ANALISI FUNZIONALE

–17.2.2009–

1. Data $f_n(x) := e^{n(x^4-x^2)}$

   (a) Provare che, per $n \to +\infty$, si ha
$$\int_0^{1/2} f_n(x)dx = an^b(1+o(1)),$$
   calcolando le costanti a e b.

   (b) Provare che, per $n \to +\infty$, si ha
$$\int_0^{1} f_n(x)dx = a'n^{b'}(1+o(1)),$$
   calcolando le costanti a' e b'.

(a) Effettuando il cambio di variabile $y = \sqrt{n}x$ si ottiene
$$\int_0^{1/2} e^{n(x^4-x^2)}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}/2} e^{y^2(\frac{y^2}{n}-1)}dy = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}} e^{y^2(\frac{y^2}{n}-1)}\chi_{[0,\sqrt{n}/2]}(y)dy;$$
d'altra parte, visto che $y^2/n - 1 \le 3/4 \quad \forall y \in [0, \sqrt{n}/2]$, otteniamo
$$0 \le e^{y^2(\frac{y^2}{n}-1)}\chi_{[0,\sqrt{n}/2]}(y) \le e^{-\frac{3}{4}y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+$$
$$\text{inoltre } e^{y^2(\frac{y^2}{n}-1)}\chi_{[0,\sqrt{n}/2]}(y) \to e^{-y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$
Per il teorema di convergenza dominata si ha
$$\int_0^{1/2} e^{n(x^4-x^2)}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy + o(1)\right) \qquad \text{per} \qquad n \to +\infty.$$
Pertanto $a = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $b = -1/2$.

(b) Osserviamo che
$$\int_0^{1} e^{n(x^4-x^2)}dx = \int_0^{1/2} e^{n(x^4-x^2)}dx + \int_{1/2}^{1} e^{n(x^4-x^2)}dx. \tag{1}$$
Per stimare il secondo termine al membro destro osserviamo che $\varphi(x) := x^4 - x^2$ è una funzione convessa su $[1/2, 1]$, da ciò si deduce facilmente che $\varphi(x) \le \frac{3}{8}(x-1)$. Usando questa maggiorazione ed il cambio di variabile $y = n(1-x)$ otteniamo
$$0 \le \int_{1/2}^{1} e^{n(x^4-x^2)}dx \le \int_{1/2}^{1} e^{n\frac{3}{8}(x-1)}dx \le \frac{1}{n}\int_0^{n/2} e^{-\frac{3}{8}y}dy = O(1/n)$$

per $n \to +\infty$. Dunque, per (1), si ha

$$\int_0^1 e^{n(x^4-x^2)}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}(1+o(1)) + O(1/n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(1+o(1)),$$

e quindi $a' = a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $b' = b = -1/2$.

2. Data $c := (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di reali positivi si consideri l'insieme

$$X_c := \{x \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \ : \ |x_n| \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   (a) Mostrare che X_c è un sottoinsieme convesso e chiuso di $\ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$.

   (b) Dire per quali successioni $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X_c risulta essere limitato.

   (c) Dire per quali successioni $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X_c risulta essere compatto.

   (d) Mostrare che per ogni $p \in [1, +\infty[$ si ha che

$$\forall x \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \ \ \exists!\ \bar{x} \in X_c \ : \ \|x - \bar{x}\|_p = \min_{x' \in X_c} \|x - x'\|_p.$$

   Che succede per $p = +\infty$?

(a) Ciascuna delle condizioni $|x_n| \le c_n$ definisce un conveso chiuso in $\ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$, pertanto X_c convesso chiso in quanto intersezione di convessi chiusi.

(b) Se $c \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ e $R := \|c\|_p$ allora $X_c \subset \overline{B(0,R)}$ e quindi limitato. Viceversa, se $c \notin \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^p = +\infty$ e, posto

$$P_m : (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (c_n \chi_{[0,m]}(n))_{n\in\mathbb{N}}$$

il proiettore sulle prime m coordinate si ha che la successione $[m \mapsto P_m c]$ assume valori in $\ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ ma

$$\|P_m c\|_p^p = \sum_{k=1}^{m} c_k^p \to +\infty \quad \texttt{per} \quad m \to +\infty.$$

(c) Se $p < +\infty$ X_c compatto se e solo se $c \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. In effetti per i punti precedenti basta mostrare che se $c \in \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ allora X_c è totalmente limitato, cioé può essere ricoperto con un numero finito di palle di raggio arbitrariamente piccolo. Sia quindi $\epsilon > 0$ fissato e scegliamo m in modo che

$$\|P_m c - c\|_p < \epsilon. \tag{2}$$

Si noti che, se $x \in X_c$ allora $\|P_m x - x\|_p \le \|P_m c - c\|_p < \epsilon$.

$P_m X_c$ è totalmente limitato (è un insieme limitato contenuto in un sottospazio finito dimensionale) pertanto $P_m X_c$ può essere ricoperto con un numero finito di palle di raggio ϵ o, equivalentemente, esiste un insieme finito A con la proprietà che

$$\forall x \in X_c \quad \exists a \in A \quad : \quad \|P_m x - a\|_p < \epsilon.$$

Ma allora, per ogni $x \in X_c$ esiste $a \in A$ tale che $\|x-a\|_p \leq \|x-P_m x\|_p + \|P_m x - a\|_p < 2\epsilon$ ovvero X_c si può ricoprire con un numero finito di palle di raggio minore di 2ϵ. Se $p = +\infty$ e $\lim c_n = 0$ allora l'equazione (2) continua a valere e la dimostrazione vista sopra si adatta facilmente a questo caso (praticamente basta sostituire il simbolo di sommatoria con quello di sup). Ma se c_n non fosse infinitesima esisterebbe una sottosucc $n_k \to +\infty$ tale che $c_{n_k} \geq \delta > 0$: chiamando e_m l'm-esimo elemento della base canonica si verifica facilmente che δe_{n_k} è una successione in X_c che non ammette alcuna sottosuccesione convergente.

(d) Sia $I := \{n \in \mathbb{N} \quad : \quad |x_n| > c_n\}$, verifichiamo che

$$\bar{x} := \begin{cases} x_n & \text{se } n \notin I \\ \frac{x_n}{|x_n|} c_n & \text{se } n \in I \end{cases}$$

ha le proprietà desiderate. Chiaramente $|\bar{x_n}| \leq c_n \forall n$ e quindi $\bar{x} \in X_c$, inoltre se $x' \in X_c$ allora

$$\|x - x'\|_p^p = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - x'_n|^p \geq \sum_{n \in I} |x_n - x'_n|^p \geq \sum_{n \in I} (|x_n| - c_n)^p = \|x - \bar{x}\|_p^p$$

e la prima disuguaglianza è un'uguaglianza se e solo se $x_n = x'_n \forall n \notin I$ mentre la seconda solo se $x'_n = \frac{x_n}{|x_n|} c_n$. Nel caso $p = +\infty$ è quasi tutto uguale, salvo che viene a mancare l'unicità.

3. In uno spazio di Hilbert H siano dati N vettori x_i, $1 \leq i \leq N$; sia inoltre $r < 1$ fissato. Mostrare che esiste $y \in H$ tale che

$$\|y\| \leq 1 \ \text{ ma } \ \|y - x_i\| > r \ \ \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

Sia $V := \text{span}(x_1, ..., x_n)$; $\dim V \leq N$ e quindi V un sottospazio chiuso di H. Chiaramente $V \neq H$. Basta allora prendere un qualunque vettore unitario v ortogonale a V e si avr che

$$\|v - x_i\|^2 = \|v\|^2 + \|x_i\|^2 \geq \|v\|^2 = 1$$

e quindi $\|v - x_i\| \geq 1 > r$.

Chi trovasse in questo testo errori, refusi o parti non chiare può segnalarlo via e-mail a carminat@dm.unipi.it