CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA II

Compitino del 29/3/2004

Sia $V = {}_n\mathbb{K}_n$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ e siano $f_{ij} \in V^*$ i funzionali definiti da, se $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in V$, $f_{ij}(A) = a_{ij}$.

Definiamo:

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}, \quad G_j = \sum_{k=1}^{n} f_{kj},$$

$$U = \mathrm{Span}(F_1, \ldots, F_n), \quad W = \mathrm{Span}(G_1, \ldots, G_n),$$

$$T_1 = \{A \in V \mid {}^t(1,1,\ldots,1) \in \mathrm{Ker}\, A\}, \ T_2 = \{A \in V \mid {}^t(1,1,\ldots,1) \in \mathrm{Ker}\, {}^tA\}.$$

1) Dimostrare che (tramite l'identificazione di V con V^{**}) $\mathrm{Ann}U = T_1$ e $\mathrm{Ann}W = T_2$.

2) Sapendo che $\dim(T_1 \cap T_2) = (n-1)^2$, dimostrare che $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n$ sono linearmente dipendenti. (Hint: calcolare $\dim\mathrm{Ann}(F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n)$)

Da ora in poi, poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 2$.

Definiamo su V il prodotto scalare non degenere φ tramite la formula:

$$\varphi(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} (i+j) f_{ij}(A \cdot {}^tB), \ \forall A, B \in V.$$

3) Dire quali tra i seguenti sottospazi sono φ-isometrici: $\mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$, $\mathrm{Ann}(f_{11})$, $\mathrm{Ann}(f_{12}, f_{21})$, $\{A \in V \mid \mathrm{tr}A = 0\}$ (dove $\mathrm{tr}(A)$ è la traccia di A).

4) Costruire un sottospazio di V totalmente φ-isotropo della massima dimensione.

5) Rappresentare tramite φ il funzionale $\mathrm{tr} \in V^*$.

6) Dire se l'applicazione di trasposizione, ${}^t : V \to V$ è φ-autoaggiunta.

Dufrata: 2 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome e numero di marticola.