Richiami di Algebra lineare

Docente: Cecilia Magherini

1 Sistemi lineari

Un sistema lineare costituito da m equazioni in n incognite è dato da

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Le quantità a_{ij}, per $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, sono i coefficienti del sistema mentre i numeri b_i, per $i = 1, 2, \ldots, m$, sono i termini noti. Infine, le variabili x_j, con $j = 1, 2, \ldots, n$, sono le incognite del sistema. I coefficienti ed i termini noti sono assegnati e risolvere il sistema significa determinare i valori delle incognite tali per cui tutte le m equazioni del sistema sono verificate.
Il sistema lineare (1) può essere riscritto in forma matriciale come segue

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

dove

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

è la matrice dei coefficienti, mentre

$$\mathbf{b} = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{x} = (x_j) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

sono il vettore dei termini noti ed il vettore delle incognite, rispettivamente.
Il prodotto matrice-vettore $A\mathbf{x}$ è infatti così definito

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

Un modo alternativo, ma equivalente, per interpretare il prodotto matrice-vettore $A\mathbf{x}$ è il seguente

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n.$$

Pertanto, indicando con $\mathbf{a}_j$ la j-ma colonna di A ossia

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

si ha che $A\mathbf{x}$ è la combinazione lineare di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ con coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rispettivamente.
Dalle precedenti considerazioni discende che il sistema (2) ammette soluzione se e solo se

$$\mathbf{b} \in \text{range}(A) \equiv \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle \equiv \text{span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Dalla definizione stessa di range(A), anche detto immagine di A, si deduce che

$$\text{rango}(A) \equiv \dim\,(\text{range}(A)) \leq m.$$

In realtà, è possibile dimostrare che

$$\text{rango}(A) \leq \min(m, n).$$

Per quanto concerne l'unicità della soluzione di (2), si dimostra che se esiste allora è unica se e solo se

$$\ker(A) \equiv \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } A\mathbf{z} = \mathbf{0}_m\} = \{\mathbf{0}_n\}$$

dove $\mathbf{0}_m$ e $\mathbf{0}_n$ sono i vettori con tutte componenti uguali a zero in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, rispettivamente. Non è difficile verificare che Ker(A) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e pertanto $\dim(\ker(A)) \leq n$. Vale inoltre il seguente risultato.

Teorema 1.1 *Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si ha rango(A) + dim(ker(A)) $= n$.*

Definizione 1.2 *Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta non singolare se rango$(A) = n$ ovvero se dim(ker$(A)) = 0$.*

È importante sottolineare che la definizione di non singolarità vale soltanto per matrici quadrate.

Dalle precedenti considerazioni discende che se la matrice dei coefficienti A del sistema lineare (2) è quadrata (ovvero se il numero di equazioni del sistema coincide con il numero di incognite) allora per ogni vettore dei termini noti $\mathbf{b}$, la soluzione di (2) esiste ed è unica se e soltanto se A è non singolare.

2 Operazioni su matrici

Definizione 2.1 *La trasposta di una matrice $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è la matrice $F^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ che si ottiene da F scambiando le sue righe e le sue colonne, ovvero*

$$F^T = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Definizione 2.2 *Il prodotto αF di uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ ed una matrice $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è la matrice $\alpha F = (\alpha f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

Definizione 2.3 *La somma di due matrici $F = (f_{ij}), G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è la matrice $F + G = (f_{ij} + g_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

Definizione 2.4 *Il prodotto (righe per colonne) tra una matrice $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ed una matrice $G = (g_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ è la matrice $H = F\cdot G = (h_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ i cui elementi sono dati da*

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} g_{jk}, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \quad k = 1, 2, \ldots r.$$

Il prodotto righe per colonne tra due matrici può anche essere interpretato nei seguenti due modi:

- siano $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $G = (g_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, r$, sia $\mathbf{g}_k = (g_{1k}\ g_{2k}\ \cdots\ g_{nk})^T$ la k-ma colonna di G. Allora, la k-ma colonna della matrice $F\cdot G$ è data da $F\mathbf{g}_k$, ovvero

$$F\cdot G = F\cdot(\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \cdots\ \mathbf{g}_r) = (F\mathbf{g}_1\ F\mathbf{g}_2\ \cdots\ F\mathbf{g}_r)$$

- analogamente, indicando con $\mathbf{f}_i^T = (f_{i1}\ f_{i2}\ \cdots\ f_{in})$ la i-ma riga di F, per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$, risulta

$$F\cdot G = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m^T \end{pmatrix} \cdot G = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T G \\ \mathbf{f}_2^T G \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m^T G \end{pmatrix}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. se $F \in \mathbb{R}^{m\times n}, G \in \mathbb{R}^{n\times k}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $(\alpha F)\cdot G = F\cdot(\alpha G)$;
2. se $F \in \mathbb{R}^{m\times n}, G \in \mathbb{R}^{n\times k}$ e $H \in \mathbb{R}^{k\times l}$ allora
$$(F\cdot G)\cdot H = F\cdot(G\cdot H) \qquad \text{(proprietà associativa);}$$
3. se $F, G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n\times k}$ allora
$$(F + G)\cdot H = F\cdot H + G\cdot H \quad \text{(proprietà distributiva destra);}$$

4. se $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $G, H \in \mathbb{R}^{n\times k}$ allora

$$F \cdot (G + H) = F \cdot G + F \cdot H \quad \text{(proprietà distributiva sinistra);}$$

5. se $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times k}$ allora

$$(F \cdot G)^T = G^T \cdot F^T.$$

È importante sottolineare che il prodotto righe per colonne <u>non soddisfa la proprietà commutativa</u> ovvero, in generale.

$$F \cdot G \neq G \cdot F.$$

Ad esempio, si verifichi che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il seguente è un importante risultato.

Teorema 2.5 *Se $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$ è non singolare allora esiste ed è unica la <u>matrice inversa</u> di F, indicata con F^{-1}, tale che*

$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La matrice I nella precedente equazione è detta <u>matrice identità</u> di ordine m.

Si dimostra che se $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$ è non singolare e $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ allora

$$\text{rango}(F \cdot G) = \text{rango}(G).$$

In particolare, se $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e G è non singolare, dal precedente risultato si ricava che $F \cdot G$ è a sua volta non singolare. Inoltre, non è difficile verificare che

$$(F \cdot G)^{-1} = G^{-1} \cdot F^{-1}.$$

3 Matrici quadrate con particolari strutture

Una matrice <u>quadrata</u> $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ è detta

1. <u>simmetrica</u> se $F^T = F$;

2. <u>diagonale</u> se $f_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, ovvero

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & & & \\ & f_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{mm} \end{pmatrix};$$

3. triangolare inferiore se $f_{ij} = 0$ per ogni $i < j$ ovvero

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & & & \\ f_{21} & f_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix};$$

4. triangolare superiore se $f_{ij} = 0$ per ogni $i > j$ ovvero

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f_{mm} \end{pmatrix};$$

5. ortogonale se $F^{-1} = F^T$. Chiaramente affinchè una matrice sia ortogonale occorre che sia non singolare;

Non è difficile verificare che il risultato del prodotto righe per colonne tra due matrici diagonali, triangolari inferiori o superiori è una matrice diagonale, triangolare inferiore o superiore, rispettivamente.
Un risultato analogo vale per le matrici inverse, ovvero l'inversa di una matrice diagonale, triangolare inferiore o superiore è a sua volta diagonale, triangolare inferiore o superiore, rispettivamente.

4 Determinante

Il determinante di una matrice quadrata $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere calcolato per ricorrenza nel seguente modo

$$\det(F) = \begin{cases} f_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} f_{i1} \det(F_{i1}) & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{4}$$

dove, in generale, F_{ij} è la matrice di dimensione $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da F eliminando la sua i-ma riga e la sua j-ma colonna.
Si dimostra che, per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\det(F) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} f_{kj} \det(F_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} f_{ik} \det(F_{ik}).$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\det(F \cdot G) = \det(F) \det(G)$;
2. $\det(F^T) = \det(F)$;
3. $\det(\alpha F) = \alpha^n \det(F)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. se F è una matrice triangolare inferiore o superiore allora $\det(F)$ è uguale al prodotto dei suoi elementi diagonali ossia

$$\det(F) = \prod_{i=1}^{n} f_{ii};$$

5. F è non singolare se e soltanto se $\det(F) \neq 0$.

È opportuno sottolineare che il determinante è definito soltanto per matrici quadrate.

5 Autovalori

Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice quadrata. Un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di F, se esiste un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, detto autovettore, tale che

$$F\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

La precedente uguaglianza può essere riscritta nel seguente modo

$$(F - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \tag{5}$$

dove I è la matrice identità di ordine n. Da tale riscrittura si evince che λ è autovalore se e soltanto se la matrice $F - \lambda I$ è singolare poichè il sistema lineare (5) deve ammettere più di una soluzione. Infatti, indipendentemente dal valore di λ, il sistema (5) ammette certamente come soluzione il vettore nullo. Nel caso in cui λ sia autovalore allora, oltre al vettore nullo, il sistema deve ammettere un'altra soluzione. Detto

$$p(\lambda) \equiv \det(F - \lambda I)$$

il polinomio caratteristico di F, si ha che gli autovalori di F sono gli zeri di $p(\lambda)$, ovvero

$$\lambda \text{ è autovalore di } F \qquad \Leftrightarrow \qquad p(\lambda) = 0.$$

È opportuno osservare che se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ è un autovettore corrispondente ad un autovalore λ allora anche $\alpha\mathbf{x}$ è un autovettore corrispondente allo stesso autovalore per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Inoltre, per una matrice F di ordine n si ha che $p(\lambda)$ è un polinomio di grado esatto n e, pertanto, F ha esattamente n autovalori (eventualmente non tutti distinti).
Lo spettro di una matrice F è l'insieme dei suoi autovalori, ovvero

$$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ è autovalore di } F\}\,.$$

Il raggio spettrale di F è il massimo modulo dei suoi autovalori, ossia

$$\rho(F) = \max_{\lambda\in\sigma(F)} |\lambda|.$$

È evidente che $\rho(F) \geq 0$.

Valgono le seguenti proprietà:

- Se $F^T = F$ allora $\sigma(F) \subset \mathbb{R}$;
- $\det(F) = \prod_{\lambda\in\sigma(F)} \lambda$;
- F è singolare se e soltanto se $0 \in \sigma(F)$.

6 Matrici a blocchi

Una matrice a blocchi, o partizionata a blocchi, è una matrice i cui elementi sono a loro volta matrici. In notazione matematica, una matrice $m \times n$ a blocchi è data da

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \cdots & F_{mn} \end{pmatrix}$$

dove F_{ij}, detto blocco, è una matrice per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. Chiaramente le dimensioni dei blocchi devono essere compatibili. Ad esempio, i blocchi $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{1n}$ devono avere lo stesso numero di righe, così come i blocchi $F_{11}, F_{21}, \ldots, F_{m1}$ devono avere lo stesso numero di colonne. Un esempio di matrice 2×2 a blocchi è il seguente:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} F_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad F_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \\ F_{21} &= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 16 & 17 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}, \qquad F_{22} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 \\ 18 & 19 & 20 \\ 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Riscrivendo F elemento per elemento si ha

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right).$$

Se le dimensioni dei blocchi sono compatibili allora il prodotto righe per colonne tra due matrici partizionate a blocchi può essere calcolato trattando i blocchi come se fossero dei numeri. Ad esempio, se

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

con $F_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_j}$, $G_{jk} \in \mathbb{R}^{m_j \times r_k}$, per $i, j, k = 1, 2$, allora

$$\begin{aligned} F \cdot G &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{11} \cdot G_{11} + F_{12} \cdot G_{21} & F_{11} \cdot G_{12} + F_{12} \cdot G_{22} \\ F_{21} \cdot G_{11} + F_{22} \cdot G_{21} & F_{21} \cdot G_{12} + F_{22} \cdot G_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si osservi che $F_{11} \cdot G_{11}$ e $F_{12} \cdot G_{21}$ sono entrambe matrici di dimensione $n_1 \times r_1$ e quindi l'operazione $F_{11} \cdot G_{11} + F_{12} \cdot G_{21}$ è ben definita. Una analoga considerazione vale per gli altri blocchi di $F \cdot G$.

Le matrici a blocchi che sono utilizzate più di frequente sono quelle per cui i blocchi diagonali sono matrici quadrate. In particolare, matrici del seguente tipo

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & & & \\ F_{21} & F_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ F_{m1} & F_{m2} & \cdots & F_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & F_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

con blocchi diagonali quadrati, sono dette triangolari inferiori o superiori a blocchi, rispettivamente. Analogamente una matrice diagonale a blocchi è data da

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & & & \\ & F_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

dove F_{ii} è una matrice quadrata per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$.

Si può verificare che per le matrici in (6)-(7) si ha $\det(F) = \prod_{i=1}^{m} \det(F_{ii})$.