ANALISI FUNZIONALE

–17.2.2009–

1. Data $f_n(x) := e^{n(x^4-x^2)}$

   (a) Provare che, per $n \to +\infty$, si ha
   $$\int_0^{1/2} f_n(x)dx = an^b(1+o(1)),$$
   calcolando esplicitamente le costanti a e b.

   (b) Provare che, per $n \to +\infty$, si ha
   $$\int_0^{1} f_n(x)dx = a'n^{b'}(1+o(1)),$$
   calcolando esplicitamente le costanti a' e b'.

2. Data $c := (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di reali positivi si consideri l'insieme
   $$X_c := \{x \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \ : \ |x_n| \le c_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   (a) Mostrare che X_c è un sottoinsieme convesso e chiuso di $\ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$.

   (b) Dire per quali successioni $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X_c risulta essere limitato.

   (c) Dire per quali successioni $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X_c risulta essere compatto.

   (d) Mostrare che per ogni $p \in [1, +\infty[$ si ha che
   $$\forall x \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \ \ \exists! \ \bar{x} \in X_c \ : \ \|x-\bar{x}\|_p = \min_{x'\in X_c} \|x-x'\|_p.$$
   Che succede per $p = +\infty$?

3. In uno spazio di Hilbert H siano dati N vettori x_i, $1 \le i \le N$; sia inoltre $r < 1$ fissato. Mostrare che esiste $y \in H$ tale che
   $$\|y\| \le 1 \ \text{ ma } \ \|y - x_i\| > r \ \ \forall i \in \{1, ..., N\}.$$