**ANNO ACCADEMICO 2005/2006**

**CORSO di LAUREA in FISICA**

**GEOMETRIA I**

**Secondo compitino 16/12/2005**

**Esercizio 1**

Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un endomorfismo avente solo due autovalori distinti. Dimostrare che, se esistono 3 sottospazi vettoriali di dimensione 2 distinti $f$-invarianti, allora $f$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 2**

Sia $\Phi$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da $\Phi(X, Y) = {}^tXAY \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare una base del radicale di $\Phi$.

(2) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

(3) Esibire, se esistono, due sottospazi $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ contenenti il radicale di $\Phi$, con $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ e tali che le restrizioni $\Phi_{|_{W_1}}$ e $\Phi_{|_{W_2}}$ sono non isometriche.

**Esercizio 3**

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Le seguenti matrici in ${}_3\mathbb{R}_3$ sono due a due non simili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Esiste un prodotto scalare non nullo su $\mathbb{R}^3$ tale che la restrizione ad ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 è degenere.