ANNO ACCADEMICO 2002/2003

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I

Secondo compitino 19/12/2002

Esercizio 1

Discutere al variare di $a \in \mathbb{C}$ la diagonalizzabilità della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} a-1 & 2a & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 2 & a+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4, e sia $f \in$End(V) tale che Im$(f^2 + a \cdot id) \subset$Ker$(f + id)$, dove $a =$det$f$, $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.

a) Dimostrare che $(f + id) \circ (f^2 + a \cdot id) = 0$.

b) Dimostrare che se $a \neq 0$ f è diagonalizzabile.

c) Per $a = 2$ trovare tutti i possibili polinomi caratteristici per f.

d) Per $a = 0$ trovare tutti i possibili polinomi minimi per f.

Esercizio 3

Sia $V = \mathbb{R}_4[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado minore o uguale a 4, e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\varphi(p, q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

a) Verificare che φ è un prodotto scalare.

b) Trovare una base di Rad(φ).

c) Calcolare gli indici di positività e negatività di φ.

d) Costruire una base ortogonale che contenga il vettore $x^2 + 1$.