ANNO ACCADEMICO 2006/2007

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Secondo compitino 20/12/2006

Esercizio 1

Si consideri il prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^4$ dato da $\phi(v,w) = {}^t vAw$, dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Determinare una base del radicale di ϕ.

2) Calcolare la segnatura di ϕ.

3) Esiste un sottospazio W di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$?

4) Esiste un sottospazio W di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$?

Esercizio 2

Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$, munito del prodotto scalare $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^t AB)$ per ogni $A, B \in V$.

Si considerino la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e l'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da $f(X) = \mathrm{tr}({}^t XC) \cdot C$ per ogni $X \in V$.

1) Verificare che f è autoaggiunta rispetto a φ.

2) Determinare, se esiste, una base di V ortonormale per φ di autovettori per f.

3) Calcolare il polinomio minimo di f.

Esercizio 3

Determinare quali fra le matrici seguenti sono simili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$