Lemma di König e Tableaux

Prof. A. Berarducci

8 Nov. 2012

queste note integrano gli appunti del corso di logica. Viene presentato il lemma di König ed esso viene utilizzato per dimostrare la completezza del sistema dei tableaux semantici.

1 Lemma di König

Illustreremo il lemma di König tramite un gioco di tassellamento del piano con delle piastrelle rettangolari con i quattro lati etichettati da numeri naturali (che possiamo pensare come a colori). Le piastrella possono essere di vario tipo, dove ogni tipo corrisponde ad uno specifico modo di colorare i lati. Per specificare un tipo basta dare una quadrupla di "colori" corrispondenti alla colorazione dei lati in Alto, Destra, Basso, Sinistra. Ad esempio possiamo avere il tipo (giallo, nero, nero, verde). Supponiamo di avere a disposizione una quantità infinita di piastrelle di vari tipi. L'obbiettivo del gioco è quello di ricoprire l'intero piano affiancando le piastrelle lungo i lati in modo che i lati che vengono affiancati abbiano lo stesso colore. Le piastrelle non possono essere ruotate nè ribaltate.

Definizione 1.1 Diciamo che un dato insieme di tipi di piastrelle è **ricoprente** se è possibile ricoprire tutto il piano con piastrelle di quei tipi. Diciamo che è **finitamente-ricoprente** se per ogni n è possibile ricoprire un quadrato di $n \times n$ piastrelle.

Osserviamo che se con un dato insieme fosse possibile ricoprire un quadrante infinito di piano (cioè una delle quattro porzioni nel quale il piano è tagliato da due assi ortogonali), allora l'insieme è finitamente-ricoprente, ma non necessariamente ricoprente. Il sequente esempio illustra questa situazione.

Esempio 1.2 Supponiamo che i tipi di piastrelle siano i seguenti:

$\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & 1 & \end{array}}, \boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 2 & & 3 \\ & 2 & \end{array}}, \boxed{\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 3 & & 4 \\ & 3 & \end{array}}, \ldots$ etc. (l'n-esimo tipo contiene due n e due $n+1$)

e che di ogni tipo vi siano a disposizione una quantità illimitata di piastrella.

Con piastrelle di questi tipi è possibile coprire un intero quadrante (e quindi in particolare questo insieme di tipi è finitamente-ricoprente) ma non è possibile ricoprire tutto il piano. Per coprire un quadrante possiamo iniziare come segue:

$$\begin{array}{lll}
\boxed{\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 3 & & 4 \\ & 3 & \end{array}} & & \\
\boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 2 & & 3 \\ & 2 & \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 3 & & 4 \\ & 3 & \end{array}} & \\
\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & 1 & \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 2 & & 3 \\ & 2 & \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 3 & & 4 \\ & 3 & \end{array}}
\end{array}$$

Per fare vedere che non è possibile ricoprire tutto il piano basta osservare che sotto ad un quadrato del tipo $\boxed{\begin{array}{ccc} & \text{n+1} & \\ \text{n} & & \text{n+1} \\ & \text{n} & \end{array}}$ bisogna necessariamente mettere un quadrato del tipo $\boxed{\begin{array}{ccc} & \text{n} & \\ \text{n-1} & & \text{n} \\ & \text{n-1} & \end{array}}$, e quindi dopo un numero finito di passaggi di questo tipo ci si arresta con $\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & 1 & \end{array}}$ senza poter mettere alcun quadrato sotto di esso.

Dimostreremo che se abbiamo solo un numero finito di tipi di piastrelle e se questi tipi sono finitamente-ricoprenti, allora essi sono ricoprenti. Per fare ciò dobbiamo ricordare la definizione di albero. La nozione di albero che abbiamo in mente è quella associata all'idea di albero genealogico.

Definizione 1.3 Un **albero** è un insieme di elementi chiamati *vertici* che contiene un vertice privilegiato r chiamato **radice** ed è dotato di una funzione P che associa ad ogni vertice x diverso dalla radice uno ed un solo vertice $p(x)$ chiamato il **padre** di x. Gli **antenati** di x sono definiti come gli elementi del più piccolo insieme che contiene x e ognivolta che contiene un elemento y diverso dalla radice contiene anche il padre $p(y)$ di quell'elemento (quindi gli antenati di x sono $x, p(x), p(p(x)), \ldots$). Assumiamo - nella definizione di albero - che la radice sia un antenato di tutti gli altri vertici. (È facile verificare che questo implica che ogni vertice ha un numero finito di antenati.) Se y è il padre di x diremo anche che x è **figlio** di y. Un vertice senza figli è chiamato **foglia**. Un albero ha **ramificazione finita** se ogni vertice x ha al più un numero finito di figli (non escludendo il caso in cui non ne abbia nessuno). Il numero di passi necessari per arrivare da un nodo x alla radice iterando la funzione padre si chiama **livello di** x. Quindi la radice ha livello 0, i suoi figli hanno livello 1, i figli dei figli livello 2 e così via. Un albero ha **infiniti livelli** se per ogni numero naturale n esiste almeno un vertice a livello n.

Lemma 1.4 *(König) Sia T un albero con le seguenti due proprietà.*

1. *T ha ramificazione finita (cioè ogni vertice ha al più un numero finito di figli).*
2. *T ha infiniti di livelli.*

Ne segue che T ha un **ramo infinito***, dove per ramo infinito si intende una successione infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di nodi tale che x_0 è la radice e ogni x_{i+1} è figlio di x_i.*

Dim. Prima di iniziare la dimostrazione osserviamo che il lemma sarebbe falso senza l'ipotesi che T abbia ramificazione finita. Possiamo infatti considerare un albero a ramificazione infinita la cui radice r ha infiniti figli $f_1, f_2, f_3, \ldots$ (uno per ogni numero naturale) e tale che il figlio f_i ha esattamente i descendenti. Un albero di questo genere ha infiniti livelli pur non possedendo un ramo infinito (infatti ogni ramo deve passare per uno dei figli f_i e si deve quindi arrestare dopo al massimo i passi).

Per dimostrare il lemma assumiamo che T abbia ramificazione finita ed infiniti livelli e cerchiamo di definire un ramo infinito $x_0, x_1, x_2, \ldots$. La scelta di x_0 è obbligata: dobbiamo prendere la radice dell'albero. Come scegliamo x_1? Dobbiamo sceglierlo in modo che abbia infiniti discendenti (altrimenti la costruzione del ramo si arresterebbe dopo un numero finito di passi). Per fare vedere che almeno uno dei figli di x_0 ha un numero infinito di discendenti usiamo l'ipotesi che l'albero ha ramificazione finita. Se infatti, ragionando per assurdo, tutti i figli di x_0 avessero un numero finito di discendenti, allora - visto che x_0 ha un numero finito di figli - anche x_0 avrebbe un numero finito di discendenti (in quanto una unione finita di insiemi finiti è un insieme finito). Abbiamo quindi mostrato che possiamo scegliere un x_1 con un numero infinito di discendenti. Ripetendo il ragionamento scegliamo ora un figlio x_2 di x_1 con un numero infinito di discendenti e così via. Più precisamente, supponendo induttivamente di aver già definito x_n in modo che abbia un numero infinito di discendenti, scegliamo come x_{n+1} uno dei figli di x_n che ha un numero infinito di discendenti (deve esistere per il ragionamento di prima). La risultante successione infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ è il ramo desiderato. QED

Applichiamo ora il lemma al gioco del tassellamento.

Corollario 1.5 *Se un insieme finito di tipi di piastrelle è finitamente-ricoprente, allora è anche ricoprente.*

Dim. Supponiamo di avere un numero finito di tipi di piastrelle che sia finitamente-ricoprente. Per far vedere che è ricoprente costruiamo un albero nel modo seguente. I vertici sono le porzioni quadrate del piano ricoperte con $n \times n$ piastrelle, dove n è un numero dispari, più un vertice speciale chiamato r (che sarà la radice). Dati due vertici a, b diversi dalla radice diciamo che a è il padre di b se a si ottiene da b rimuovendo le piastrelle sul bordo. Quindi ad esempio il padre di un quadrato di 5×5 piastrelle è il quadrato di 3×3 piastrelle che si ottiene rimuovendo la cornice esterna. Il padre di un quadrato 1×1 è la radice r. Poichè ci sono un numero finito di tipi di piastrelle, ad ogni livello n ci sono un numero finito di vertici, cioè tanti vertici quanti sono i modi di ricoprire un quadrato di lato $2n + 1$ con i tipi di piastrelle date. Ad esempio la radice ha tanti figli quanti sono i tipi di piastrelle. Poichè stiamo supponendo che le nostre piastrelle siano finitamente-ricoprenti, ne segue in particolare che ad ogni livello ci sia almeno un vertice. Quindi l'albero ha infiniti livelli. Per il lemma di König esiste un ramo infinito $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Questa successione fornisce un modo di ricoprire tutto il piano ricoprendo cornici concentriche sempre più grandi di lato $n \times n$ con n dispari. La n-esima cornice è ricoperta con x_n. La ragione per cui abbiamo definito l'albero in modo che consistesse solo di quadrati di lato dispari, è per garantire che le cornici fossero concentriche, e si estendessero quindi in tutti e quattro i lati invece di crescere in una sola direzione. QED

Possiamo immaginare l'albero associato al gioco delle piastrelle come all'insieme dei tentativi di ricoprire il piano. I tentativi sbagliati sono quelli che conducono ad una foglia dell'albero, da cui non si può continuare. Un ramo infinito è un insieme di scelte che conducono a ricoprire parti sempre più grandi del piano senza mai arrestarsi in una foglia.

Osservazione 1.6 La dimostazione del lemma di König è non costruttiva. Dato un insieme finito di tipi di piastrelle finitamente-ricoprenti, sappiamo che esso è ricoprente, ma in generale non abbiamo un algoritmo che ci dica quale tipo di piastrella situare in un determinato posto. Esistono degli esempi in cui questo algoritmo non esiste.

2 Il sistema dimostrativo dei tableaux

Il sistema dei tableaux è costituito da un insieme di regole per cercare di dimostrare, se possibile, che un insieme finito di L-formule chiuse Γ non ha un modello. Questo è importante per via dell'osservazione seguente:

Osservazione 2.1 $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ non ha un modello se e solo se $\Sigma \models \phi$.

Quindi prendendo $\Gamma = \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ possiamo usare il metodo dei tableaux per cercare di dimostrare che $\Sigma \models \phi$.

L'idea delle regole dei tableaux è quella di ricondursi al caso di insiemi di formule via via più semplici attraverso una serie opportuna di passaggi.

Consideriamo ad esempio l'insieme di formule $\Sigma \cup \{\phi \vee \psi\}$, che scriviamo per brevità $\Sigma, \phi \vee \psi$. Allora è chiaro che Σ ha un modello se e solo se Σ, ϕ ha un modello o Σ, ψ ha un modello (senza escludere il caso che lo abbiano entrambe). Dal problema di stabilire se un dato insieme di formule ha un modello ci siamo quindi ricondotti al problema di stabilire se almeno uno di due insiemi di formule più semplici ha un modello. Rappresentiamo visivamente questa situazione con il diagramma seguente:

Regola del $\vee$.

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma, \phi \vee \psi & \\ \diagup & & \diagdown \\ \Sigma, \phi & & \Sigma, \psi \end{array}$$

Se invece fossimo partiti dall'insieme $\Sigma, \phi \wedge \psi$ osserveremmo che tale insieme ha un modello se e solo se l'insieme Σ, ϕ, ψ ha un modello. Rappresentiamo questa situazione con il diagramma:

Regola del $\wedge$.

$$\begin{array}{c} \Sigma, \phi \wedge \psi \\ | \\ \Sigma, \phi, \psi \end{array}$$

L'elenco completo delle regole è il seguente (spiegheremo il loro significato nel seguito):

2.1 Regole dei tableaux

$$\begin{array}{c} \Sigma, \phi \wedge \psi \\ | \\ \Sigma, \phi, \psi \end{array} \quad (\wedge) \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \Sigma, \neg(\phi \wedge \psi) & \\ \diagup & & \diagdown \\ \Sigma, \neg\phi & & \Sigma, \neg\psi \end{array} \quad (\neg\wedge)$$

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma, \phi \vee \psi & \\ \diagup & & \diagdown \\ \Sigma, \phi & & \Sigma, \psi \end{array} \quad (\vee) \qquad\qquad \begin{array}{c} \Sigma, \neg(\phi \vee \psi) \\ | \\ \Sigma, \neg\phi, \neg\psi \end{array} \quad (\neg\vee)$$

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma, \phi \to \psi & \\ \diagup & & \diagdown \\ \Sigma, \neg\phi & & \Sigma, \psi \end{array} \quad (\to) \qquad\qquad \begin{array}{c} \Sigma, \neg(\phi \to \psi) \\ | \\ \Sigma, \phi, \neg\psi \end{array} \quad (\neg \to)$$

$$\begin{array}{c} \Sigma, \neg\neg\phi \\ | \\ \Sigma, \phi \end{array} \qquad (\neg\neg)$$

$$\begin{array}{c} \Sigma, \forall x \phi(x) \\ | \\ \Sigma, \forall x \phi(x), \phi(t) \end{array} \qquad (\forall) \qquad\qquad \begin{array}{c} \Sigma, \neg\forall x \phi(x) \\ | \\ \Sigma, \neg\phi(c) \end{array} \qquad (\neg\forall)$$

$$\begin{array}{c} \Sigma, \exists x \phi(x) \\ | \\ \Sigma, \phi(c) \end{array} \qquad (\exists) \qquad\qquad \begin{array}{c} \Sigma, \neg\exists x \phi(x) \\ | \\ \Sigma, \neg\exists x \phi(x), \neg\phi(t) \end{array} \qquad (\neg\exists)$$

Dove nelle regole per i quantificatori t è un termine chiuso arbitrario, e c è una costante che non appare né in Γ né in $\phi(x)$.

Se il linguaggio contiene il simbolo di uguaglianza dobbiamo aggiungere le seguenti regole:

$$\begin{array}{c} \Sigma, t_1 = t_2, \phi(t_1) \\ | \\ \Sigma, t_1 = t_2, \phi(t_1), \phi(t_2) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \Sigma, t_1 = t_2, \phi(t_2) \\ | \\ \Sigma, t_1 = t_2, \phi(t_2), \phi(t_1) \end{array}$$

dove t_1 e t_2 sono termini chiusi. Intuitivamente queste ultime due regole dicono che possiamo sostituire un termine t_1 con un termine t_2 in qualsiasi contesto a condizione che valga $t_1 = t_2$.

In generale ci saranno regole che "biforcano" (come quella relativa al connettivo $\vee$ oppure al connettivo $\neg$ seguito da $\wedge$) e regole che non biforcano (come quella del $\wedge$).

Le regole che biforcano hanno un *padre* e due *figli* (il padre è l'insieme di formule che si trova nella parte in alto del diagramma). Le regole che non biforcano hanno un padre e un solo figlio.

2.2 correttezza delle regole

Il criterio che abbiamo seguito nello scrivere le regole è il seguente: nel caso delle regole che biforcano, il padre ha un modello se e solo se almento uno dei figli ha un modello. Nel caso di quelle che non biforcano, il padre ha un modello se e solo se il figlio ha un modello. Se una regola segue questi criteri diremo che è *corretta*.

Vediamo nel dettaglio la correttezza delle regole dei quantificatori.

Correttezza della regola del $\forall$.

Poichè $\forall x \phi(x)$ implica $\phi(t)$, l'insieme $\Sigma, \forall x \phi(x)$ ha un modello se e solo se $\Sigma, \forall x \phi(x), \phi(t)$ ha un modello. Quindi la regola del $\forall$ è corretta.

Correttezza della regola del $\exists$.

Dobbiamo mostrare che se c è un simbolo di costante che non appare in Σ, allora $\Sigma, \exists x\phi(x)$ ha un modello se e solo se $\Sigma, \phi(c)$ ha un modello.

È chiaro che una interpretazione che renda vere le formule $\Sigma, \phi(c)$ renderà vere le formule $\Sigma, \exists x\phi(x)$.

Viceversa se $\Sigma, \exists x\phi(x)$ ha un modello M, allora esisterà almeno un elemento $a \in dom(M)$ tale che $M \models \phi(a)$ e possiamo quindi espandere M ad un modello di $\Sigma, \phi(c)$ interpretando la costante c con l'elemento a. Questo modello espanso rende vera sia $\phi(c)$ che tutte le formule in Σ (queste ultime infatti, non contenendo c, mantengono lo stesso valore di verità che avevano nel modello non espanso). La regola è quindi corretta.

Correttezza delle altre regole.

Le altre due regole sui quantificatori si riconducono a quelle già analizzate usando le equivalenze logiche $\neg\exists x\phi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\phi(x)$ e $\neg\forall x\phi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\phi(x)$. La correttezza delle regole riguardanti $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ è ovvia, e quella delle regole riguardanti "=" segue dal fatto che il simbolo $=$ va intepretato come la relazione di uguaglianza.

2.3 Costruzione di un tableau

Osserviamo che se un insieme di formule chiuse Γ contiene almeno una formula della forma $\phi \wedge \psi$, $\neg(\phi \wedge \psi)$, $\phi \vee \psi$, $\neg(\phi \vee \psi)$, $\phi \rightarrow \psi$, $\neg(\phi \rightarrow \psi)$, $\forall x\phi(x)$, $\neg\forall x\phi(x)$, $\exists x\phi(x)$, $\neg\exists x\phi(x)$, allora almeno una delle regole risulterà applicabile a Γ.

Quindi l'unico caso in cui nessuna regola è applicabile, è quando Γ contiene solamente formule atomiche o negazioni di formule atomiche (vedremo che in quel caso è facile verificare direttamente se Γ ha un modello).

Se possiamo applicare una regola a Γ, allora dopo tale applicazione Γ genera uno o due figli a seconda della regola usata, e possiamo ora cercare di applicare nuove regole ai figli di Γ, e poi ai figli dei figli e cosí via. In questo modo generiamo progressivamente un albero, detto *tableaux* i cui nodi sono etichettati da insiemi di formule chiuse e la cui radice è l'insieme Γ di partenza.

Quando ci fermiamo? Un caso in cui un insieme di formule Σ sicuramente non ha modelli è quando contiene al tempo stesso una formula e la sua negazione. In quel caso è inutile proseguire e diciamo che quel ramo dell'albero è *chiuso*. Se riusciamo a costruire un albero che ha tutti i rami chiusi, allora diciamo che l'intero *tableaux è chiuso*.

Segue dal fatto che le regole dei tableaux sono corrette che:

Teorema 2.2 *Se esiste un tableaux chiuso che ha come radice Γ, allora Γ non ha modelli.*

Corollario 2.3 *Se esiste un tableau chiuso che ha come radice $\Gamma, \neg\phi$, allora $\Gamma \models \phi$.*

Vedremo nella prossima sezione che vale anche il viceversa. Possiamo pensare ad un tableaux per $\Gamma, \neg\phi$ come ad una *dimostrazione formale* (nel sistema dei tableaux) della validità del giudizio $\Gamma \models \phi$.

2.4 La segnatura di un tableaux

Osserviamo che se partiamo da un insieme Γ di formule chiuse in una data segnatura L, le regole del $\exists$ e del $\neg\forall$ ci costringono, se vengono applicate, ad ampliare la segnatura con l'aggiunta di nuovi simboli di costante. La segnatura di un tableuax è data da L più tutti i nuovi simboli di costante che abbiamo introdotto nel tableaux.

A priori se usiamo il tableaux per mostrare che Γ non ha un modello non è chiaro quale segnatura stiamo prendendo in considerazione nel concetto di modello, se quella originaria di Γ o quella del tableaux.

La seguente osservazione ci dice che il concetto di “avere un modello” non è ambiguo, anche se non specifichiamo con precisione la segnatura.

Osservazione 2.4 Sia Γ un insieme di L-enunciati. Sono equivalenti:

1. Esiste una L-struttura M che rende vere le formule di Γ.
2. Esiste una struttura M', in una segnatura L' che contiene L, che rende vere le formule di Γ.

Dim. Per mostrare $2 \to 1$ basta prendere come M la restrizione di M' a L. Per il viceversa basta espandere M ad una L'-struttura M' interpretando in modo del tutto arbitrario i simboli in più. QED

Analoghe osservazioni mostrano che la validità del giudizio $\Gamma \models \phi$ non dipende dalla segnatura (purchè ci si restringa a segnature che contengono almeno tutti i simboli di Γ e ϕ).

3 Insiemi di Hintikka

Intuitivamente un insieme è di Hintikka se non contiene contraddizioni immediate ed è chiuso rispetto alle regole dei tableaux.

Definizione 3.1 (Insiemi di Hintikka) Consideriamo un insieme di L-enunciati T (possibilmente anche infinito). Diciamo che T è un insieme di Hintikka (per L) se per ogni scelta di L-formule ϕ, ψ si ha:

1. se $\phi \in T$, allora $\neg\phi \notin T$,
2. se $\neg\neg\phi \in T$, allora $\phi \in T$,
3. se $\phi \wedge \psi \in T$, allora $\phi \in T$ e $\psi \in T$,
4. se $\neg(\phi \wedge \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\neg\psi \in T$,
5. se $\phi \vee \psi \in T$, allora $\phi \in T$ o $\psi \in T$,
6. se $\neg(\phi \vee \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
7. se $\phi \to \psi \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\psi \in T$,
8. se $\neg(\phi \to \psi) \in T$, allora $\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
9. se $\forall x \phi(x) \in T$, allora per ogni L-termine chiuso t, $\phi(t) \in T$,
10. se $\neg\forall x \phi(x) \in T$, allora esiste un L-termine chiuso t tale che $\neg\phi(t) \in T$,
11. se $\exists x \phi(x) \in T$, allora esiste un L-termine chiuso t, tale che $\phi(t) \in T$,
12. se $\neg\exists x \phi(x) \in T$, allora per ogni L-termine chiuso t, $\neg\phi(t) \in T$.

Se L non contiene il simbolo di uguaglianza $=$ possiamo fermarci qui. Altrimenti dobbiamo aggiungere le seguenti proprietà dell'uguaglianza:

1. (riflessività) per ogni L-termine chiuso t, $t = t \in T$,
2. (sostituibilità) per ogni L-formula $\phi(x)$ e termini chiusi t e t', se $t = t' \in T$, allora $\phi(t) \in T$ se e solo se $\phi(t') \in T$.

Nella ultima clausola possiamo anche limitarsi a formule atomiche $\phi(x)$.

Definizione 3.2 Un *insieme di Hintikka completo* è un insieme di Hintikka tale che per ogni L-formula chiusa ϕ, o ϕ o la sua negazione $\neg\phi$ appartengano a T (e non tutte e due, altrimenti non sarebbe di Hintikka).

Gli insiemi di Hintikka completi giocano un ruolo cruciale nella dimostrazione del teorema di completezza per il sistema di Hilbert-Frege, ma per ora non ci interessano, salvo ad osservare che non tutti gli insiemi di Hintikka sono completi.

La ragione principale per cui abbiamo insistito sulla distinzione tra la sintassi (cioè le L-formule) e la semantica (cioè l' interpretazione delle L-formule) è costituito dal seguente teorema che mostra come costruire un modello a partire da ingredienti puramente sintattici.

Teorema 3.3 *Ogni insieme di Hintikka T ha un modello M. Inoltre possiamo prendere M in modo tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di un termine chiuso della segnatura L di T.*

Dim. Per semplicità consideriamo prima il caso in cui L non ha il simbolo di uguaglianza né simboli di funzione. In questo caso gli unici termini chiusi di L sono le costanti. Prendiamo come $dom(M)$ l'insieme delle costanti di L. Dato un simbolo di relazione R di arità n, definiamo la sua interpretazione R^M in M come l'insieme di tutte le n-uple di costanti $< c_1, \dots, c_k >$ tali che $R(c_1, \dots, c_n) \in T$. In questo modo abbiamo definito una L-struttura che rende veri almeno tutti gli enunciati atomici in T, e falsi gli enunciati atomici non in T. Sia ora ϕ un arbitrario L-enunciato. Usando le proprietà di Hintikka segue per induzione sul numero dei connettivi di ϕ che se $\phi \in T$, allora $M \models \phi$ (se T è un insieme di Hintikka completo sarà anche vero che se $\phi \notin T$, allora $M \models \neg\phi$).

Consideriamo ad esempio il caso $\neg\phi \in T$. Dalle proprietà di Hintikka segue che $\phi \notin T$, ma sembrerebbe che ora la nostra induzione si ferma perchè dal fatto che una formula non è in T non possiamo concludere nulla a meno che non sia atomica. Possiamo però procedere cosí: se ϕ è atomica, allora dal fatto che $\phi \notin T$ concludiamo correttamente che $M \models \neg\phi$ per definizione di M. Se invece ϕ non è atomica, allora deve cominciare con un connettivo. Supponiamo ad esempio che tale connettivo sia $\vee$, cioè $\neg\phi = \neg(\alpha \vee \beta)$. Usando le proprietà di Hintikka abbiamo $\neg\alpha \in T$ e $\neg\beta \in T$. Per induzione possiamo concludere $M \models \neg\alpha$ e $M \models \neg\beta$, da cui poi segue $M \models \neg(\alpha \vee \beta)$.

Lasciamo al lettore la verifica degli altri casi. Questo conclude la dimostrazione nel caso il linguaggio non ha simboli di funzione e il simbolo di uguaglianza.

Consideriamo ora il caso in cui L può contenere il simbolo di uguaglianza e simboli di funzione. Ricordiamo che siamo obbligati a interpretare il simbolo di uguaglianza come la vera relazione di uguaglianza, quindi se $t = t' \in T$ dobbiamo fare in modo che t e t' siano interpretati con lo stesso elemento del modello M che vogliamo costruire.

A tal fine prendiamo come $dom(M)$ l'insieme degli L-termini chiusi quozientato rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita da $t \sim t'$ sse $t = t' \in T$. Segue dalle proprietà di Hintikka dell'uguaglianza che $\sim$ è in effetti una relazione di equivalenza. Indichiamo con $t/\sim$ la classe di equivalenza di t rispetto a $\sim$.

Dato un simbolo di funzione f di L di arità n definiamo la sua interpretazione $f^M : dom(M)^n \to dom(M)$ ponendo: $f^M(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) = f(t_1, \dots, t_n)/\sim$. Questa definizione è be posta perchè dalla proprietà di Hintikka di sostituibilità (applicata ripetute volte) segue che se $t_1 \sim t'_1, \dots, t_n \sim t'_n$ allora $f(t_1, \dots, t_n) \sim f(t'_1, \dots, t'_n)$.

Resta solo da definire l'interpretazione R^M dei simboli di relazione di L (se ve ne sono). Se R ha arità n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini chiusi, poniamo $(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in R^M$ sse $R(t_1, \dots, t_n) \in T$. Questo è ben posto per la sostitutività. Abbiamo così definito una L-struttura M.

Per induzione sulla lunghezza dei termini chiusi t, segue che $t^M = t/\sim$. Quindi se $t = t' \in T$, allora $t^M = t/\sim = t'/\sim = t'^M$, e quindi $M \models t = t'$ (si noti che per abuso di linguaggio abbiamo usato "=" sia come simbolo che come la vera relazione di uguaglianza). Viceversa se $t = t' \notin T$, allora $t/\sim \neq t'/\sim$ e $M \models t \neq t'$. Quindi M rende veri per lo meno gli enunciati di T della forma $t = t'$, e falsi gli enunciati della forma $t = t'$ che non sono in T. Similmente si verifica che $R(t_1, \ldots, t_n) \in T$ sse $M \models R(t_1, \ldots, t_n)$. Quindi tra gli enunciati atomici (senza connettivi) M rende veri tutti e soli quelli che sono in T. Ragionando per induzione sulla complessità della formula, usando le proprietà di Hintitkka per i passi induttivi, vediamo che ogni $\phi \in T$ (non necessariamente atomica) è vera M.

Il caso cruciale da considerare è quello del $\forall x$. Per trattare questo caso si usa il fatto che M è stata definita in modo tale che ogni elemento a del suo dominio sia l'interpretazione di un termine chiuso t. (Infatti se $a = t/\sim$, allora $a = t^M$.) Ora supponiamo che $\forall x\phi \in T$. Poichè T è di Hintikka e contiene $\forall x\phi$, T deve contenere anche tutte le formule della forma $\phi(t/x)$ dove t è un termine chiuso. Per induzione tutte queste formule sono vere in M. Sia ora a un arbitrario elemento del dominio di M e scegliamo un termine chiuso t tale che $a = t^M$. Poichè $\phi(t/x)$ è vera lo deve essere anche $\phi(a/x)$. Ma a è un arbitrario elemento del dominio di M, e quindi $M \models \forall x\phi$. QED

Corollario 3.4 *Se un insieme di L-enunciati T è incluso in un insieme T' di Hintikka (possibilmente in un linguaggio L' più esteso), allora T ha un modello.*

Dim. Poichè T' è di Hintikka T' ha un modello M'. Ne segue che T ha come modello la restrizione di M' al linguaggio di T. QED

Il precedente corollario è in effetti una condizione necessaria e sufficiente affinchè T abbia un modello. In effetti se T ha un modello M, il diagramma elementare di M, definito piú sotto, è un insieme di Hintikka contenente T.

Definizione 3.5 Data una L-struttura M definiamo la teoria $ED(M)$, detta *diagramma elementare* di M, come la teoria nel linguaggio $L[M]$ ottenuto da L aggiungendo un simbolo di costante c_m per ogni $m \in dom(M)$, e avente come assiomi tutti gli $L[M]$-enunciati che risultano veri in M quando si interpreta c_m con m.

4 Completezza del sistema dei tableaux

Usiamo gli insiemi di Hintikka per mostrare il sistema dei tableaux è completo nel senso che se non esiste un tableau chiuso con radice Γ, allora esiste un modello M di Γ (prendendo $\Gamma = \Sigma, \neg\phi$ ne segue che se $\Sigma \models \phi$ allora esiste un tableaux chiuso con radice $\Sigma, \neg\phi$).

Definizione 4.1 (Completezza del sistema dei tableaux) Sia Γ un insieme finito di formule chiuse. Diciamo che Γ è *Tableaux-coerente* se non esiste una tableaux chiuso la cui radice sia Γ (ricordiamo che "chiuso" vuol dire che ogni ramo del tableaux è di lunghezza finita e tutte le foglie del tableaux contengono una coppia $\theta, \neg\theta$).

Teorema 4.2 *Se Γ è tableaux-coerente, allora Γ ha un modello.*

Dim. (Cenno) Se non esistono tableaux chiusi per Γ, in particolare non esistono nemmeno tableaux "sistematici" chiusi, dove per tableaxu sistematico intendo un tableaux in cui le regole sono state usate con oculatezza, nel senso che:

1) se un ramo contiene una formula a cui si può applicare qualche regola, allora prima o poi in quel ramo viene applicata a quella formula la regola corrispondente.

2) se un ramo contiene una formula della forma $\forall x \phi(x)$ e lo stesso ramo contiene una occorrenza di un termine chiuso t, allora in qualche punto di quel ramo è stata usata la regola $\forall$ applicata alla formula $\forall x \phi(x)$ e al termine t. Similmente per la regola del $\neg\exists$ (che è equivalente ad un $\forall$).

Poichè le regole $\exists$ e $\neg\forall$ possono introdurre nuove costanti e quindi nuovi termini chiusi, non è detto che la costruzione di un tableaux sistematico possa completarsi dopo un numero finito di passi, in quanto ad ogni nuova introduzione di termini possiamo essere costretti ad applicare nuovamente la regola $\forall$ a quei termini (un caso del genere si verifica se si prova a fare un tableaux sistematico con radice $\{\forall x \exists y R(x,y)\}$).

Non è però difficile vedere per ogni insieme finito Γ di formule chiuse esiste un tableaux sistematico, possibilmente infinito, che ha Γ come radice. Se tale tableaux sistematico non è chiuso, allora ha almeno un ramo (finito o infinito) non chiuso (cioè che non contiene una coppia $\phi, \neg\phi$). Ora si vede facilmente dalle definizioni che un ramo non chiuso di un tableaux sistematico è un insieme di Hintikka e quindi ha un modello (che sarà in particolare un modello della radice Γ). QED

5 Teorema di compattezza per la logica del primo ordine

Definizione 5.1 Sia T un insieme di L-enunciati del primo ordine. Diciamo che T è *finitamente soddisfacibile* se ogni sottoinsieme finito di T ha un modello.

Teorema 5.2 *(Compattezza) Sia T un insieme di L-enunciati del primo ordine. Se T è finitamente soddisfacibile, allora è soddisfacibile (il viceversa è ovvio).*

Dim. Chiaramente se T è soddisfacibile è anche finitamente soddisfacibile. Se T è finito vale banalmente anche il viceversa perchè possiamo prendere come sottoinsieme finito T stesso. Quindi il caso interessante è quando T è infinito.

Dimostreremo il teorema solo nel caso in cui T sia numerabile, cioè $T = \{\phi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Ragioniamo per assurdo, assumiamo cioè che T è insoddisfacibile, e mostriamo che anche qualche suo sottoinsieme finito lo è. Per il teorema di completezza del sistema dei Tableaux, dal fatto che T è insoddisfacibile ne deduciamo che T non è Tableaux coerente. Esistere quindi un tableaux chiuso H con radice T. Ma in un Tableaux chiuso ci sono necessariamente solo un numero finito di nodi, e quindi le regole Tableaux sono state applicate ad un numero finito di formule. Questo significa che, anche se gli assiomi di T sono infiniti, solamente un numero finito di essi è stato realmente utilizzato nel tableaux chiuso H. Quindi se $T' \subset T$ è la sottoteoria finita di T che contiene solo quegli assiomi effettivamente utilizzati dal Tableaux chiuso H, vediamo che anche T' è Tableaux incoerente. QED