ANNO ACCADEMICO 2009/2010
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Primo compitino 3/11/2009

Esercizio 1

Al variare dei parametri reali β e λ si considerino:

$$B_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad A_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda \\ -2 & 2\lambda & 3+\lambda & 1 \end{pmatrix} \in M(3,4,\mathbb{R}).$$

(a) Dire per quali valori di $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $A_\lambda X = B_\beta$ ha soluzione.

(b) Sia $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x+z+t=0,\ y+3z-2t=0\}$. Determinare, se esistono, i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\mathbb{R}^4 = T \oplus \ker A_\lambda$.

Esercizio 2

Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 3 a coefficienti reali e sia $Z = \{p \in V \mid p(-2) + p(2) = 0\}$.

(a) Verificare che Z è un sottospazio vettoriale di V e calcolarne la dimensione.

(b) Costruire, se esiste, un'applicazione lineare $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim f(Z) = 2$ e $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x-y+z-t=0\}$.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

(a) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$ e siano $A_1, A_2, A_3 \subset V$ sottospazi tali che:

- $\dim A_1 + \dim A_2 + \dim A_3 = n$,
- $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{0\}$.

Allora $V = A_1 + A_2 + A_3$.

(b) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Se $A, B \subseteq V$ sono sottospazi, allora $f(A+B) = f(A) + f(B)$.

(c) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Se $A, B \subseteq V$ sono sottospazi tali che $A \cap B = \{0\}$, allora $f(A \oplus B) = f(A) \oplus f(B)$.

Durata: 2 ore.

Scrivere subito sul foglio: nome e cognome, corso di appartenenza e numero di matricola.