A. A. 2005/2006
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 24/3/2006

Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$ con $k \geq 2$.
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f_\alpha \in V^*$ definito da $f_\alpha(p) = p(\alpha)\ \forall\, p \in V$ e sia $B = \{f_i |\ i \in \mathbb{Z}\}$.
Sia φ il prodotto scalare su V dato da $\varphi(p,q) = \sum_{j=-k+1}^{k-1} f_j(p) f_{-j}(q)$.

1) Dimostrare che ogni sottoinsieme di B composto da $k+1$ elementi è una base di V^*.

2) Per quali $k \geq 2$ esistono $i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tali che $\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_{k-1}}))$=$\mathrm{Span}(x, x^2)$? (si è usato l'isomorfismo canonico tra V e V^{**})

3) Dimostrare che φ è non degenere e calolarne l'indice di Witt. (Hint: considerare i polinomi pari e quelli dispari)

4) Per $k = 3$, dire se esiste una decomposizione di Witt di V tale che i vettori 1 e $x + x^2$ appartengano a qualche fattore (i.e. allo stesso fattore o a fattori distinti).

5) Per $k = 3$, trovare, se esiste, un sottospazio $W \subset V$ φ-isometrico a U =$\mathrm{Span}(1, x + x^2)$ e tale che $W \cap U = \{0\}$.

6) Per $k = 2$, rappresentare tramite φ i funzionali f_1 e f_2.