

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II

13 settembre 2014

1. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = xe^{-2x^2-y^2}$

(i) Calcolare

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y)$$

(ii) Determinare  $\sup f(x, y)$  e  $\inf f(x, y)$ .

(iii) Trovare massimi e minimi di  $f$  sull'insieme  
 $B := \{(x, y) : x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$ .

2. Sia  $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x - y \leq 2, -1 \leq x + y \leq 1\}$  e

$$\Phi(a, b) := \iint_Q (x - a)^2 + (y - b)^2 dx dy, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(i) Calcolare  $\Phi(0, 0)$ .

(ii) Dire se la funzione  $\Phi$  ammette punti di minimo, e nel caso calcolarli.

3. Si consideri il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{1 - y}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}, \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \right).$$

(i) Determinare il dominio di  $\mathbf{F}$  e dire se è semplicemente connesso.

(ii) Il campo  $\mathbf{F}$  è irrotazionale? È conservativo?

(iii) Calcolare la circuitazione di  $\mathbf{F}$  lungo il bordo dell'insieme

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 7\}$$

percorso in senso antiorario.

In questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate. Risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide. È consentito l'utilizzo di libri, appunti e calcolatrice (non grafica). Qualunque altra apparecchiatura elettronica va lasciata spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma è considerata *tentativo di frode* e comporta automaticamente l'annullamento della prova

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II

13 settembre 2014

1. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = 3ye^{-x^2-2y^2}$

(i) Calcolare

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y)$$

(ii) Determinare  $\sup f(x, y)$  e  $\inf f(x, y)$ .

(iii) Trovare massimi e minimi di  $f$  sull'insieme  
 $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$ .

2. Sia  $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 2, -1 \leq x - y \leq 1\}$  e

$$\Phi(a, b) := \iint_Q (x - a)^2 + (y - b)^2 dx dy, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(i) Calcolare  $\Phi(0, 0)$ .

(ii) Dire se la funzione  $\Phi$  ammette punti di minimo, e nel caso calcolarli.

3. Si consideri il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{1 + y}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}, \frac{1 - x}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \right).$$

(i) Determinare il dominio di  $\mathbf{F}$  e dire se è semplicemente connesso.

(ii) Il campo  $\mathbf{F}$  è irrotazionale? È conservativo?

(iii) Calcolare la circuitazione di  $\mathbf{F}$  lungo il bordo dell'insieme

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3\}$$

percorso in senso antiorario.

In questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate. Risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide. È consentito l'utilizzo di libri, appunti e calcolatrice (non grafica). Qualunque altra apparecchiatura elettronica va lasciata spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma è considerata *tentativo di frode* e comporta automaticamente l'annullamento della prova