ANNO ACCADEMICO 2009/2010 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II Compito del 7/6/2010

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n, $f_1, \dots, f_n \in V^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e poniamo φ il prodotto scalare su V definito da $\varphi(v, w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(v) f_i(w)$ per ogni $v, w \in V$. (Osservazione: nel rappresentare il prodotto scalare con un simbolo si è omessa la dipendenza dalle f_i e dai λ_j.)

1) Dimostrare che φ è non degenere se e solo se $\lambda_i \neq 0 \; \forall\, i$ e $f_1, \dots, f_n$ sono una base di V^* e, in tal caso, calcolarne l'indice di Witt.

2) Dimostrare che per ogni prodotto scalare ψ su V esistono $f_1, \dots, f_n \in V^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\psi = \varphi$.

3) Dimostrare che se $f_1, \dots, f_n$ sono una base di V^* allora, posto $W = \ker f_n$, $f_1|_W, \dots, f_{n-1}|_W$ sono una base di W^*. (Hint: può essere utile considerare la trasposta dell'inclusione di W in V.)

4) Nel caso in cui $f_1, \dots, f_n$ siano una base di V^*, dare condizioni su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ perché $\ker f_i$ sia congruente a $\ker f_j \; \forall\, i, j$.

Esercizio 2

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n. Dato un endomorfismo $f : V \to V$ sia m_f la minima taglia di un blocco della forma canonica di Jordan di f. f si dice J-regolare se tutti i blocchi della forma canonica di Jordan di f hanno taglia m_f.

1) Dimostrare che non esiste un sottospazio $W \subset V$ f-invariante di dimensione $\dim W < m_f$ che ammetta un supplementare f-invariante.

2) Dimostrare che f J-regolare $\Rightarrow$ la somma delle molteplicità geometriche di f divide n. Dimostrare che vale il viceversa se n è primo.

3) Dimostrare che se f è invertibile, allora $m_f = m_{f^2}$.

4) È vero che se f è J-regolare allora f^2 è J-regolare?

Esercizio 3

Per $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 2, y > 0$, sia $T_{x,y} \subset \mathbb{R}^2$ il poligono chiuso ottenuto congiungendo successivamente in ordine con dei segmenti i punti $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(x, 2y)$, $(2, 2y)$, $(1, y)$, $(0, y)$, $(0, 0)$. Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il poligono chiuso ottenuto congiungendo successivamente in ordine con dei segmenti i punti $(-3, -3)$, $(-3, 2)$, $(-7, 6)$, $(-7, 3)$, $(-5, 0)$, $(-5, -1)$, $(-3, -3)$.

Determinare per quali x, y $T_{x,y}$ è affinemente equivalente a T.

Durata: 2:30 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, e numero di matricola.