A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 11/6/2007

Esercizio 1
Sia B una matrice $n \times n$ reale antisimmetrica non nulla. Si consideri l'insieme

$$V = \{A \in {}_n\mathbb{R}_n \mid A - {}^tA \in \mathrm{Span}(B)\}.$$

(1) Provare che V è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{R}_n$.
(2) Provare che $\dim V = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale e U, W sottospazi tali che $V = U + W$. Sia f un endomorfismo di V tale che $f(U) \subseteq U$ e $f(W) \subseteq W$.

(1) Provare che, se f è triangolabile, allora anche $f|_U : U \to U$ e $f|_W : W \to W$ lo sono.
(2) Sia $\mathcal{S}$ una base di U a bandiera per $f|_U$. Provare che, se f è triangolabile, esiste una base $\mathcal{T}$ di V a bandiera per f che completa $\mathcal{S}$.
(3) Provare che, se f è triangolabile e $\mathcal{G}$ è una base di $U \cap W$ a bandiera per $f|_{U\cap W}$, esiste una base $\mathcal{B}$ di V a bandiera per f che completa $\mathcal{G}$.

Esercizio 3
Siano $v_1 = (1,0,0), v_2 = (-1,1,0), v_3 = (0,1,1)$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Indichiamo inoltre con e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(1) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste un prodotto scalare ϕ_λ su $\mathbb{R}^3$ tale che
   - v_1 e v_2 sono isotropi,
   - $\phi_\lambda(v_3, v_3) = 2$,
   - $\phi_\lambda(e_2, e_3) = 1$,
   - $\phi_\lambda(e_1, 2e_2 - e_3) = 2$,
   - $\phi_\lambda(e_2 - e_1, e_3 + \lambda e_2) = -1$.

(2) Esiste un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui ϕ_λ è semidefinito positivo?

A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 11/6/2007

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n dotato di un prodotto scalare non degenere φ.
Fissati $f \in$End(V) e $u \in V$, sia $F_{f,u}$ il funzionale definito da $F_{f,u}(v) = \varphi(f(v), u)$ per ogni $v \in V$. Indichiamo con f^* l'aggiunta di f e con $\psi : V \to V^{**}$ l'isomorfismo canonico.
1) Dimostrare che ker$F_{f,u}$ =Span$(f^*(u))^\perp$.
2) Dimostrare che $F_{f,u_1}, \ldots F_{f,u_n}$ sono linearmente indipendenti se e solo se f è invertibile e $u_1, \ldots, u_n$ sono linearmete indipendenti.
Fissato $f \in$End(V), sia $F_f : V \to V^*$ l'applicazione lineare definita da $F_f(u) = F_{f,u}$ per ogni $u \in V$.
3) Se $U \subset V$ è un sottospazio, dimostrare che $F_f(U) \cap$Ann$(U) = F_f(U \cap f(U)^\perp)$.
4) Dimostrare che ${}^tF_f \circ \psi = F_{f^*}$.
5) Diciamo che $g \in V^*$ si rappresenta tramite (φ, f) se esiste $u \in V$ tale che $g = F_{f,u}$. Per quali $f \in$End(V) ogni funzionale di V^* si rappresenta tramite (φ, f)?

Esercizio 2
Calcolare al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ la forma canonica di Jordan della matrice
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 2 & \lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3
Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai segmenti di vertici $(0,0)$ e $(2,0)$, $(1,0)$ e $(1,5)$, $(1,4)$ e $(3,5)$, e $(1,4)$ e $(-1,5)$, e sia $C_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai segmenti di vertici $(0,0)$ e $(0,-2a)$, $(0,-a)$ e $(b+2,-a)$, $(b,-a)$ e $(b+2,1-a)$, e $(b,-a)$ e $(b+2,-1-a)$. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}^+$ C è affinemente equivalente a $C_{a,b}$.