A. A. 2007/2008 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I Compito del 16/1/2008

Esercizio 1 [C1]
Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si considerino in $\mathbb{R}^2$ le seguenti rette

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \quad r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$
$$r_3 = \mathrm{Span}\{(1, b)\} \quad r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - y = 0\}$$
$$s_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \quad s_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$
$$s_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \quad s_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x\}.$$

(1) Provare che per ogni $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(r_i) = s_i$ per $i = 1, 2, 3$.
(2) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, per cui esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(r_i) = s_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 2 [C1]
Per ogni coppia di matrici $A, B \in {}_n\mathbb{R}_n$ si consideri il sottoinsieme

$$E = \{X \in {}_n\mathbb{R}_n) \mid AX = B\}.$$

(1) Provare che E è non vuoto se e solo se $\mathrm{Im}A \supseteq \mathrm{Im}B$.
(2) Determinare le coppie (A, B) per cui l'insieme E è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{R}_n$ e, in tal caso, calcolarne la dimensione.

Esercizio 3 [C2]
Per ogni numero naturale k, si consideri la matrice di ${}_{2k}\mathbb{R}_{2k}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e sia I la matrice identità di ordine $2k$.

(1) Provare, per induzione su k, che $\det(aI + bJ) = (a^2 - b^2)^k$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
(2) Provare che J è diagonalizzabile e determinare una base di $\mathbb{R}^{2k}$ di autovettori per J.

Esercizio 4 [C2]
Al variare del parametro reale a, si consideri su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare ϕ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare ϕ è degenere.
(2) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il radicale di ϕ.
(3) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la segnatura di ϕ.

Sigle dell'esame: C1 = recupero primo compitino; C2 = recupero secondo compitino.
Durata: compito 3 ore, recupero compitini 1,5 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.

A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 16/1/2008

Esercizio 5
Si consideri il prodotto scalare su $V = \mathbb{R}_4[x]$ dato da $\varphi(p,q) = \int_0^1 p'(t)q'(t)dt - p(1)q(1)$, per ogni $p, q \in V$.

(1) Calcolare una decomposizione di Witt per φ.
(2) Rappresentare tramite φ il funzionale $F : V \to \mathbb{R}$ definito da $F(p) = p(0)$, per ogni $p \in V$.
(3) Dire quali tra i seguenti sottospazi sono φ-isometrici: $\mathrm{Span}(x^i, x^{i+1})$ con i=0,1,2,3.

Esercizio 6
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione finita e sia $f \in \mathrm{End}(V)$.

(1) Dimostrare che se f è invertibile e f^2 è diagonalizzabile allora f è diagonalizzabile.
(2) È vero il viceversa?
(3) Resta vero il punto (1) senza l'ipotesi che f sia invertibile?

Esercizio 7
(1) Sia C una conica in $\mathbb{R}^2$ non vuota e diversa da un punto. Siano $A, B \in {}_3\mathbb{R}_3$ tali che ${}^tXAX = 0$ e ${}^tXBX = 0$ siano due equazioni per C, dove ${}^tX = (x, y, 1)$.
Dimostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tale che $B = \lambda A$.
(2) Siano $M, N \in {}_3\mathbb{R}_3$ due matrici simmetriche di segnatura $(2,1,0)$ e siano C_M e C_N i coni dei vettori isotropi dei prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$ definiti nella base canonica da M e N rispettivamente.
Dimostrare che $C_M = C_N$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, tale che $M = \lambda N$.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.