ANNO ACCADEMICO 2003/2004

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Primo compitino 17/11/2003

Esercizio 1

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y - 2z &= \alpha \\ -x + z &= 1 - \alpha \\ -2x - 3\alpha y + (\alpha + 4)z &= -3 - \alpha \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 2x - z, -x + 3y + 3z, 3x + 3y + z)$$

e sia U =Span$((1, 2, 1)) \subset \mathbb{R}^3$.

1) Trovare una base di Imf.

2) Costruire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $g \circ f = 0$ e $\operatorname{Im} g = U$.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $V_1, \ldots, V_k$ sottospazi di V.
$W = \{f \in$Hom$(V, V) |\ f(V_i) \subset V_i\ \forall i = 1, \ldots, k\}$ è un sottospazio di Hom(V, V).

b) Dati $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$, se per ogni $i \neq j$ v_i e v_j sono linearmente indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

c) Siano V_1, V_2, W sottospazi dello spazio vettoriale V.
$V_1 \oplus W = V_2 \oplus W \Rightarrow V_1 = V_2$.