Geometria I e II
Appello del 8/7/2004

Esercizio 1 (G1, G1+2).
Al variare del parametro reale t, si consideri il sottospazio W_t di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$v_1 = (2,1,0,0,1), v_2 = (0,3,1,1,0), v_3 = (1,1,0,1,0), v_4 = (t-2, 2, 2t-1, 0, 1-t).$$

(1) Determinare una base di W_t.
(2) Trovare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni coincida con W_t.

Esercizio 2 (G1).
Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che f ha rango k se e solo se esistono due applicazioni lineari $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tali che g è surgettiva, h è iniettiva e $f = h \circ g$.

Esercizio 3 (G1).
Al variare di α in $\mathbb{R}$, si consideri la matrice reale

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha - 2 \\ \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Dire per quali valori del parametro α la matrice A_α è diagonalizzabile.
(2) Detto L il sottospazio generato dal vettore $(0,1,1)$, dire per quali valori di α esiste un autospazio W per A_α tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus L$.

Esercizio 4 (G1, G1+2).
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare tale che $f^2 = f$. Dimostrare che esiste un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ rispetto al quale f è simmetrica.

Esercizio 5 (G2).
Siano (V_1, φ_1), (V_2, φ_2) spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ della stessa dimensione n, muniti di prodotti scalari non degeneri φ_1, φ_2. Determinare, in funzione delle segnature di φ_1 e φ_2, il massimo intero m per cui esistano sottospazi $W_1 \subset V_1$, $W_2 \subset V_2$ tali che $\dim W_1 = \dim W_2 = m$ e $(W_1, \varphi_1|_{W_1})$ sia isometrico a $(W_2, \varphi_2|_{W_2})$.

Esercizio 6 (G2, G1+2).
Sia $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_f(x) = x^4 - 2x^3$ e sia $q_f(x)$ il suo polinomio minimo. Dimostrare che esistono in $\mathbb{C}^4$ esattamente due sottospazi f-invarianti di dimensione 2 se e solo se $p_f = q_f$.

Esercizio 7 (G2, G1+2).
Identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ affine $(z = x + iy \leftrightarrow (x,y))$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$.

(1) Dimostrare che l'applicazione $z \to \alpha z + \beta$ è una affinità di $\mathbb{R}^2$.
(2) Dimostrare che l'applicazione $z \to \bar{z}$ è una affinità di $\mathbb{R}^2$.
(3) È vero che ogni affinità di $\mathbb{R}^2$ è composizione di un numero finito di affinità del tipo (1) e (2)?

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento. Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di matricola e sigla dell'esame.