Esercizio 1

La funzione non è derivabile (rispetto ad x) nei punti del cerchio che stanno sul segmento verticale x = 1.

Questa restrizione vale g (y) = $y^2 - 1$, che ha massimo 2 assunto nei punti (1 , $\pm\sqrt{3}$) , minimo -1 assunto nel punto (1 , 0).

Cerchiamo i punti stazionari interni: gradf = (9 sgn (x – 1) – 2 x , 2 y) è nullo nei punti ($\pm$ 9/2 , 0) che non sono interni al dominio.

Studio sulla frontiera con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$L = y^2 + 9 \mid x - 1 \mid - x^2 + \lambda (x^2 + y^2 - 4)$

$9 \operatorname{sgn} (x - 1) - 2 x + 2 \lambda x = 0$, $2 y (1 + \lambda) = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.

Dalla seconda equazione si deduce y = 0 oppure λ = -1.

Per y = 0 si ottengo i punti (2 , 0) su cui la funzione vale 5 e (- 2 , 0) su cui vale 23.

Per λ = -1 la prima equazione diventa 9 sgn (x – 1) – 4 x = 0; le soluzioni x = ± 9/4 non forniscono punti della frontiera (e nemmeno del dominio).

In conclusione , il massimo vale 23 ed è assunto in (-2 , 0) , il minimo -1 assunto in (1 , 0).

Esercizio 2

Teorema della divergenza $\int\int\int_V \operatorname{div}F \ dx\, dy\, dz = \int_S F \cdot N \, dS$

divF = 4 x

Il primo membro dell'uguaglianza diventa:

$$\int_{x^2+y^2 \le 1} 4\, x\, dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \int_{x^2+y^2 \le 1} \left(4\, x - 4\, x\, (x^2 + y^2)\right) dx\, dy$$

L'integrale è nullo perché si ha una funzione dispari in x e un dominio simmetrico in particolare rispetto all'asse y.

Per il secondo membro dobbiamo calcolare il flusso uscente dal parabolide e dal cerchio di base.

Sul parabolide : $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

Parametrizzazione : x = r cosϑ , y = r senϑ , z = r^2 (con 0 ≤ r ≤ 1 , 0 ≤ ϑ ≤ 2 π)

Vettore fondamentale : (- 2 r^2 cos ϑ , - 2 r^2 sen ϑ , r) (è diretto verso l'interno; dobbiamo cambiare di segno all'integrale di flusso)

Campo : F = ($r^2 \cos^2 \vartheta$, r^2 sen ϑ cos ϑ , r^3 cos ϑ)

Integrale di flusso :

$$\int_0^1 2\,r^4\,dr \int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta\,d\vartheta + \int_0^1 2\,r^4\,dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\vartheta\,\cos\vartheta\,d\vartheta - \int_0^1 r^2\,dr \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta$$

E' nullo perché nulli sono gli integrali rispetto a ϑ.

Sul cerchio : $z = 1$, $x^2 + y^2 \le 1$.

Parametrizzazione : $x = r\cos\vartheta$, $y = r\,\mathrm{sen}\vartheta$, $z = 1$ (con $0 \le r \le 1$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$)

Vettore fondamentale : (0 , 0 , r) (è diretto correttamente verso l'esterno)

Campo : $F = (r^2 \cos^2\vartheta , r^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta , r\cos\vartheta)$

Integrale di flusso : $\int_0^1 r^2\,dr \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta = 0$

Teorema di Stokes : $\int_S \mathrm{rot}F \cdot N\,dS = \oint_{\gamma^+} F \cdot T\,ds$

Sul parabolide : $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

Parametrizzazione : $x = r\cos\vartheta$, $y = r\,\mathrm{sen}\vartheta$, $z = r^2$ (con $0 \le r \le 1$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$)

Vettore fondamentale : $(-2r^2\cos\vartheta , -2r^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta , r)$ (è diretto verso l'interno; dobbiamo cambiare di segno all'integrale di flusso)

Campo : $\mathrm{rot}F = (0 , -z , y) = (0 , r^2 , r\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$

Integrale di flusso : $\int_0^1 2\,r^4\,dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\vartheta\,d\vartheta - \int_0^1 r^2\,dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\vartheta\,d\vartheta = 0$

Sul bordo :

Parametrizzazione : $x = \cos\vartheta$, $y = \mathrm{sen}\vartheta$, $z = 1$ (con $0 \le \vartheta \le 2\pi$) orientamento non corretto

Vettore derivata : (- senϑ , cosϑ , 0)

Campo : $F = (\cos^2\vartheta , \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta , \cos\vartheta)$

Circuitazione : $-\int_0^{2\pi} (-\mathrm{sen}\vartheta\cos^2\vartheta + \mathrm{sen}\vartheta\cos^2\vartheta)\,d\vartheta = 0$.

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
4 giugno 2019
Esame di analisi II; quesiti di probabilità

Esercizio 3 Siano X ed Y due variabili aleatorie **indipendenti**. tali che $E[X] = 2$, $Var(X) = 1$ e $E[Y] = 1$, $Var(Y) = 2$ e si definisca la variabile aleatoria $U := X - 2Y$. Calcolare $E[U]$ e $Var(U)$. Assumendo che X ed Y seguano entrambe una legge normale, calcolare $P(|U| > 15/4)$.

Per le proprietà del valore atteso si ha $E[U] = E[X - 2Y] = E[X] - 2E[Y] = 0$. Inoltre dato che X e Y sono indipendenti, si ha

$$Var(X - 2Y) = Var(X) + Var(-2Y) = Var(X) + 4Var(Y) = 9.$$

Se inoltre si sa che X ed Y sono normali, segue che anche U è distribuita secondo una legge normale di media 0 e varianza 9: $U \sim \mathcal{N}(0, 9)$. Equivalentemente $U = 3Z$ con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, quindi

$$P(|U| > 15/4) = P(|3Z| > 15/4) = P(|Z| > 5/4) = 2(1 - \Phi(5/4)) \approxeq 0.106.$$

Il valore numerico finale è calcolato utilizzando le tavole della legge standard.

Esercizio 4 Due amici lanciano a turno un dado, e vince chi per primo realizza un sei.

(i) Calcolare la probabilità che una partita consti di almeno 5 lanci

(ii) Calcolare la probabilità di vittoria del giocatore che lancia per primo

(iii) Per rendere il gioco più coinvolgente, prima di ogni lancio entrambi i giocatori aggiungono una moneta di 1euro su un piattino, e chi vince la partita si intasca le puntate accumulate. Determinare il valore atteso del guadagno del giocatore che lancia per primo.

Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci di cui consta una partita, $p = 1/6$ la probabilità di uscita di un 6 in un singolo lancio.

[i] La condizione $X \geq 5$ si verifica se e solo se nei primi 4 lanci non esce mai un 6, quindi

$$P(X \geq 5) = (1-p)^4 = (\frac{5}{6})^4 \approxeq 0.48$$

[ii] Se definiamo l'evento $A :=$"vittoria del primo giocatore", si avrà

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{2k} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{6}{11}.$$

[iii] Il guadagno U del primo giocatore è la differenza tra la somma che si intasca e quella che ha puntato nel frattempo: perde tutto ciò che ha puntato se la partita si consta di un numero pari di lanci, mentre se la partita consta di un numero dispari di lanci, oltre a riprendersi le proprie puntate si intasca tutte quelle del secondo giocatore. Il guadagno netto quindi sarà $U = k(-1)^{k-1}$ se $X = k$, ed il valore atteso di tale funzione di guadagno è

$$\begin{aligned} E[U] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(-1)^{k-1} P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(-1)^{k-1} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(p-1)^{k-1} = \frac{p}{(1-(p-1))^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'identità $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. In definitiva otteniamo $E[U] = 6/121 \approxeq 0.05$: il primo giocatore è leggermente favorito, ma il valore atteso del suo guadagno (al netto delle puntate) è di 5 cent a partita.