Corso di Laurea in Fisica
Geometria I e II – Appello del 9/7/2003

Esercizio 1 (G1, G1+2)
Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (0,2,1)$, $v_2 = (2,0,1)$, $v_3 = (0,0,1)$.
(1) Trovare le equazioni dei tre piani W_1, W_2, W_3 di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine tali che $v_i \in W_j$ per ogni $j \neq i$.
(2) Costruire se esiste, o dimostrare che non esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ surgettiva tale che $f(v_i) \neq 0$ per ogni i e $f_{|W_i}$ sia non iniettiva per $i = 1,2$.
(3) Costruire se esiste, o dimostrare che non esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ surgettiva tale che $f(W_1) = f(W_2) = \mathbb{R}^2$, $f(W_3) =$Span$(1,4)$.

Esercizio 2 (G1)
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Data $f \in$End(V) siano $C_f = \{v \in V|\ f^2(v) = f(v)\}$, $D_f = \{v \in V|\ \exists w \in V : v = f(w) - w\}$. Dimostrare che:
(1) C_f e D_f sono sottospazi di V f-invarianti.
(2) $C_f = V \Rightarrow f$ diagonalizzabile.
(3) $D_f = V \iff f$ non ha l'autovalore 1.
(4) $C_f = \text{Ker} f \oplus \text{Ker}(f - id)$.
(5) $V = C_f \oplus D_f \Rightarrow F$ è invertibile.

Esercizio 3 (G1, G1+2)
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f : V \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare. Definiamo $\varphi_f(v,w) = f(v)f(w)$. Sia $A = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(1) Verificare che φ_f è un prodotto scalare su V.
(2) Mostrare che φ_f ha rango minore o uguale a 1.
(3) Costruire, se esiste, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a φ_f nella base canonica sia A.
(4) Costruire, se esiste, $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tale che la matrice associata a φ_f nella base canonica sia A.

Esercizio 4 (G2)
Sia φ_a il prodotto scalare su $V = \mathbb{R}_2[x]$, definito dalla formula $\varphi_a(p,q) = ap(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$, con $a \in \mathbb{R}$.
(1) Per gli a tali che φ_a è non degenere decomporre V in una somma diretta ortogonale di piani iperbolici e di un sottospazio totalmente anisotropo.
(2) Rappresentare tramite φ il funzionale $F : V \to V$ definito da $F(p) = p'(1)$.

Esercizio 5 (G2, G1+2)
Siano r ed s, (risp. r', s') due rette incidenti di $\mathbb{R}^2$ e siano l e m (risp. l', m') le rette bisettrici degli angoli formati da r ed s (risp. r', s').
Dimostrare che ogni affinità che manda r in r', s in s' e l in l' manda m in m'.

Esercizio 6(G2, G1+2)
Per $\lambda \in \mathbb{R}$, Si consideri la conica C_λ di equazione $2\lambda(x^2 - y^2) + 2y^2 + \lambda(x - y) - x - 1 = 0$.
(G2, G1+2) Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ C_λ è degenere?
(G2) Classificare dal punto di vista affine le coniche C_2 e C_{-2}.
(G2, G1+2) Mostrare che esistono esattamente due valori di λ per cui C_λ è una parabola. Tali parabole sono isometriche?

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento. Durata: 3 ore. Scrivere sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.