ANALISI I

–12.06.2003–

1. (a) Mostrare che l'equazione
$$x = ne^{-x}$$
ammette un'unica soluzione $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$.

   (b) Detta x_n tale soluzione si mostri che
$$\lim x_n = +\infty$$

   (c) Più precisamente si mostri che $x_n = \log n + o(\log n)$.

   (d) Si aumenti la precisione nella stima precedente mostrando che
$$x_n = \log n - \log\log n + o(1).$$

   (e) [1] Si discuta la convergenza delle serie seguenti:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1/x_n \ , \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x_n} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x_n^2} \ .$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\phi^+(x) := f(x) + x^2/2$ risulti essere una funzione convessa mentre $\phi^-(x) := f(x) - x^2/2$ risulti essere una funzione concava. Si dimostri che allora

   (a) f è continua;

   (b) f è derivabile;

   (c) $|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|$.

[1] Questo punto può essere affrontato anche dando per acquisiti i risultati dei punti precedenti.

ANALISI II

–12.06.2003–

3. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' - u = 1/t$ definite sull'intervallo $(0, +\infty)$. Dire se esistono soluzioni di questa equazione tali che che $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ e, nel caso, determinarle.

4. (a) Si mostri che le funzioni $u_k(x) := x^k \log x$ sono tutte integrabili (in senso improprio) sull'intervallo $[0, 1]$ e si calcoli $\int_0^1 x^k \log x \; dx \quad \forall k \geq 0$.

   (b) Si mostri che le funzioni $r_m(x) := \frac{x^m}{1-x} \log x$ sono tutte integrabili (in senso improprio) sull'intervallo $[0, 1]$ e si calcoli $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^m}{1-x} \log x \; dx$.

   (c) Si calcoli il valore

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1 - x} \; dx.$$

   [Sugg: si approssimi la funzione $1/(1 - x)$ mediante il suo polinomio di Taylor di ordine m e successivamente si passi al limite.]