A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 13/9/2007

Esercizio 1

Sia

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2k-1 & 0 & -k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ k-1 & k^2-1 & 2 & -k \\ k & 2k+1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice reale A_k è diagonalizzabile.

Esercizio 2

Sia V uno spazio vettoriale complesso e siano $f, g : V \to V$ due applicazioni lineari. Si supponga che f sia nilpotente e che $fg - gf = f$.

(1) Provare che $\ker f$ è invariante per g.
(2) Provare che esiste un autovettore comune v_0 ad f e g.
(3) Sia W un sottospazio di V tale che $V = \mathrm{Span}(v_0) \oplus W$ e sia $p_W : V \to W$ la proiezione indotta dalla somma diretta. Se $f' = p_W \circ f|_W, \quad g' = p_W \circ g|_W$, provare che
$$f'g' - g'f' = f'.$$
(4) Provare che esiste una base a bandiera comune ad f e g.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare ortogonale. Dimostrare che esistono due piani distinti passanti per l'origine invarianti per f se e soltanto se f è diagonalizzabile.

A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 13/9/2007

Esercizio 4
Sia
$$M_{h,k} = \begin{pmatrix} 1-h & h & -h & k-h \\ 0 & 1 & 0 & k \\ h & -h & h+1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Dire per quali coppie $(h,k),(h',k') \in \mathbb{C}^2$ la matrice $M_{h,k}$ è simile alla matrice $M_{h',k'}$.

Esercizio 5
Sia V uno spazio vettoriale e φ un prodotto scalare su V. Siano W, W' due sottospazi di V tali che $V = \mathrm{Rad}(\varphi) \oplus W = \mathrm{Rad}(\varphi) \oplus W'$.
Dimostrare che esiste φ $f : V \to V$ isometria per φ tale che $f(W) = W'$.

Esercizio 6
Siano $p, q \in \mathbb{R}[x]$ due polinomi senza fattori comuni con deg $p \leq 2$ e deg $q \leq 1$, $q \neq 0$, e si consideri il luogo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{p(x)}{q(x)}\}$.
1) Dimostrare che C è una conica.
2) Al variare di p e q determinare il tipo affine di C.