Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Gennaio 2019 – **Esercizi di recapitolazione.**

1. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono puntualmente ed uniformemente. Nel caso non ci sia convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$, si dica se esistono intervalli su cui c'è convergnza uniforme.

$$f_n(x) = \frac{x}{|x| + \frac{1}{n}}, \qquad g_n(x) = \frac{x^2}{|x| + \frac{1}{n}},$$

$$h_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n^2} \qquad k_n(x) = n^6 \sin(x) e^{-nx}$$

2. Determinare il limite puntuale delle successioni di funzioni sull'insieme specificato a lato

$$f_n(x) = \sqrt[n]{sin(x)} \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$g_n(x) = \frac{nx}{(x^2+1)(1+nx)} \qquad x > 0$$

Dire se la convergenza è anche uniforme.

3. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} xe^{-(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 \in [n, n+1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il limite puntuale e dire se la convergenza è anche uniforme.

4. Posto $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{n}}$, si calcoli

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

5. Determinare l'insieme di convergenza puntuale per le seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+x}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k! x^{(k^2)}$$

6. Si dica se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ converge uniformemente. Detta F la somma di tale serie, si dica se F è di classe C^1.

7. Si determini la serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche f, g tali che

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ per } -\pi \leq x \leq \pi \\ g(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ per } -\pi < x \leq \pi \end{aligned}$$

8. Mostrare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2}$ converge uniformemente su $[0, +\infty]$. Dire se la somma della serie è una funzione derivabile.

9. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^{k+2} \qquad\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$$

   Calcolare poi esplicitamente la somma delle serie suddette.

10. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t^2+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   Mostrare la soluzione è unica, ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

11. Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare $\dot{Y} = AY + B(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

12. Data $A(x) = \begin{pmatrix} -2x & \cos(x) \\ \sin(x) & x \end{pmatrix}$ determinare (ed integrare) l'equazione soddisfatta dal determinante wronskiano del sistema lineare $\dot{Y} = A(x)Y$.

13. Mostrare che $(u_0, v_0) := (0, 0)$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il campo $F(u, v) = (\sin(uv) - 2u\cos(v) + v, u - v\cos(u))$.