Una delle possibili successioni di numeri razionali che approssima il numero $\sqrt{K}$, che potrebbe essere irrazionale come nel caso $K = 2, 3, 5, 6, \dots$

Scelto un numero naturale K (che non sia un quadrato), ad esempio $K = 2, 3, 5, 6, \dots$, cerchiamo una successione (una sequenza) $s_0, s_1, s_2, \dots$ di numeri razionali che, a patto di scegliere l'indice n abbastanza grande, permetta di approssimare con il termine s_n la quantità $\sqrt{K}$ con precisione arbitraria.

Osserviamo che $\sqrt{K} = 1 + \dfrac{K-1}{1+\sqrt{K}}$ e definiamo

$$\begin{cases} s_0 = \text{parte intera di } \sqrt{K} \\ s_{n+1} = 1 + \dfrac{K-1}{1+s_n} \end{cases}$$

Ad esempio, se $K = 5$, abbiamo $2 < \sqrt{K} < 3$ e quindi $s_0 = 2$. Poi troviamo $s_1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$,

$$s_2 = 1 + \frac{4}{\frac{10}{3}} = 1 + \frac{12}{10} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \quad \text{ecc...}$$

Per mostrare che la successione si avvicina con precisione arbitraria a $\sqrt{K}$, procediamo per passi:

1) Un semplice calcolo mostra che

$$s_{n+1} - \sqrt{k} = \frac{(s_n - \sqrt{k})(1-\sqrt{k})}{1+s_n}$$

2) Definiamo l'errore $\varepsilon_n = |s_n - \sqrt{k}|$ e dall'uguaglianza precedente troviamo

$$\varepsilon_{n+1} = |s_{n+1} - \sqrt{k}| = |s_n - \sqrt{k}| \left(\frac{\sqrt{k}-1}{1+s_n}\right) = \varepsilon_n \left(\frac{\sqrt{k}-1}{1+s_n}\right).$$

3) Mostriamo che per ogni indice n si ha $|s_n - \sqrt{k}| < 1$; procediamo per "induzione":

- se $n = 0$, la definizione di s_0 come parte intera di $\sqrt{k}$ ci permette di concludere che $|s_0 - \sqrt{k}| < 1$
- supponendo che sia $|s_n - \sqrt{k}| < 1$, mostriamo che si ha $|s_{n+1} - \sqrt{k}| < 1$.

  Se $|s_n - \sqrt{k}| < 1$, allora $s_n - \sqrt{k} \nleq -1$, allora $s_n - \sqrt{k} > -1$, allora $s_n + 1 > s_n > \sqrt{k} - 1$, allora $\frac{\sqrt{k}-1}{s_n+1} < 1$, allora dal punto 2) troviamo

$$|s_{n+1} - \sqrt{k}| = |s_n - \sqrt{k}| \left(\frac{\sqrt{k}-1}{1+s_n}\right) < |s_n - \sqrt{k}| < 1$$

- Quindi la proprietà $|s_n - \sqrt{k}| < 1$ è vera per $n = 0$ e, se è vera per n, è vera anche per l'indice successivo $n+1$.

Ne segue $|s_n - \sqrt{k}| < 1$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$, come volevamo

4) Dal punto 3) si deduce che $\sqrt{K} < 1 + s_n$ per ogni n: infatti, se fosse $\sqrt{K} \geq 1 + s_n$, avremmo $s_n - \sqrt{K} \leq -1$ e quindi $|s_n - \sqrt{K}| \geq 1$

5) Dal punto precedente troviamo $\frac{\sqrt{K}-1}{1+s_n} < \frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}$, per cui, ritornando alla relazione tra ε_{n+1} e ε_n viste in 2), troviamo

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(\frac{\sqrt{K}-1}{1+s_n}\right) < \varepsilon_n \left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}\right)$$

6) Iterando la disuguaglianza precedente, si ha

$$\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n \left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}\right) < \varepsilon_{n-1} \left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}\right)^2$$
$$< \varepsilon_{n-2} \left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}\right)^3 < \dots < \varepsilon_0 \left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}\right)^{n+1}$$

cioè, l'errore ε_n che commetto approssimando $\sqrt{K}$ con il termine n-esimo della successione s_n è tale che

$$0 < \varepsilon_n < \varepsilon_0 \left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}}\right)^n.$$

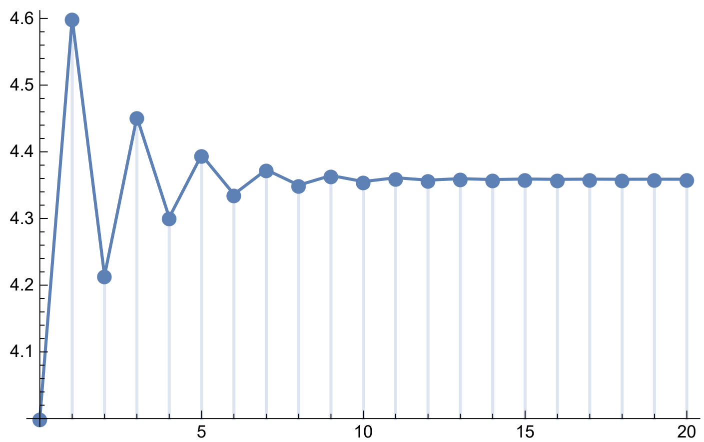
Siccome $\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}} < 1$, tale errore può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo l'indice n sufficientemente grande: che è quello che volevamo.

```
(* Implemento la successione sₙ per approssimare sqrt[k] *)

In[1]:= s[k_, n_] := s[k, n] = If[n == 0, Floor[Sqrt[k]], 1 + (k - 1) / (1 + s[k, n - 1])]

(* Questi sono i primi termini della successione per k = 19 *)

In[17]:= Table[s[19, n], {n, 0, 10}]
```

Out[17]= $\left\{4, \frac{23}{5}, \frac{59}{14}, \frac{325}{73}, \frac{856}{199}, \frac{4637}{1055}, \frac{12\,341}{2846}, \frac{66\,415}{15\,187}, \frac{177\,484}{40\,801}, \frac{952\,703}{218\,285}, \frac{2\,550\,059}{585\,494}\right\}$

```
(* Grafico dei punti della successione sₙ per k = 19 e n ≤ 20 *)

In[36]:= Show[DiscretePlot[{s[19, n]}, {n, 0, 20}, PlotRange → All, Joined → True, Filling → False],
  DiscretePlot[{s[19, n]}, {n, 0, 20}, PlotRange → All, PlotMarkers → {Automatic, 12}],
  ImageSize → Medium]
```

Out[36]=



```
(* Gli errori ϵn *)

In[11]:= eps[k_, n_] := Abs[s[k, n] - Sqrt[k]]

(* Grafico dei punti della successione di errori ϵn per k =
 19 e n ≤ 20 "schiacciati" verso 0 dalla successione di punti ((sqrt[k]-1)/sqrt[k])^n *)

In[37]:= Show[DiscretePlot[{eps[19, n], eps[19, 0] ((Sqrt[19] - 1) / Sqrt[19])^n},
   {n, 0, 20}, PlotRange → All, Joined → True, Filling → False],
  DiscretePlot[{eps[19, n], eps[19, 0] ((Sqrt[19] - 1) / Sqrt[19])^n}, {n, 0, 20},
   PlotRange → All, PlotMarkers → {Automatic, 12}], ImageSize → Medium]
```

Out[37]=