Corso di Laurea in Fisica

Geometria I e II
Appello del 3/6/2004

Esercizio 1 (G1).
Discutere, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, l'esistenza e unicità delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= \beta \\ 2x+\alpha y+z &= 1 \\ \alpha x+y+\alpha z &= \beta+1 \\ x+(\alpha-1)y &= 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 (G1, G1+2).
Data la matrice $A \in {}_n\mathbb{K}_n$, poniamo $W(A) = \{B \in {}_n\mathbb{K}_n \mid AB = BA\}$.
1) Dimostrare che $W(A)$ è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{K}_n$.
2) Calcolare $\dim W(A)$ quando A è la matrice a blocchi $\begin{pmatrix} \lambda I_r & O \\ O & \mu I_{n-r} \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$ e $1 \leq r \leq n-1$, dove I_m è la matrice identità di ${}_m\mathbb{K}_m$.
3) Dimostrare che se A è simile ad A' allora $W(A)$ è isomorfo a $W(A')$.
4) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Verificare che A è diagonalizzabile e calcolare $\dim W(A)$.

Esercizio 3 (G1).
Dato il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y$, , sia $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 2z + w = 0\}$ e sia $v = (1,3,5,9)$.
1) Trovare una base φ-ortonormale di W.
2) Completare la base trovata al punto 1 ad una base φ-ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
3) Calcolare la proiezione ortogonale di v su W.

Esercizio 4 (G1).
Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e sia $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice simmetrica invertibile. Definiamo il prodotto scalare $\tilde{g}$ su $\mathbb{R}^n$ tramite la formula $\tilde{g}(X,Y) = g(AX,Y)$.
Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.
1) g non degenere $\Rightarrow \tilde{g}$ non degenere.
2) g definito positivo $\Rightarrow \tilde{g}$ definito positivo.
3) g non degenere $\Rightarrow$ esiste A tale che $\tilde{g}$ è definito positivo.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; R1 = Recupero primo compitino Geometria II; R2 = Recupero secondo compitino Geometria II.
Durata: R1, R2 1 ora e mezzo; G1, G2, G1+2 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n+1$ e siano g e h due prodotti scalari su V tali che g è definito positivo e h ha segnatura $(n,1,0)$. Sia $f : V \to V$ l'unico endomorfismo tale che $h(v,w) = g(f(v),w)$ per ogni $v, w \in V$.
1) Dimostrare che lo spettro di f contiene un solo autovalore negativo λ.
2) Calcolare la dimensione dell'autospazio di f relativo a λ.

Esercizio 6 (G2, R1).
Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia ψ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato nella base canonica dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ e sia f_b il funzionale definito da $f_b(x,y,z) = bx + by + z$.
1) Determinare i valori di a e b per cui esiste $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_b(v) = \psi_a(v,w)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.
2) Dire se, al variare di $b \in \mathbb{R}$, i sottospazi $\mathrm{Ker} f_b$ sono tutti ψ_0-isometrici.

Esercizio 7 (G2, G1+2, R2).
Determinare tutti i possibili polinomi minimi per un endomorfismo $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ nilpotente tale che $\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) \neq 1$.

Esercizio 8 (G2, G1+2, R2).
Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai punti dei segmenti di estremi $(-1,0)$ e $(1,0)$, $(0,-3)$ e $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(-1,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Sia poi $S' \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai punti dei segmenti di estremi $(0,0)$ e $(a,0)$, $(1,-2)$ e $(b,-2)$, $(3,2)$ e $(c,2)$, $(1,-2)$ e $(3,2)$, dove $a > 0, b > 1, c > 3$.
1) Dare condizioni su a, b, c necesserie e sufficienti affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ che mandi S in S'.
2) Nel caso in cui tale affinità esista, costruirle tutte.

Corso di Laurea in Fisica

Geometria I e II
Appello del 3/6/2004

Esercizio 1 (G1).
Discutere, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, l'esistenza e unicità delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z & = & \beta \\ 2x+\alpha y+z & = & 1 \\ \alpha x+y+\alpha z & = & \beta+1 \\ x+(\alpha-1)y & = & 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 (G1, G1+2).
Data la matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$, poniamo $W(A) = \{B \in M(n, \mathbb{K}) |\ AB = BA\}$.
1) Dimostrare che $W(A)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.
2) Calcolare $\dim W(A)$ quando A è la matrice a blocchi $\begin{pmatrix} \lambda I_r & O \\ O & \mu I_{n-r} \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$ e $1 \leq r \leq n-1$, dove I_m è la matrice identità di $M(m, \mathbb{K})$.
3) Dimostrare che se A è simile ad A' allora $W(A)$ è isomorfo a $W(A')$.
4) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Verificare che A è diagonalizzabile e calcolare $\dim W(A)$.

Esercizio 3 (G1).
Dato il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y$, sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ y - 2z + w = 0\}$ e sia $v = (1, 3, 5, 9)$.
1) Trovare una base φ-ortonormale di W.
2) Completare la base trovata al punto 1 ad una base φ-ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
3) Calcolare la proiezione ortogonale di v su W.

Esercizio 4 (G1).
Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica invertibile. Definiamo il prodotto scalare $\tilde{g}$ su $\mathbb{R}^n$ tramite la formula $\tilde{g}(X, Y) = g(AX, Y)$. Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.
1) g non degenere $\Rightarrow \tilde{g}$ non degenere.
2) g definito positivo $\Rightarrow \tilde{g}$ definito positivo.
3) g non degenere $\Rightarrow$ esiste A tale che $\tilde{g}$ è definito positivo.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; R1 = Recupero primo compitino Geometria II; R2 = Recupero secondo compitino Geometria II.
Durata: R1, R2 1 ora e mezzo; G1, G2, G1+2 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n+1$ e siano g e h due prodotti scalari su V tali che g è definito positivo e h ha segnatura $(n,1,0)$. Sia $f: V \to V$ l'unico endomorfismo tale che $h(v,w) = g(f(v),w)$ per ogni $v, w \in V$.
1) Dimostrare che lo spettro di f contiene un solo autovalore negativo λ.
2) Calcolare la dimensione dell'autospazio di f relativo a λ.

Esercizio 6 (G2, R1).
Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia ψ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato nella base canonica dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ e sia f_b il funzionale definito da $f_b(x,y,z) = bx + by + z$.
1) Determinare i valori di a e b per cui esiste $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_b(v) = \psi_a(v,w)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.
2) Dire se, al variare di $b \in \mathbb{R}$, i sottospazi $\mathrm{Ker} f_b$ sono tutti ψ_0-isometrici.

Esercizio 7 (G2, G1+2, R2).
Determinare tutti i possibili polinomi minimi per un endomorfismo $f: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ nilpotente tale che $\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) \neq 1$.

Esercizio 8 (G2, G1+2, R2).
Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai punti dei segmenti di estremi $(-1,0)$ e $(1,0)$, $(0,-3)$ e $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(-1,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Sia poi $S' \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai punti dei segmenti di estremi $(0,0)$ e $(a,0)$, $(1,-2)$ e $(b,-2)$, $(3,2)$ e $(c,2)$, $(1,-2)$ e $(3,2)$, dove $a > 0, b > 1, c > 3$.
1) Dare condizioni su a, b, c necesserie e sufficienti affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ che mandi S in S'.
2) Nel caso in cui tale affinità esista, costruirle tutte.