Terzo appello del primo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Si vuole ripartire un insieme di 12 elementi in 3 classi di 4 elementi ciascuna. In quanti modi diversi si può fare questa suddivisione?

   `Sia` X `l'insieme di 12 elementi e sia` A `un insieme di tre elementi; consideriamo l'insieme di funzioni`

   $$F := \{f \in A^X : |f^{-1}(a)| = 3 \ \ \forall a \in A\}$$

   `La cardinalità di` F `è data da` $|F| = \binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$. `Ogni` $f \in F$ `determina una suddivisione dell'insieme` X `in 3 classi di 4 elementi ciascuna; osserviamo anche che due funzioni` $f_1, f_2 \in F$ `determinano la stessa suddivisione se solo se differiscono per una permutazione di` A `cioè se` $f_1 = \sigma \circ f_2$. `Pertanto la cardinalità delle suddivisioni possibili è`

   $$\frac{|F|}{3!} = \frac{12!}{3!(4!)^3} = 5775.$$

2. Sia $a_k \geq 3^k$. Mostrare che se $|x| < 3$ la quantità

   $$F(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log a_k}{a_k} x^k$$

   è ben definita. Mostrare inoltre che $F(1) \leq \frac{1}{e} + \frac{3}{4}\log 3$.

   `Conviene innanzitutto fare uno studio qualitativo della funzione` $f(t) = \frac{\log t}{t}$: `è immediato verificare che` f `è positiva su` $[1, +\infty[$

ed è infinitesima per $t \to +\infty$, inoltre visto che $f'(t) = (1-\log t)/t^2$ si deduce che f è crescente su $]0, e]$ e decrescente su $[e, +\infty[$ e quindi $\max f = f(e) = 1/e$. Di conseguenza si avra' che $\frac{\log a_0}{a_0} \leq 1/e$, $\frac{\log a_k}{a_k} \leq \frac{\log 3^k}{3^k}$ per $k \geq 1$, pertanto, se $|x| < 3$, la serie che definisce F è assolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log a_k}{a_k} |x|^k \leq \frac{1}{e} + \log 3 \sum_{k=1}^{+\infty} k(\frac{|x|}{3})^k.$$

Dalla formula precedente, ponendo $x = 1$ ricaviamo

$$F(1) \leq \frac{1}{e} + \log 3 \sum_{k=1}^{+\infty} k3^{-k}$$

da cui la tesi, visto che $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

3. Provare che per ogni $f \in C^2([0,1])$ con $f(0) = f(1) = 0$ e $f''(x) \geq -1$ si ha che

$$f(x) \leq \frac{1}{2} x(1-x) \qquad \forall x \in [0,1].$$

Definiamo $h(x) := f(x) - \frac{1}{2}x(1-x)$; chiaramente si ha che $h(0) = h(1) = 0$ e $h''(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,1)$. Se si ha $h'(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in (0,1)$ dalla formula di Taylor con resto di Lagrange segue che $h(x) = h(x_0) + h''(\xi)(x - x_0)^2$ e dunque $h(x) \geq h(x_0)$ $\forall x \in [0,1]$ cioè x_0 è punto di minimo per h. D'altronde, per il teorema di Weierstrass, h ammette massimo su $[0,1]$ e dunque tale massimo deve cadere agli estremi o coincidere col minimo: in entrambi i casi si ha che il massimo è zero e quindi $h(x) \leq 0$ $\forall x \in [0,1]$ il che equivale alla tesi[1].

[1] In effetti $h'' \geq 0$ implica che h è convessa e quindi h deve assumere il massimo agli estremi.

Primo appello del secondo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Calcolare, al variare del parametro positivo α, il valore
$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}.$$

   `Se` $\alpha \in (0,1]$ `la funzione` $g : t \mapsto (1+t)^\alpha$ `è concava (infatti` $g'' \leq 0$`), pertanto ha rapporti incrementali decrescenti; dunque`
$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = g'(0) = \alpha.$$
   `D'altra parte se` $\alpha \in (1,+\infty)$ `la funzione` $g : t \mapsto (1+t)^\alpha$ `è convessa (infatti` $g'' > 0$`), pertanto ha rapporti incrementali crescenti; dunque`
$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = +\infty.$$

2. (a) Determinare i valori del parametro β per cui risulti finito l'integrale improprio
$$I_\beta := \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^\beta} dx$$

(b) Per tali valori calcolare il valore dell'integrale.

`Osserviamo che` $\sin^3 x = (1+\cos x)(1-\cos x)\sin x$ `pertanto`

$$I_\beta = \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)^{\beta-1}} \sin x dx$$

`Mediante il cambio di variabile` $t = -\cos x$ `l'integrale si riduce a`

$$I_\beta = \int_{-1}^1 \frac{1+t}{(1-t)^{\beta-1}} dt.$$

`Scomponendo` $\frac{1+t}{(1-t)^{\beta-1}} = \frac{2}{(1-t)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-t)^{\beta-2}}$ `otteniamo`

$$I_\beta = \int_{-1}^1 \frac{2}{(1-t)^{\beta-1}} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-t)^{\beta-2}} dt = 2^{3-\beta}[(2-\beta)^{-1} - (3-\beta)^{-1}].$$

3. (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + y = \frac{\sin t}{t}.$$

(b) Trovare $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ciascuna di esse si abbia

$$y(t) = \gamma \cos t \log t + O(1) \qquad \text{per } t \to +\infty$$

`Le soluzioni dell'equazione omogenea sono del tipo` $u(t) = a\cos t + b\sin t$ `con` $a, b \in \mathbb{R}$ `e sono quindi tutte limitate. Applicando il metodo della variazione delle costanti otteniamo che le soluzioni dell'equazione non omogenea sono del tipo:`

$$y(t) = -\cos t \int_1^t \frac{\sin^2 s}{s} ds + \sin t \int_1^t \frac{\sin s \cos s}{s} ds + a\cos t + b\sin t.$$

`Osserviamo che` $\sin^2 s = \frac{1-cos(2s)}{2}$`; ricordiamo inoltre che, se` ϕ `è una funzione periodica a media nulla,` $\int_1^t \frac{\phi(s)}{s} ds = O(1)$ `per` $t \to +\infty$`. Da ciò si ottiene che` $y(t) = -\cos t \int_1^t \frac{1}{2t} + O(1) = -\frac{1}{2}\cos t \log t + O(1)$ `per` $t \to +\infty$`.`