Geometria 1

Prova in itinere del 20/4/2017

Esercizio 1.
Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\lambda \in M(4, \mathbb{R})$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 & 0 & \lambda+1 \\ 1-\lambda & -1 & 0 & -2 \\ -1-\lambda & 0 & 1 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda+1 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui A_λ è triangolabile.

(b) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui A_λ è diagonalizzabile.

(c) Per i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui lo spettro di A_λ contiene un solo elemento, determinare la forma canonica di Jordan di A_λ.

Esercizio 2.
Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita e sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo tale che, detti $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ gli autovalori di f, si abbia per ogni $i = 1, \dots, k$, $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_i id)^2 = 2 \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_i id)$.

(a) Dimostrare che il polinomio minimo di f ha grado maggiore o uguale a $2k$.

(b) Dimostrare che se il polinomio minimo di f ha grado uguale a $2k$ allora V ha dimensione pari.

(c) Dimostrare che esiste una base di V di Jordan per f che sia anche una base di Jordan per f^2 se e solo se il polinomio minimo di f ha grado uguale a $2k$ e lo spettro di f è contenuto in $\{0, \frac{1}{2}\}$.

Esercizio 3.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e $\varphi \in PS(V)$ un prodotto scalare su V. Siano inoltre $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali tali che $U \subset W$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

(a) $\varphi|_W$ non degenere $\Rightarrow \mathrm{rnk}\, \varphi \geq \dim W$.

(b) φ non degenere $\Rightarrow \dim \mathrm{Rad}(\varphi|_W) \leq \min(\dim W, \dim V - \dim W)$.

(c) $\varphi|_W$ non degenere $\Rightarrow \dim W \geq \dim U + \dim \mathrm{Rad}(\varphi|_U)$.

(d) φ non degenere, $W = U \oplus \mathrm{Rad}(\varphi|_W) \Rightarrow$ per ogni $v \in \mathrm{Rad}(\varphi|_W)$, $v \neq 0$, si ha $U^\perp \not\subset v^\perp$.

(e) φ non degenere, $W = U \oplus \mathrm{Rad}(\varphi|_W)$, $\dim \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = 1 \Rightarrow$ esiste $H \subset V$ piano iperbolico, $H \perp U$, tale che $W \subset U + H$ e $\varphi|_{U+H}$ è non degenere.