2.

(i) $\Phi(0,0) = \iint_Q (x^2+y^2)\,dx\,dy$

dove

$$Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x-y\le 2,\ -1\le x+y\le 1\}.$$

Con il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \qquad \psi(x,y)=(u,v)$$

da cui $\quad x=\dfrac{u+v}{2}, \quad y=\dfrac{u-v}{2}$

$$J\psi^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det J\psi^{-1} = 1/2 .$$

Si ha quindi

$$\psi(Q)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid |u|\le 1,\ 1\le v\le 2\}$$

e

$$\iint_Q (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right) du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \frac{u^2+v^2}{2}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_1^2 dv \int_{-1}^1 u^2\,du +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-1}^1 du \int_1^2 v^2\,dv = \frac{1}{6}\int_1^2 dv + \frac{7}{12}\int_{-1}^1 du = 4/3 = \Phi(0,0).$$

(ii) Con lo stesso cambiamento di variabili, si ottiene in generale

$$\iint_Q \left((x-a)^2+(y-b)^2\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \left(\left(\frac{u+v}{2}-a\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}-b\right)^2\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \left(\frac{u^2+v^2}{2} + a^2+b^2 -(a+b)u + (b-a)v\right) du\,dv = 4/3 +$$

$$+ \frac{a^2+b^2}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{1}^{2} dv - \frac{a+b}{2}\int_{1}^{2} dv \int_{-1}^{1} u\,du + \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{1}^{2} v\,dv =$$

$$= 4/3 + a^2+b^2 + \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{1}^{2} v\,dv = 4/3 + \frac{3(b-a)}{2} + a^2+b^2 =$$

$$= \Phi(a,b).$$

Chiaramente $\lim_{\|(a,b)\|\to+\infty} \Phi(a,b) = +\infty$ e

$$\nabla\Phi(a,b) = \left(2a - \tfrac{3}{2},\ 2b + \tfrac{3}{2}\right) = (0,0) \iff$$

$$\iff (a,b) = (3/4, -3/4)$$

che essendo l'unico punto stazionario in $\mathbb{R}^2$ è dunque di minimo (assoluto). Infatti

$$H\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)$$

i cui autovalori sono entrambi positivi.

3.

i) $\underline{F}$ è definito $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$(x+1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (-1,1)$$

Dunque il suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1)\}$ non è semplicemente connesso.

(ii) Si ha $\operatorname{rot} \underline{F} = (0, 0, D_1 F_2 - D_2 F_1)$. Ma

$$D_1 F_2 = \frac{(y-1)^2 - (x+1)^2}{\left[(x+1)^2 + (y-1)^2\right]^2}$$

e

$$D_2 F_1 = \frac{(y-1)^2 - (x+1)^2}{\left[(x+1)^2 + (y-1)^2\right]^2}$$

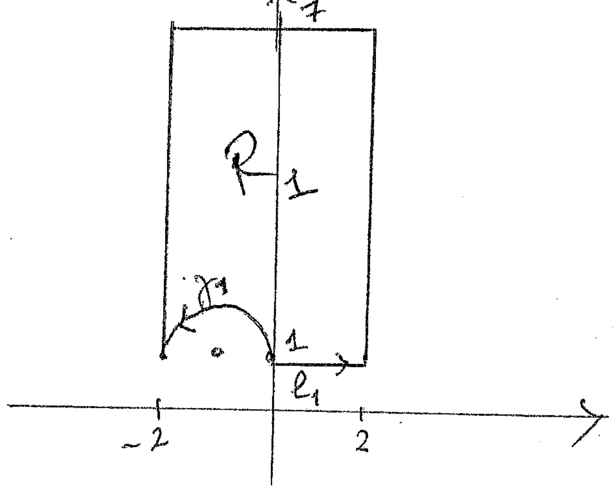
da cui $\operatorname{rot} \underline{F} = (0,0,0)$. Cioè $\underline{F}$ è irrotazionale. Però, detta $\gamma : \begin{cases} -1+\cos\theta \\ 1+\sin\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

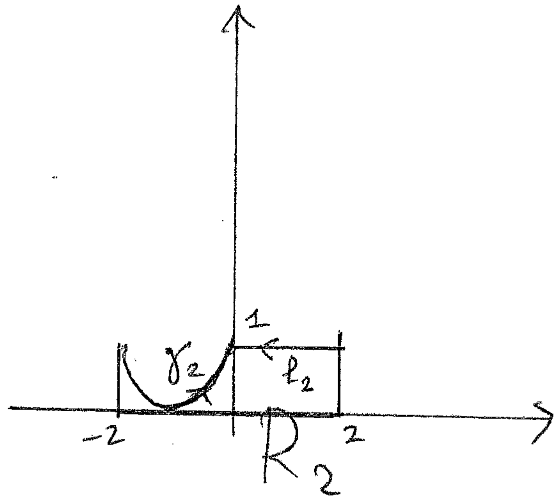
la curva circolare di raggio 1 e centro $(-1,1)$, si ha

$$\oint_\gamma \langle \bar{F}, \gamma'(\theta) \rangle \, d\theta = \int_0^{2\pi} (+\sin^2\theta + \cos^2\theta) \, d\theta = +2\pi \neq 0.$$

Dunque $\underline{F}$ non è conservativo.

(iii) Applichiamo le formule di Gauss-Green ai 2 domini entrambi contenuti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1)\}$ nei quali $\underline{F}$ è irrotazionale





Pertanto si ha

$$\oint_{\partial R_1^+} F_1\,dx + F_2\,dy = 0 \qquad \oint_{\partial R_2^+} F_1\,dx + F_2\,dy = 0$$

Ma, per il punto (ii)

$$\int_{\gamma_1} F_1\,dx + F_2\,dy = +\pi = \int_{\gamma_2} F_1\,dx + F_2\,dy$$

e d'altra parte

$$0 = \Big(\oint_{\partial R_1^+} + \oint_{\partial R_2^+}\Big) F_1\,dx + F_2\,dy = \oint_{\partial R^+} F_1\,dx + F_2\,dy +$$

$$-\Big(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\Big) F_1\,dx + F_2\,dy + \Big(\int_{\ell_1} + \int_{\ell_2}\Big) F_1\,dx + F_2\,dy =$$

$$= \oint_{\partial R^+} F_1\,dx + F_2\,dy - \oint_{\gamma} F_1\,dx + F_2\,dy =$$

$$= \oint_{\partial R^+} F_1\,dx + F_2\,dy - 2\pi$$

da cui

$$\iint_{\partial R^+} F_1\,dx + F_2\,dy = +2\pi$$

2.

(i) In questo caso la sostituzione da fare è ancora

$$x+y=u \qquad x-y=v$$

ma adesso è $1 \le u \le 2$, $|v| \le 1$,

cioè $\psi(Q) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le u \le 2,\ |v| \le 1\}$.

Si ha ancora $\det J\psi^{-1} = 1/2$ e pertanto

$$\Phi(0,0) = \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right) du\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \frac{(u^2+v^2)}{2}\, du\, dv = 4/3$$

poiché l'integrando è simmetrico in u e v.

(ii) Con lo stesso cambiamento di variabili si ottiene

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{2}\iint_{\psi(Q)} \left(\left(\frac{u+v}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2} - b\right)^2\right) du\, dv = 4/3 +$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2+b^2)\int_{-1}^{1} dv \int_{1}^{2} du + \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} v\, dv \int_{1}^{2} du +$$

$$- \frac{(a+b)}{2}\int_{-1}^{1} dv \int_{1}^{2} u\, du = 4/3 - \frac{3}{2}(a+b) + a^2 + b^2.$$

Si ha ancora

$$\lim_{\|(u,v)\| \to +\infty} \Phi(a,b) = +\infty, \quad \nabla\Phi(a,b) = 0 \text{ in}$$

un unico punto $(a,b) = (3/4, 3/4)$ che è pertanto di minimo assoluto. $\left(H\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$.

3.

(i) $\underline{F}$ è definito $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$(1-x)^2+(1+y)^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (1,-1)$. e

$\mathbb{R}^2 - \{(1,-1)\}$ non è semplicemente connesso.

(ii) Si ha ancora

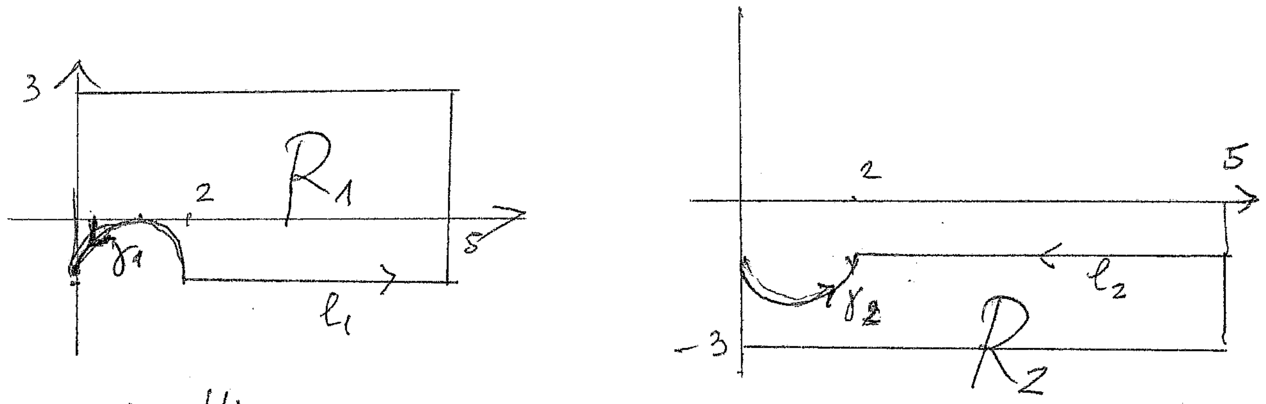
$$D_1 F_2 = \frac{(1-x)^2-(1+y)^2}{\left[(1-x)^2+(1+y)^2\right]^2} = D_2 F_1$$

cioè $\operatorname{rot} \underline{F} = (0,0,0)$. Per mostrare che $\overline{F}$ non è conservativo, si sceglie adesso

$$\gamma = \begin{cases} 1+\cos\theta \\ -1+\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\int_\gamma \langle \overline{F}, \gamma' \rangle \, d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = -2\pi \neq 0$$

(iii) Si ragiona come nel caso precedente, ma riferendosi ai 2 domini semplici



e si ottiene

$$\oint_{\partial R^+} F_1\,dx + F_2\,dy - \oint_{\gamma} F_1\,dx + F_2\,dy = 0$$

da cui

$$\oint_{\partial R^+} F_1\,dx + F_2\,dy = -2\pi$$