Esercizi di Geometria I - Gruppo 6

Michele Grassi

Dicembre 2000

Esercizio 1

1) Sia $A \in \mathbf{M}_{4,4}(k)$, con k un campo. Si dimostri che se l'applicazione associata alla matrice A^2 (rispetto a delle basi fissate qualsiasi) non e' iniettiva, allora anche l'applicazione associata alla matrice A (rispetto alle stesse basi) non e' iniettiva.
2) Si generalizzi il punto precedente dimostrando che, nelle stesse ipotesi, l'applicazione associata ad A^k e' iniettiva se e solo se lo e' quella associata ad A^h, per h, k interi positivi qualsiasi.

Esercizio 2

1) Sia V uno spazio vettoriale reale, e sia $(\ ,\ )_V$ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare iniettiva. Dimostrare che esiste un prodotto scalare definito positivo $(\ ,\ )_W$ su W tale che f e' una isometria da $V, (\ ,\ )_V$ a $W, (\ ,\ )_W$.
2) Quali condizioni bisogna mettere su f perche' il prodotto scalare su W sia unico?

Esercizio 3

1) Sia $V = \mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Sia $W \subset V$ il sottospazio vettoriale generato da $(1, 2, 3, 4)$ e $(1, 1, 2, 2)$. Si definisca una applicazione lineare f da W a $\mathbf{R}^2$ che sia una isometria una volta che su W si prende il prodotto scalare indotto da quello di $\mathbf{R}^4$, e su $\mathbf{R}^2$ si prende il prodotto scalare standard.
2) Si puo' fare in modo che $f((1, 2, 3, 4))$ sia un multiplo di $(1, 0)$?