ANNO ACCADEMICO 2006/2007

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I

Primo compitino 6/11/2006

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e sia $W = \mathrm{Span}(2 + x, x^2 + x^3, 1 + x^3)$.

a) Calcolare la dimensione di W.

b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $x^3 - x^2 + kx + 8$ appartiene a W.

c) Costruire una applicazione lineare $f \colon V \to \mathbb{R}^4$ tale che

  i) $f(W) \subseteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, x + y + z - t = 0\}$

  ii) $\dim \mathrm{Im} f = 3$.

Esercizio 2.

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita, sia Z un sottospazio vettoriale di W e $f : V \to W$ una applicazione lineare. Sia $f^{-1}(Z) = \{v \in V \mid f(v) \in Z\}$.

a) Verificare che $f^{-1}(Z)$ è un sottospazio vettoriale di V.

b) Dimostrare che $\mathrm{Ker}\, f \subseteq f^{-1}(Z)$.

c) Verificare che $\dim f^{-1}(Z) \leq \dim Z + \dim \mathrm{Ker}\, f$.

d) Sia $V = W = {}_2\mathbb{R}_2$ e sia $Z \subset {}_2\mathbb{R}_2$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Se $f \colon {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ è l'applicazione lineare definita da

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + d & a \\ b - c & a - d \end{pmatrix},$$

calcolare la dimensione di $f^{-1}(Z)$.