A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compitino del 27/5/2008

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo per cui esiste $k \geq 2$ tale che $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ si abbia $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)^k = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)^{k+1} = k \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.
Dimostrare che $k|n$.

Esercizio 2.
Per $\alpha \in \mathbb{C}$, siano $I, A_\alpha \in {}_2\mathbb{C}_2$, dove $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ la forma canonica di Jordan della matrice $M_\alpha \in {}_6\mathbb{C}_6$ definita a blocchi da

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha + 2I & A_0 & A_0 \\ \alpha I & {}^tA_1 & (\alpha+1)I \\ (\alpha+1)I & A_0 & A_\alpha \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.
Sia $\mathbb{A}$ uno spazaio affine e $W \subset \mathbb{A}$ un sottoinsieme.
Dimostrare che W è un sottospazio affine se e solo se $\forall\ P, Q \in W$ la retta affine per P e Q è contenuta in W.

Esercizio 4.
Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai segmenti di vertici $(2,3)$ e $(1,1)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, $(0,1)$ e $(-1,3)$, $(-1,3)$ e $(3,3)$, $(3,3)$ e $(3,2)$. Per $a, b \in \mathbb{R}$, sia $C_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai segmenti di vertici $(-2,-2)$ e $(0,-2)$, $(0,-2)$ e $(0,0)$, $(0,0)$ e $(-2,4)$, $(-2,4)$ e $(-2,-4)$, $(-2,-4)$ e (a,b).
Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esiste una affinità di $\mathbb{R}^2$ che mandi C in $C_{a,b}$ e, per una coppia di tali valori, costruire una tale affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nella forma $f(X) = AX + B$, dove $A \in {}_2\mathbb{R}_2$ e $B \in \mathbb{R}^2$.