A. A. 2005/2006
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II
Compito del 14/9/2006

Esercizio 1(G1)
Al variare dei parametri reali h, k discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} hx + y - t & = & 0 \\ (h+1)x + y + z & = & 1 \\ x + (h^2+1)z + t & = & k+1 \end{cases}$$

Esercizio 2(G1)

Siano V_1, V_2, V_3 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ con $\dim V_1 = 1, \dim V_2 = 2$ e $\dim V_3 = 3$. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare tale che $f(V_3) \subset V_2$, $\quad f(V_2) \subset V_1$, $\quad f(V_1) = \{0\}$ e tale che la restrizione $f|_{V_2 \cap V_3}$ sia iniettiva.

(1) Verificare che $V_2 \not\subset V_3$ e che $V_1 \subset V_2$.
(2) Verificare che f è nilpotente e che non è diagonalizzabile.

Esercizio 3(G1)
Sia $V = M(n, \mathbb{R})$ e sia φ l'applicazione bilineare su V data da $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$. Per ogni $M \in V$, sia $f_M : V \to V$ l'endomorfismo definito da $f_M(X) = XM + X$.

(1) Verificare che φ è un prodotto scalare definito positivo.
(2) Determinare le matrici $M \in V$ per le quali f_M è simmetrico rispetto a φ.
(3) Fissata $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinare, se esiste, una base ortonormale di V (rispetto a φ) costituita da autovettori per f_M.

Esercizio 4(G1)
Siano U, V, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ con $U \subset V \subset W$ e $\dim U = 1, \dim V = 2, \dim W = 3$. Sia Φ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera (e in tal caso dimostrarla) o falsa (e in tal caso esibire un controesempio):

(1) se $V \subset W^\perp$, allora $U \subset V^\perp$,
(2) se $V = W^\perp$, allora $U = V^\perp$,
(3) se $\Phi|_V$ è non degenere, allora $\Phi|_U$ è non degenere,
(4) se $U = W^\perp$ e $V = V^\perp$, allora Φ è non degenere.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria 1 G2 = Geometria 2 Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

A. A. 2005/2006
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II
Compito del 14/9/2006

Esercizio 5(G2)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e φ un prodotto scalare non degenere su V di indice di Witt $W(\varphi) = k$.
1) Dimostrare che, se esiste un sottospazio $U \subset V$ di dimensione m totalmente anisotropo, allora $k \leq n - m$.
2) Dimostrare che, se $U \subset V$ è un sottospazio di dimensione $n-1$ per cui $\varphi_{|_U}$ è non degenere, allora $W(\varphi_{|_U}) \in \{k, k-1\}$.
3) Costruire un esempio per cui $\{W(\varphi_{|_U}) \mid U \subset V$ è un sottospazio di dimensione $n-1$ per cui $\varphi_{|_U}$ è non degenere $\} \neq \{k, k-1\}$.

Esercizio 6(G2)
Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo non nullo con un solo autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$.
Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{C}$, f è simile a f^3.

Esercizio 7(G2)
Per $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $C_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $4\lambda x^2 - (\lambda+1)y^2 - xy + (2+4\lambda)y - 4\lambda$.
1) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il tipo affine di C_λ.
2) Determinare i punti comuni alle coniche C_λ e il luogo dei centri delle coniche C_λ.
3) C_3 è isometrica a C_4?

---
[0] Sigle dell'esame: G1 = Geometria 1 G2 = Geometria 2 Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.