E(v_i, v_j) \mid E^G(i,j)\}$
  - $\{\neg E(v_i, v_j) \mid \neg E^G(i,j)\}$

- il secondo gruppo di assiomi dipende ~~solo~~ dalla colorazione
  - $\forall x,y \;\; E(x,y) \wedge R(x) \to \neg R(y)$
  - " " $\wedge B(x) \to \neg B(y)$
  - " " $\wedge G(x) \to \neg G(y)$
  - $\forall x \; (B(x) \vee R(x) \vee G(x))$
  - $\forall x \;\; R(x) \to \neg B(x) \wedge \neg G(x)$
  - " $B(x) \to \neg R(x) \wedge \neg G(x)$
  - " $G(x) \to \neg B(x) \wedge \neg R(x)$

Se $M$ è un modello di $T_G$ ($M \models T_G$) allora si ha una colorazione indotta da $M$ del grafo $G$, definita

$$f_M : V \to \{r, g, b\}$$
$$f_M(i) = r \iff M \models R(v_i)$$

Si noti che dagli ultimi quattro assiomi si ha che $f_M$ è una funzione mentre quelli prima mi garantiscono che si ha una colorazione del mio grafo.
Dunque dato un modello si ha una colorazione

Viceversa, data $f: V \to \{r, g, b\}$ una colorazione si ottiene un modello $M_f \models T_G$

$\mathrm{dom}\, M_f = \mathbb{N}$
$v_i^M = i$
$R^M = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = r\} \subseteq M$
$G^M =$ " " $g\}$ "
$B^M =$ " " $b\}$ "
$E^M = E^G$

Questa è una struttura che, infatti, soddisfa gli assiomi

**OSS** In realtà ~~a priori~~ non si ha una corrisp. biunivoca fra modelli e colorazioni in quanto a priori il dominio può essere più grosso.

Dunque un grafo è 3-colorabile $\Leftrightarrow$ $T_G$ è coerente (cioè ha modello) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (compattezza) $T_G$ è finitamente soddisfacibile $\Leftrightarrow$ G è finitamente 3-colorabile

Dim dell'ultimo $\Leftrightarrow$

~~"⇒" Si supponga $T_G$ finitamente soddisfacibile (ogni sottoteoria finita ha modello)~~

"⇐" Sia G finitamente 3-colorabile

Si deve ottenere $T_G$ finitamente soddisfacibile.

Sia $T' \subset T_G$ finita. Si vuole un modello

Sicuramente $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $T'$ menziona solo $v_1, \dots, v_n$

Sia $f : \{1, \dots, n\} \to \{r, g, b\}$ una colorazione del sottografo con vertici $1, \dots, n$

Da $f$ si ottiene un modello $M_f \models T'$

Esercizio Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio

Si hanno $\mathcal{L}$-teorie e classi di $\mathcal{L}$-strutture. Dalle prime è possibile ottenere una classe di $\mathcal{L}$-strutture per quelle teorie

| Ad esempio | $\mathcal{L}$-teorie | | Classi di $\mathcal{L}$-strutt. |
|---|---|---|---|
| | teoria dei gruppi | $\to$ | Gruppi |
| | $T$ | $\to$ | $Mod_{\mathcal{L}}(T) = \{M \mid M \models T\}$ |
| | $\emptyset$ | $\to$ | $Mod_{\mathcal{L}}(\emptyset) = \mathcal{L}$-strutture |

È possibile fare il viceversa? Sì

Sia K una classe di $\mathcal{L}$-strutture.

Si consideri la teoria della classe $Th_{\mathcal{L}}(K)$ =

Def Dato K una classe di strutture, si definisce teoria della classe

$$Th(K) = \bigcap_{M \in K} Th(M) = \{\varphi \mid \forall M \in K \ \ M \models \varphi\}$$

~~Cosa succederebbe se~~

Cosa succede se si prova a fare avanti e indietro?

$$T \longrightarrow Mod(T) \longrightarrow Th(Mod(T))$$

~~Quello~~ L'insieme di partenza è contenuto in quello di arrivo.
In particolare il secondo sono le conseguenze degli assiomi
cioè $Th(Mod(T)) = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$

Esercizio Due teorie $T_1, T_2$ hanno le stesse conseguenze, cioè $\{\varphi \mid T_1 \models \varphi\} = \{\varphi \mid T_2 \models \varphi\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ hanno gli stessi modelli, cioè $Mod(T_1) = Mod(T_2)$

Oss In questo caso le teorie sono equivalenti

Def Una classe di strutture $K$ si dice elementare se $\exists T$ t.c. $K = Mod(T)$

Considerando il viceversa, cioè

$$K \longrightarrow Th(K) \longrightarrow Mod(Th(K)) = K'$$

Si ha che $K' \supseteq K$ e in particolare, $K' = K$ se $K$ è elementare

Esempio Sia $\mathcal{L} = \{E^{\text{rel. binaria}}\}$ e sia $K = \{\text{grafi ciclici}^{\text{con} > 2 \text{ vertici}}\}$ (cioè quelli del tipo △ □ ⬡ ... )
Questa non è elementare.

Si consideri $Th(K)$. Sicuramente include

- $E(x,y) \Leftrightarrow E(y,x)$
- $\neg E(x,x)$
- $\forall x \; \exists y \; \exists z \; \{E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge (y \neq z) \wedge [\forall w \; E(x,w) \rightarrow (w = y) \vee (w = z)]\}$

Così non basterebbe, infatti anche $\mathbb{Z}$ soddisferebbe questi assiomi

Per assurdo, si supponga $K = Mod(T)$
(se c'è un $T$ che funziona, allora funziona anche $Th(K)$).
Si produce da qui $T'$ finitamente soddisfacibile ma non soddisfacibile
assurdo per compattezza.

~~[illegible]~~
Si consideri ~~la~~ $\forall n \in \mathbb{N}$ la formula $\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots x_n \left( \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right)$
e sia $T' = T \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$T'$ non ha modelli però è finitamente soddisfacibile

se $S \subseteq T'$ finito, allora $\exists n$ t.c. $S \subset T \cup \{\exists^{\geq 1}, \ldots, \exists^{\geq n}\}$
che ha un modello, ad esempio $n+1$-agono.

Esercizio $Mod(Th(Mod(T))) = Mod(T)$
$Th(Mod(Th(K))) = Th(K)$

Esercizio difficile Sia $K = \{\text{grafi ciclici}\}$ e $T = Th(K)$. Chi sono $Mod(T) \supseteq K$?

Esempio Sia $K = \{$Buoni ordini$\}$.. Questa non è elementare $(\mathcal{L} = \{\leq\})$

~~Questa sarebbe~~
L'idea è che la proprietà $\forall B \subseteq A$ esiste un minimo è una proprietà del II ordine

Per assurdo, si suppone $K = Mod(T)$
Sicuramente T ~~[illegible]~~ include:

- assiomi degli ordini totali
- $\exists x \forall y \; x \leq y$
- $\forall x \left( \exists y (y > x) \rightarrow \exists y (y > x \wedge \neg \exists z \; y > z \wedge z > x \right)$

Questo non basta ma non è possibile aggiungere sufficienti assiomi

Si consideri $\mathcal{L}' = \{\leq, c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e come assiomi $T' = T \cup \{c_0 > c_1, c_1 > c_2, \dots \; c_n > c_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$
Questa è una teoria non soddisfacibile ma finitamente soddisfacibile, assurdo per compattezza

TEOREMA DI LOWENHEIM - SKOLEM VERSO L'ALTO (FORMA DEBOLE)

Teorema Se T ha un modello infinito, ne ha, per ogni $K$ cardinale, di cardinalità $\geq K$.

Esercizio $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, S)$ ha modello di cardinalità $2^{\aleph_0}$

$\cup\!|$
$PA^{(1)}$
$\cup\!|$
$Q$

Dim teo

Si consideri $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_i \mid i \in I\}$ e $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid i, j \in I \text{ e } i \neq j\}$
con $|I| = K$
Per compattezza si ha che $T'$ è finitamente soddisfacibile
e quindi $M^* \models T'$, perciò $|M^*| \geq K$

Infatti se $S \subseteq T'$ finito esiste $n$ tale che $S$ menziona solo $n$ costanti $c_{i_1}, c_{i_2} \dots c_{i_n}$
Si prende $M$ infinito tale che $M \models T$ e si considera $M'$ una $\mathcal{L}'$-struttura ~~[illegible]~~ che, scelti $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in M$ distinti, ~~[illegible]~~ espande $M$, con $c_{i_k}^{M'} = a_{i_k}$ $(k \leq n)$
~~[illegible]~~ In questo modo si ha che $M'$ verifica tutti gli assiomi di $S$ e quindi è un suo modello $(M' \models S)$

Il modello cercato, dunque, è $M^* |_{\mathcal{L}}$.

30/10/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Esercizio Dato $\mathcal{L} = \{E\}$, con $E$ binario, non esiste $T$ tale che $Mod(T) = \{$grafi connessi$\}$

Per assurdo si supponga che una tale $T$ esista

Def Si definisca $E^{\leq 1}(x,y) = [x = y \vee E(x,y)]$, ..., $E^{\leq 2}(x,y) = E^{\leq 1}(x,y) \vee \exists z\,[E^{\leq 1}(x,z) \wedge E(z,y)]$
..., $E^{\leq (n+1)} = E^{\leq n} \vee \exists z\,[E^{\leq n}(x,z) \wedge E(z,y)]$

Si consideri $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{a,b\}$ e $T' = T \cup \{\neg E^{\leq n}(a,b) \mid n \in \mathbb{N}\}$
Non ci sono modelli di $T'$, però $T'$ è finitamente soddisfacibile
assurdo per compattezza.

TEOREMA DI LOWENHEIM-SKOLEM VERSO IL BASSO (FORMA DEBOLE)

Teorema Se $T$ è coerente, allora $T$ ha modello

- di cardinalità $\leq \aleph_0$ se $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$

- di cardinalità $\leq |\mathcal{L}| + \aleph_0 = \|\mathcal{L}\|$

~~Esempio~~ ~~[illegible]~~

Dim

o) Si estende $T$ a un insieme $T'$ di Hintikka in un $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Si prende $M'$ = modello dei termini$/_{\approx}$. Si ha $|M'| \leq \aleph_0$

Esempio $Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ ha un modello numerabile

Se considero le costanti che posso interpretare come le radici dei polinomi si ottengono i reali algebrici, che è un modello numerabile

Ricontrollare cose su deduzione naturale

11/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Si ricordino le regole della deduzione naturale viste la volta scorsa

2/11/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Si ricordano le regole della deduzione naturale viste la volta scorsa.

- Ax : $\varphi \vdash \varphi$

- WK : $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \alpha \vdash \varphi}$

- $\vdash \wedge$ : $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$

- $\wedge \vdash$ : $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$

- $\vdash \vee$ : $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$

- $\vee \vdash$ : $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \qquad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$

- $\vdash \rightarrow$ : $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}$

- $\rightarrow e$ : $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta}$

- $\vdash \bot$ : $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \neg \alpha}{\Gamma \vdash \bot}$

- $\bot$ : $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}$

- $\neg \bot$ : $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma, \neg \alpha \vdash \bot}$

- $\vdash \neg$ : $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg \alpha}$

Queste costituiscono la logica intuizionista, da cui deriva quella classica aggiungendo

- RAA : $\dfrac{\Gamma, \neg \alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}$

**Esercizio** $A \vdash B \quad B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$

Dim

$B \vdash C \Rightarrow A, B \vdash C \Rightarrow A \vdash B \to C$ e $A \vdash B \Rightarrow A \vdash C$

**Teorema** $\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ tautologia ($\models \varphi$) (vedrà dopo in generale)

~~Ci vediamo ora le regole dei quantificatori~~

Dim

Si suppongo di essere nel caso proposizionale.
Per definizione $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \forall$ modello $M$ di $\Gamma$, $M \models \varphi$

Per modello nel caso proposizionale si intende $M: \{\text{variabili proposizionali}\} \to \{0,1\}$ tale che $M(\gamma) = 1 \ \forall \gamma \in \Gamma$ e si estende alle formule composte seguendo le tavole di verità.

Si dimostra $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ da cui si ha la tesi come caso particolare.

"$\Leftarrow$"

La correttezza si dimostra per induzione sul numero di passaggi necessari per ottenere $\Gamma \vdash \varphi$

- base: $\varphi \models \varphi$ ovvio

- passo induttivo:

La formula $\varphi$ si dimostra dopo $n+1$ passaggi
$\Gamma \vdash \varphi$ può essere ottenuto in un numero finito di modi e il ragionamento è analogo per tutti
Si supponga quindi che $\Gamma \vdash \varphi$ sia ottenuta da $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta) = \varphi}$
Per ipotesi induttiva $\Gamma \models \alpha$, quindi ovviamente $\Gamma \models \alpha \vee \beta$

**Oss** Se l'ultimo passaggio fosse stato $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}$ si ha quindi: $\Gamma, \alpha \models \beta \Rightarrow \Gamma \models \alpha \to \beta$ ovviamente seguendo le tavole.

**Def** $\Gamma$ è coerente (nel senso della deduzione naturale) se $\Gamma \nvdash \bot$

**Lemma** Se $\Gamma$ è coerente e $\varphi$ è una formula, allora $\Gamma, \varphi$ o $\Gamma, \neg\varphi$ è coerente.

Dim

in metateoria

Si suppongo per assurdo che sia $\Gamma, \varphi$ e $\Gamma, \neg\varphi$ siano incoerenti
Allora

$\Gamma, \varphi \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \neg(\neg\varphi)$ $\to \Gamma \vdash \bot$ assurdo.

**Lemma** $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \exists T \subseteq \Gamma$ finito $T \vdash \varphi$ (completezza secondo la deduzione naturale)

**Dim**

Si dimostra per induzione sul numero di passaggi necessari per ottenere $\Gamma \vdash \varphi$

- base $\varphi \vdash \varphi$ Allora si prende $T = \varphi$ ed è ovvio
- passo induttivo:

Supponiamo che l'ultimo passaggio sia stato $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta) = \varphi}$

Per induzione $T_1 \subseteq \Gamma \vdash \alpha$ e $T_2 \subseteq \Gamma \vdash \beta$
allora

$$\frac{T_1 \cup T_2 \vdash \alpha \qquad T_1 \cup T_2 \vdash \beta}{T_1 \cup T_2 \vdash \alpha \wedge \beta}$$

**oss** L'unione $\bigcup T_i$ di una catena $\{T_i \mid i \in I\}$ di teorie coerenti è coerente

Se non fosse coerente, allora $\bigcup T_i \vdash \bot$, perciò esiste $\Sigma \subseteq \bigcup T_i$ finito tale che $\Sigma \vdash \bot$.
Visto che $\{T_i\}$ è una catena $\exists i$ tale che $\Sigma \subseteq T_i$, quindi $T_i \vdash \bot$, assurdo.

**oss** Per il lemma di Zorn dunque esiste $T$ $\mathcal{L}$-teoria ($\mathcal{L} = \{A_i \mid i \in I\}$ variabili proposizionali) coerente e massimale (in realtà ho dimostrato che $\forall \Gamma$ coerente esiste $T \supseteq \Gamma$ massimale).

**oss** Se $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$ invece di Zorn, è sufficiente König.

Infatti, si enumerano le formule $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & \Gamma, \neg\varphi_1, \neg\varphi_2 \\
 & \Gamma, \neg\varphi_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\Gamma \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Gamma, \neg\varphi_1, \varphi_2 \\
 & \Gamma, \varphi_1 &
\end{tikzcd}$$

Una delle due ramificazioni è coerente, quindi continuo di lì, ...

Per König ho un ramo massimale coerente

**oss** $T$ è coerente massimale se per ogni $\varphi$, $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$, e non entrambe

Corollario $\Gamma$ DN-coerente $\Rightarrow \exists T \supset \Gamma$ DN-coerente tale che $\forall \varphi \; \varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$

Sia $M : Var \to \{0,1\}$ $\quad M(\overset{\text{atomica}}{A}) = 1 \Leftrightarrow A \in T$

$M(A) = 0 \Leftrightarrow A \notin T$

Lemma $\varphi$ non atomica $M(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in T$

Dim

$\varphi = \alpha \vee \beta$

Sottolemma $\alpha \vee \beta \in T \Leftrightarrow \alpha \in T$ o $\beta \in T$

per assurdo

"$\Rightarrow$" Sia $\alpha \vee \beta \in T$ e $\alpha \notin T$, $\beta \notin T$

$\neg\alpha \in T$ $\neg\beta \in T$

quindi $\alpha \vee \beta, \neg\alpha, \neg\beta \in T$

ma $\alpha \vee \beta, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \bot \Rightarrow T$ non coer. $\lightning$

$\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \bot$
$\beta, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \bot$ $\quad \Rightarrow \alpha \vee \beta, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \bot$

$\Leftarrow$ da fare

Corollario $\Gamma \nvdash \bot \Rightarrow \Gamma$ ha modello

Regole di DN con quantificatori

- $\vdash\forall$: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi[y/x]}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ $\quad y$ non in $\varphi$ e $\Gamma$

- $e\forall$: $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[t/x]}$ $\quad t$ termine sostituibile per $x$ in $\varphi$

Def $t$ è sostituibile se in $t$ non ci sono variabili che diventano quantificate dopo la sostituzione, cioè nessuna occorrenza libera di $x$ in $\varphi$ compare in una sottoformula di $\varphi$ che inizia con $\exists y$ o $\forall y$

Esercizio Con questa clausola la regola del $\forall$ diventa corretta

- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$

- $\dfrac{\Gamma, \varphi[y/x] \vdash \gamma}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \gamma}$ $\quad y$ non in $\gamma, \Gamma$

Def $\varphi[t/x]$

- $\varphi$ atom. al posto di $x$ ci metto $x$
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[t/x] = \varphi_1[t/x] \wedge \varphi_2[t/x]$ e così via per gli altri.
- $(\forall y \, \varphi)[t/x] = \forall y (\varphi[t/x])$ $\quad$ (se $(\forall x \, \varphi)[t/x] = \forall x \varphi$)

RICONTROLLARE

6/11/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Si ricordi la definizione.

Def $T \models \varphi \iff \forall M \ \forall s: Var \to M \quad M \models T(s) \Rightarrow M \models \varphi(s)$

OSS Esiste anche un'altra definizione, che noi non usiamo e che non è equivalente alla nostra:

$$T \overset{*}{\models} \varphi \iff \forall M \ (\forall s \ M \models T(s) \Rightarrow \forall s \ M \models \varphi(s))$$

Esempio $P(x) \overset{*}{\models} P(y) \iff \forall x P(x) \models \forall y P(y)$
$P(x) \models P(y) \iff \models P(x) \to P(y) \iff \models \forall x \forall y (P(x) \to P(y))$

OSS Noi utilizzeremo la prima convenzione in quanto si accorda con le nostre regole di inferenza.

Esercizio $\models \forall x \varphi \to \varphi[t/x]$, con t sostituibile al posto di x in $\varphi$.

Lemma Fissato M, s, sia $b = t^M(s) \in M$. Allora $M \models \varphi[t/x](s) \iff M \models \varphi(b/x, s)$

OSS Chiaramente questo lemma vale se t è sostituibile.
Infatti, ad esempio, si consideri $\varphi = \exists y (x \neq y)$ (con $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$) e $t = y+1$

$$M \models \varphi[t/x](s) \quad \not\Leftrightarrow \quad M \models \varphi(b/x, s)$$

Se si considera s tale che $s(y) = 3 \in \mathbb{N}$ e $M = \mathbb{N}$ si ha

$$\exists y (y+1 \neq y) \qquad \exists y (x \neq y)(3/x)$$

che sono cose completamente diverse.

Dim lemma
I casi con i connettivi booleani sono ovvi.
Se $\varphi$ invece comincia con $\exists$: $\varphi = \exists y \theta$

$$M \models (\exists y \theta)[t/x](s) \iff M \models \exists y (\theta[t/x])(s)$$

$$\iff \exists a \in M \ M \models \theta[t/x](\underbrace{a/y, s}_{s'}) \underset{\text{ip ind.}}{\iff} M \models \theta(b'/x, s')$$

con $b' = t^M(s')$, ma visto che y non compare in t si ha $b' = t^M(s') = t^M(s) = b$
Perciò

$$M \models \theta(b/x, s') = \theta(b/x, a/y, s) \iff M \models \exists y \theta(b/x, s)$$

Sol. esercizio

$$T \models \forall x \varphi \to \varphi[t/x] \Rightarrow \frac{T \models \forall x \varphi}{T \models \varphi[t/x]} \Rightarrow \frac{T \vdash \forall x \varphi}{T \vdash \varphi[t/x]} \text{ è corretto}$$

Esercizio $\dfrac{T \vdash \varphi[y/x] \vdash \gamma}{T \vdash \exists x \varphi \vdash \gamma}$, con $y$ non in $T, \gamma, \varphi$, è corretta

Cioè $\dfrac{T, \varphi[y/x] \models \gamma}{T, \exists x \varphi \models \gamma}$.

Fissando $M, s \models T, \exists x \varphi$, si vuole dimostrare $M, s \models \gamma$

$M, s \models T, \exists x \varphi \Rightarrow \exists a \in M \quad M \models \varphi(a/x, s)$

ma $\varphi[y/x](a/y, s) \Leftrightarrow \varphi(a/x, s)$, quindi

$M \models \varphi(a/x, s) \Leftrightarrow M \models \varphi[y/x](a/y, s) \Rightarrow$

$\Rightarrow M \models \gamma(a/y, s) \Rightarrow M \models \gamma(s)$ (visto che $y$ non sta in $\gamma$).

Si veda ora la correttezza delle regole in generale.

Prop $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Dim

Si procede per induzione sul numero dei passaggi per $\vdash$
Per i connettivi è ovvio.
Si veda il caso del $\forall x \varphi$

$\dfrac{T \vdash \forall x \varphi}{T \vdash \varphi[t/x]} \Rightarrow \underset{\text{vero per ip ind}}{T \models \forall x \varphi} \Rightarrow T \models \varphi[t/x]$

Lemma Sia $T$ una $\mathcal{L}$-teoria DN-coerente, allora, posto $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$, con $c$ una nuova costante, si ha che $T \cup \{\exists x \varphi \to \varphi[c/x]\}$ è DN-coerente.

Oss Se $T, \Theta[c/x] \vdash \bot$, allora, preso $y$ variabile non in $T, \Theta$, si ha $T, \Theta(y/x) \vdash \bot$

La dimostrazione di questo si fa anch'essa per induzione (i passaggi che si fanno con $c$ si ripetono con $y$

Dim lemma

Per assurdo, si supponga che $T, \exists x \varphi \to \varphi[c/x] \vdash \bot$
Quindi

$T \vdash \neg(\exists x \varphi \to \varphi[c/x]) \Rightarrow$

$\Rightarrow T \vdash \exists x \varphi$, e $T \vdash \neg \varphi[c/x]$

Il teorema di completezza proposizionale si aveva $T \models \Theta \Leftrightarrow T \vdash \Theta$
Ponendo $\exists x \varphi \equiv A$ e $\varphi[c/x] \equiv B$, ci si riconduce al caso proposizionale in cui si sa

$\models \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$
$T \models \neg(A \to B)$ $\Rightarrow T \models A \Rightarrow T \vdash A$

Analogamente con $B$

Inoltre

$T \vdash \neg\varphi[^c/_x] \Rightarrow T \vdash \neg\varphi[^y/_x]$, con y nuova $\Rightarrow$

$\Rightarrow T \vdash \forall y \neg\varphi[^y/_x] \Rightarrow T \vdash \forall x \neg\varphi \equiv \neg\exists x \varphi$

Ma, poiché $T \vdash \exists x \varphi$, si ha $T \vdash \bot$.

**Def** $T$ si dice di Henkin se per ogni $\mathcal{L}$-formula $\theta$ esiste $c_\theta \in \mathcal{L}$ tale che $T \vdash \exists x \theta \longrightarrow \theta[^c/_x]$

**Oss** Ciò significa che ogni formula ha un testimone.

**Teorema** Se $T$ è una $\mathcal{L}$-teoria DN-coerente, allora esiste $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_i \mid i \in I\}$ e esiste $T' \supset T$ una $\mathcal{L}'$-teoria tale che $T'$ è di Henkin.

**Dim**

nuove

Sia $T^* = T \cup \{\exists x \varphi \rightarrow \varphi[^{c_\varphi}/_x] \mid \varphi \text{ è } \mathcal{L}\text{-formula}\}$

Visto che se se ne aggiungono un numero finito la teoria rimane coerente, allora per compattezza anche $T^*$ è coerente.

Questo però non è di Henkin, in quanto la proprietà vale solo per le $\mathcal{L}$-formule e non per tutte le $\mathcal{L}'$-formule.

Si definisca allora $T_0 = T$ e $T_{n+1} = T_n^*$ e si consideri $\bigcup_{n \in \omega} T_n = T'$

Si ha che $T'$ è di Henkin.

Infatti fissata una formula $\varphi$, allora, contenendo un numero di costanti finito, $\exists n$ t.c. $\varphi \in T_n$

Quindi $\exists x \theta \rightarrow \theta[^{c_\theta}/_x] \in T_n^* = T_{n+1} \subseteq T'$.

**Oss** Dunque data $T$ coerente, si ha che esistono $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ e $T' \supset T$ di Henkin coerente.

Allora per il lemma di Lindenbaum $\exists T'' \supset T'$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}'$ tale che $T''$ è coerente massimale.

Allora $T''$ è di Hintikka $\leftarrow$ non l'abbiamo ancora dimostrato.

La dimostrazione è facile quindi si verifichi solo qualche caso

- $\varphi \vee \theta \in T'' \rightarrow \varphi \in T''$ o $\theta \in T''$

  Se per assurdo $\varphi \notin T''$ e $\theta \notin T''$, allora $\neg\varphi \in T''$ e $\neg\theta \in T''$.
  quindi $\varphi \vee \theta, \neg\varphi, \neg\theta \vdash \bot$, dunque $T'' \vdash \bot$

- $\exists x \varphi \in T'' \Rightarrow$ esiste c $\varphi[^c/_x] \in T''$

  Se per assurdo $\varphi[^{c_\varphi}/_x] \notin T'' \rightarrow \neg\varphi[^{c_\varphi}/_x] \in T''$
  ma $\exists x \varphi \in T''$ e $T'' \vdash \exists x \varphi \rightarrow \varphi[^c/_x]$
  Quindi $\exists x \varphi, \neg\varphi[^{c_\varphi}/_x], \exists x \varphi \rightarrow \varphi[^{c_\varphi}/_x] \vdash \bot \Rightarrow T'' \vdash \bot$

Così si ha che $T''$ ha modello per $\mathcal{L}''$. Se si considera la restrizione a $\mathcal{L}$, si ha un modello di $T$.

Si veda ora la completezza in generale.

Teorema $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

Dim

Se $T \nvdash \varphi$, allora $T, \neg\varphi$ è DN-coerente, quindi esiste $M$ t.c. $M \models T, \neg\varphi \rightarrow T \not\models \varphi$, assurdo.

LOWENHEIM-SKOLEM ↓

Teorema Se $T$ ha modello $\Rightarrow \exists M \models T$ $|M| \leq |\mathcal{L}| + \aleph_0$

Dim

$T$ ha modello $\xRightarrow{\text{correttezza}} T$ è DN-coerente

Allora $T$ si estende a $T'$ di Henkin e ancora a $T''$ di Hintikka.

Allora ha il modello dei termini $/\sim$

Si deve quindi vedere costanti sono state aggiunte in $T'$.

Ma $|\bigcup_n T_n| = \aleph_0 \cdot |T| = |T|$

Quindi sono state aggiunte tante costanti quante $|T|$