Geometria I e II
Appello del 17/1/2007

Esercizio 5 (G2).
(1) Data $B \in {}_m\mathbb{R}_n$, sia $A = {}^tBB$. Calcolare la segnatura del prodotto scalare φ_B su $\mathbb{R}^n$ definito da $\varphi_B(X,Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
(2) Sia $M \in {}_{m+n}\mathbb{R}_{m+n}$ la matrice a blocchi data da

$$M = \begin{pmatrix} I_m & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$$

dove I_m è la matrice identità di taglia $m \times m$.
Calcolare la segnatura di M.

Esercizio 6 (G2).
Per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ tali che $h \geq 1$ e $1 \leq k \leq 5$, determinare se esiste $f \in$End$(\mathbb{C}^5)$ tale che il polinomio caratteristico di f è $p_f(x) = (x-1)^5$ e dimKer$(f - id)^h = k$.

Esercizio 7 (G2).

Sia $P \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme dato dall'unione di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 5\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 5,\ 3 \leq y \leq 5\}$ e dei due segmenti di estremi $(0, \frac{5}{2})$ e $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, e $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e $(\frac{3}{2}, 3)$. Dati $H, K, a, b \in \mathbb{R}$ con $H, K > 1$, sia $P' \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme dato dall'unione di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2K+1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2K \leq x \leq -2K+1,\ 0 \leq y \leq 2H\}$, e dei due segmenti di estremi $(-K, 2)$ e (a, b), e (a, b) e $(-2K+1, H)$.
(1) Dare condizioni necessarie e sufficienti su H, K, a, b perché esista una affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(T') = T$.
(2) Scelti dei valori dei parametri H, K, a, b e scelta una delle affinità del punto (1), rappresentarla come $f(X) = AX + B$ con $A \in$GL$(2, \mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{R}^2$.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.