Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI
7 ottobre 2014

Esercizi sul principio d'induzione.

1. Dimostrare le mseguenti uguaglianze:

   (i) $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (ii) $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

   (iii) $1! + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$

2. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $2^n > n$.

3. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ x_{n+1} & = & 2x_n + 1 \end{cases}$$

   Dimostrare che allora $x_n = 2^{n+1} - 1$.

4. * Siano a, b, c valori fissati, $f(x) = ax + b$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_0 & = & c \\ x_{n+1} & = & f(x_n) \end{cases}$$

   Trovare un'espressione che espliciti x_n in funzione di n e dimostrarne la validità per induzione.

5. Sia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_{n+1} & = & F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

   Dimostrare (per induzione) che

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\lambda_+)^n - (\lambda_-)^n\right],$$

   dove $\lambda_\pm := \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sono le due radici dell'equazione $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

6. Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di R tali che per ogni $a \in A$ e $b \in B$ si ha che $a \leq b$. Allora $\sup A \leq \inf B$.

7. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente da
$$\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$
Mostrare che a_n è crescente e calcolare $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

8. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da
$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{3}}.$$
Calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo.

Esercizi su calcolo combinatorio e coefficienti binomiali.

1. Sia X un insieme di n elementi. Quante sono le funzioni iniettive $f : X \to X$?

2. Sia X un insieme di n elementi ed Y un insieme di m elementi. Quante sono le funzioni iniettive $f : X \to Y$?

3. Sia $X_n := \{k \in \mathbb{N} \ 1 \leq k \leq n\}$. Quante sono le funzioni $f : X_m \to X_n$ strettamente crescenti?

4. * Sia X un insieme con n elementi. Dire quante sono le coppie di sottonisiemi $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ tali che $A \subset B$.

5. Dimostrare che valgono le seguenti formule

   (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

   (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0.$

   (iii*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$

6. * Sia $a_n = \binom{2n}{n} 4^{-n}$. Mostrare che a_n è una succesione decrescente. Calcolare
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$